MATEMÁTICA

CIÊNCIA E APLICAÇÕES

Gelson Iezzi
Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo
Licenciado em Matemática pelo Instituto de
e Estatística da Universidade de São Paulo
Professor da rede particular de ensino em São Paulo

Osvaldo Dolce
Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Professor da rede pública estadual de São Paulo

David Degenszajn
Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística
da Universidade de São Paulo
Professor da rede particular de ensino em São Paulo

Roberto Périgo
Licenciado e bacharel em Matemática pela Pontifícia Universidade
Católica de São Paulo
Professor da rede particular de ensino e de cursos pré-vestibulares em São Paulo

Nilze de Almeida
Mestra em Ensino de Matemática pela Pontifícia Universidade
Católica de São Paulo
Licenciada em Matemática pelo Instituto de Matemática e
Estatística da Universidade de São Paulo
Professora da rede pública estadual de São Paulo

COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA
1º ANO
ENSINO MÉDIO

Volume 1

Ensino Médio

9ª edição
São Paulo, 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Matemática : ciência e aplicações : ensino médio,
volume 1 / Gelson Iezzi. . . [et. al.] . – 9. ed. –
São Paulo : Saraiva, 2016.

Outros autores: Osvaldo Dolce, David
Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida
Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN 978-85-472-0535-5 (aluno)
ISBN 978-85-472-0536-2 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Iezzi, Gelson.
II. Dolce, Osvaldo. III. Degenszajn, David.
IV. Périgo, Roberto. V. Almeida, Nilze de.

16-02746 CDD – 510.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Diretora editorial Lidiane Vivaldini Olo
Gerente editorial Luiz Tonolli
Editor responsável Viviane Carpegiani
Editores Juliana Grassmann dos Santos, Pedro Almeida do Amaral Cortez, Érica Lamas
Gerente de produção editorial Ricardo de Gan Braga
Gerente de revisão Hélia de Jesus Gonsaga
Coordenador de revisão Camila Christi Gazzani
Revisores Diego Carbone, Larissa Vazquez, Maura Loria, Raquel Alves Taveira
Produtor editorial Roseli Said
Supervisor de iconografia Sílvio Kligin
Coordenador de iconografia Cristina Akisino
Pesquisa iconográfica Fernando Cambetas
Coordenador de artes José Maria Oliveira
Design e Capa Sergio Cândido com imagens de Shutterstock, Martin Bond/SPL/Latinstock, Shutterstock, Shutterstock
Edição de artes Marcos Zolezi
Diagramação Setup
Assistente Bárbara de Souza
Ilustrações Ari Nicolosi, Casa Paulistana de Comunicação, CJT/Zapt, Ilustra Cartoon, Luigi Rocco, Milton Rodrigues, Setup, [SIC] Comunicação, Wilson Jorge Filho/Zapt
Tratamento de imagens Emerson de Lima
Protótipos Magali Prado
Impressão e acabamento

732.741.009.001

SAC 0800-0117875
2ª a 6ª, das 8h às 18h
www.editorasaraiva.com.br/contato

Avenida das Nações Unidas, 7221 – 1º Andar – Setor C – Pinheiros – CEP 05425-902

Apresentação

Caros alunos

É sempre um grande desafio para um autor definir o conteúdo a ser ministrado no Ensino Médio, distribuindo-o pelos três anos. Por isso, depois de consultar as sugestões da Secretaria de Educação Básica (entidade pertencente ao Ministério da Educação) e de ouvir a opinião de inúmeros professores, optamos pelo seguinte programa:

Volume 1: noções de conjuntos, conjuntos numéricos, noções gerais sobre funções, função afim, função quadrática, função modular, função exponencial, função logarítmica, progressões, semelhança e triângulos retângulos, áreas das principais figuras planas, trigonometria no triângulo retângulo e estatística descritiva.

Volume 2: trigonometria na circunferência, funções circulares, trigonometria em um triângulo qualquer, geometria espacial de posição, áreas e volumes dos principais sólidos, matrizes, sistemas lineares, determinantes, análise combinatória e probabilidades.

Volume 3: geometria analítica plana, estatística descritiva, matemática financeira, números complexos, polinômios e equações algébricas.

Ao tratar de alguns assuntos, procuramos apresentar um breve relato histórico sobre o desenvolvimento das descobertas associadas ao tópico em estudo. Já em capítulos como os que tratam de funções, matemática financeira e estatística descritiva, entre outros, recorremos a infográficos e matérias de jornais e revistas, como forma de mostrar a aplicação da Matemática em outras áreas do conhecimento e no cotidiano. São textos de fácil leitura, que despertam a curiosidade do leitor e que podem dialogar sobre temas transversais, como cidadania e meio ambiente.

No desenvolvimento teórico, procuramos, sempre que possível, apresentar os assuntos de forma contextualizada, empregando uma linguagem mais simples. Entretanto, ao formalizarmos os conceitos em estudo (os quais são abundantemente exemplificados), optamos por termos com maior rigor matemático.

Tivemos também a preocupação de mostrar as justificativas lógicas das propriedades apresentadas, omitindo apenas demonstrações exageradamente longas, incompatíveis com as abordagens feitas atualmente no Ensino Médio. Cada nova propriedade é seguida de exemplos e exercícios resolvidos, por meio dos quais é explicitada sua utilidade.

Quanto às atividades, tanto os exercícios como os problemas estão organizados em ordem crescente de dificuldade.

Cada capítulo do livro é encerrado com um desafio. Geralmente é um problema mais complexo, que exige maior raciocínio, articulação e criatividade do leitor na busca da solução. É mais uma oportunidade para vivenciar a resolução de problemas.

Os autores

Conheça este livro

Início do capítulo

O início do capítulo recebe destaque especial e, sempre que possível, é introduzido com situações do cotidiano.

Aplicações

Incluem textos que ilustram o emprego de conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física ou entre a Matemática e a Economia. Os textos aprofundam alguns conceitos e auxiliam a construção de outros.

Troque ideias

A seção propõe atividades que devem ser realizadas em grupo. Tais atividades buscam despertar a curiosidade e levar o leitor a construir novos conceitos, ou aprofundar conteúdos já apresentados, além de favorecer a autonomia e instigar a busca pelo conhecimento.

Um pouco de história

O trabalho com a História da Matemática coloca os alunos em contato com o processo de construção do conhecimento e a criatividade na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também os acontecimentos na linha do tempo.

Pense nisto

Chamadas curtas são intercaladas em meio ao texto convidando o leitor para refletir sobre algum detalhe do texto, alguma propriedade ou alguma solução para um problema.

Exemplos e exercícios resolvidos

Todos os capítulos deste livro apresentam séries de exercícios intercaladas em meio ao texto. Muitas dessas séries são precedidas de exemplos ou exercícios resolvidos, que auxiliam o leitor a ampliar o repertório de exemplos apresentados no texto.

Exercícios

Grande variedade de exercícios é proposta nesta seção que tem por objetivo consolidar os conteúdos e conceitos abordados.

Desafio

Ao final de cada capítulo é apresentado um desafio com o objetivo de, mais uma vez, permitir que o leitor vivencie a resolução de problemas, estimulando sua criatividade e seu raciocínio.

Um pouco mais sobre

Alguns conteúdos podem ser complementados ou aprofundados a partir da leitura de textos no final de determinados capítulos.

SUMÁRIO

Noções de conjuntos

Introdução

De uso corrente em Matemática, a noção básica de conjunto não é definida, ou seja, é aceita intuitivamente e, por isso, chamada **noção primitiva**. Ela foi utilizada primeiramente por Georg Cantor (1845-1918), matemático nascido em São Petersburgo, Rússia, mas que passou a maior parte da vida na Alemanha. Segundo Cantor, a noção de conjunto designa uma coleção de objetos bem definidos e discerníveis, chamados elementos do conjunto.

Pretendemos aqui introduzir alguns conceitos que também consideramos primitivos:

- **conjunto:** designado, em geral, por uma letra latina maiúscula (A, B, C, ..., X, Y, Z);
- **elemento:** designado, em geral, por uma letra latina minúscula (a, b, c, ..., x, y, z);
- **pertinência:** a relação entre elemento e conjunto, denotada pelo símbolo $\in$, que se lê "pertence a".

Assim, por exemplo, se **A** é o conjunto das cores da bandeira do Brasil, designadas por **v** (verde), **a** (amarelo), **z** (azul) e **b** (branco), podemos falar que **v**, **a**, **z**, **b** são elementos de **A**, o qual pode ser representado colocando-se os elementos entre chaves, como segue:

$$A = \{v, a, z, b\}$$

Dizemos, então, que $v \in A$, $a \in A$, $z \in A$ e $b \in A$.

OBSERVAÇÕES

- Os símbolos $\notin$ e $\neq$ são usados para expressar as negações de $\in$ e $=$, respectivamente.
  No exemplo acima, temos $v \neq a$, $v \neq z$, $v \neq b$, $a \neq z$, $a \neq b$, $b \neq z$ e, se designarmos a cor preta por **p**, temos que $p \notin A$.
- Além de poder ser descrito enumerando-se um a um seus elementos, como mostrado no exemplo anterior, um conjunto pode ser designado por uma propriedade característica de seus elementos. Nesse caso, podemos representá-lo da seguinte forma:

$$A = \{x \mid x \text{ é cor da bandeira do Brasil}\}$$

(lê-se: tal que)

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos **A** e **B** são iguais se todo elemento de **A** pertence a **B** e, reciprocamente, todo elemento de **B** pertence a **A**.

Assim, por exemplo:

- se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{b, c, a\}$, temos que $A = B$;
- se $A = \{x \mid x - 2 = 5\}$ e $B = \{7\}$, temos que $A = B$;
- se **A** é o conjunto das letras da palavra "garra" e **B** é conjunto das letras da palavra "agarrar", temos $A = B$. Note que, dentro de um mesmo conjunto, não precisamos repetir elementos. Apesar de a palavra "garra" ter cinco letras e a palavra "agarrar" ter sete, temos $\{g, a, r, r, a\} = \{a, g, a, r, r, a, r\} = \{a, g, r\}$.

OBSERVAÇÕES

- Há conjuntos que possuem um único elemento, chamados **conjuntos unitários**, e há um conjunto que não possui elementos, chamado **conjunto vazio** e indicado por { } ou $\varnothing$. Por exemplo:

a) São conjuntos unitários:

$$A = \{5\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ é capital da França}\} = \{\text{Paris}\}$$

b) São conjuntos vazios:

$$C = \text{conjunto das cidades de Goiás banhadas pelo oceano Atlântico} = \varnothing$$

$$D = \{x \mid x \neq x\} = \varnothing$$

- Há conjuntos cujos elementos são conjuntos, como, por exemplo:

$$F = \{\varnothing, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Assim, temos: $\varnothing \in F$; $\{a\} \in F$; $\{c\} \in F$; $\{a, b\} \in F$; $\{a, c\} \in F$ e $\{a, b, c\} \in F$.

Observe que $a \notin F$ e $c \notin F$, pois **a** e **c** não são elementos do conjunto **F**.

Logo, $a \neq \{a\}$ e $c \neq \{c\}$.

Não, pois apesar de ambos serem unitários, temos: $a \in \{a\}$ e $a \notin \{\{a\}\}$; $\{a\} \in \{\{a\}\}$ e $\{a\} \notin \{a\}$.

PENSE NISTO:

Os conjuntos $\{a\}$ e $\{\{a\}\}$ são iguais?

EXERCÍCIOS

1 Indique se cada um dos elementos -4; $\frac{1}{3}$; 3 e 0,25 pertence ou não a cada um destes conjuntos:

$A = \{x \mid x \text{ é um número inteiro}\}$

$B = \{x \mid x < 1\}$

$C = \{x \mid 15x - 5 = 0\}$

$D = \left\{x \;\middle|\; -2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

2 Considerando que $F = \{x \mid x \text{ é estado do Sudeste brasileiro}\}$ e $G = \{x \mid x \text{ é capital de um país sul-americano}\}$, quais das sentenças seguintes são verdadeiras?

a) Rio de Janeiro $\in$ F

b) México $\in$ G

c) Lima $\notin$ G

d) Montevidéu $\in$ G

e) Espírito Santo $\notin$ F

f) São Paulo $\in$ F

3 Em cada caso, reescreva o conjunto dado enumerando seus elementos:

$A = \{x \mid x \text{ é letra da palavra “beterraba”}\}$

$B = \{x \mid x \text{ é nome de um estado brasileiro cuja letra inicial é p}\}$

$C = \left\{x \;\middle|\; x = \frac{a}{b}, \text{ em que a e b são números inteiros, } a \neq b,\ 1 < a < 4 \text{ e } 1 < b < 4\right\}$

4 Dado $H = \{-1, 0, 2, 4, 9\}$, reescreva cada um dos conjuntos seguintes enumerando seus elementos.

$A = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 1\}$

$B = \left\{x \;\middle|\; x \in H \text{ e } \frac{2x - 1}{3} = 1\right\}$

$C = \{x \mid x \in H \text{ e x é um quadrado perfeito}\}$

$D = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 0\}$

$E = \{x \mid x \in H \text{ e } 3x + 1 = 10\}$

5 Classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das sentenças seguintes:

a) $0 \in \varnothing$

b) $\{a, b\} \in \{a, b, c, d\}$

c) $\{x \mid 2x + 9 = 13\} = \{2\}$

d) $a \in \{a, \{a\}\}$

e) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geqslant 0\} = \varnothing$

f) $\varnothing \in \{\varnothing, \{a\}\}$

6 Em cada caso, identifique os conjuntos unitários e os vazios.

$A = \{x \mid x = 1 \text{ e } x = 3\}$

$B = \{x \mid x \text{ é um número primo positivo e par}\}$

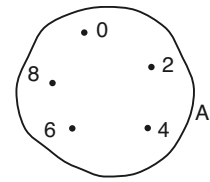
$C = \left\{x \;\middle|\; 0 < x < 5 \text{ e } \frac{3x + 5}{2} = 4\right\}$

$D = \{x \mid x \text{ é capital da Bahia}\}$

$E = \{x \mid x \text{ é um mês cuja letra inicial do nome é p}\}$

$F = \left\{x \;\middle|\; \frac{2}{x} = 0\right\}$

OBSERVAÇÃO

John Venn (1834-1923), matemático e lógico inglês, usou uma região plana limitada por uma linha fechada e não entrelaçada para representar, em seu interior, os elementos de um conjunto. Essa representação é conhecida como **diagrama de Venn**.
Assim, por exemplo, temos a figura ao lado, que mostra uma representação do conjunto A = {0, 2, 4, 6, 8} por meio de um diagrama de Venn.

Subconjuntos – relação de inclusão

Consideremos os conjuntos A = {x | x é letra da palavra "ralar"} e B = {x | x é letra da palavra "algazarra"}; ou seja:

$$A = \{r, a, l\} \text{ e } B = \{a, l, g, z, r\}$$

Note que todo elemento de **A** é também elemento de **B**. Nesse caso, dizemos que **A** é um **subconjunto** ou uma **parte** de **B**, o que é indicado por:

A ⊂ B (lê-se: **A** está contido em **B**, ou **A** é um subconjunto de **B**, ou **A** é uma parte de **B**),

ou, ainda:

B ⊃ A (lê-se: **B** contém **A**)

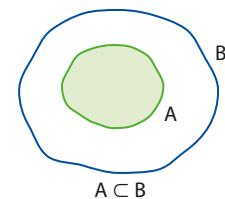
De modo geral, temos:

A ⊂ B se todo elemento de **A** também é elemento de **B**.

OBSERVAÇÕES

- O símbolo ⊂ é chamado **sinal de inclusão** e estabelece uma relação entre dois conjuntos. A relação de inclusão entre dois conjuntos, **A** e **B**, pode ser ilustrada por meio de um diagrama de Venn, como na figura ao lado.
- Os símbolos ⊄ e ⊅ são as negações de ⊂ e ⊃, respectivamente.
  Assim sendo, temos:

A ⊄ B se pelo menos um elemento de **A** não pertence a **B**.

A ⊂ B

Propriedades da relação de inclusão

Quaisquer que sejam os conjuntos **A**, **B** e **C**, temos:

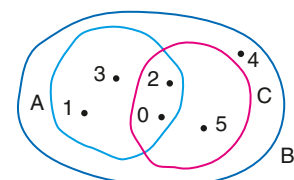
- ∅ ⊂ A
- **Reflexiva:** A ⊂ A.
- **Transitiva:** Se A ⊂ B e B ⊂ C, então A ⊂ C.
- **Antissimétrica:** Se A ⊂ B e B ⊂ A, então A = B.

Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 1

Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3}, B = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e C = {0, 2, 5}, temos:

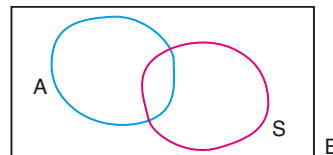
a)
- A ⊂ B, pois todo elemento de **A** pertence a **B**;
- C ⊄ A, pois 5 ∈ C e 5 ∉ A;
- B ⊃ C, pois todo elemento de **C** pertence a **B**;
- B ⊄ A, pois 4 ∈ B e 4 ∉ A, e também 5 ∈ B e 5 ∉ A.

b) Os conjuntos **A**, **B** e **C** podem ser representados pelo diagrama de Venn ao lado.

EXEMPLO 2

Sejam **B** o conjunto de todos os brasileiros, **A** o conjunto dos brasileiros que dirigem automóveis e **S** o conjunto das pessoas que nasceram no Sul do Brasil.

Como mostra o diagrama ao lado, **S** e **A** são partes de **B**, ou seja, S ⊂ B e A ⊂ B.

Note que:

- S ⊄ A, porque existem brasileiros que nasceram no Sul e não dirigem automóveis;
- A ⊄ S, porque existem brasileiros que dirigem automóveis e não nasceram no Sul do país;
- S ⊂ B e A ⊂ B, porque tanto os elementos de **S** quanto os de **A** são brasileiros.

EXEMPLO 3

Dados os conjuntos F = ∅, G = {a}, H = {a, b} e J = {a, b, c}:

- o único subconjunto de **F** é o conjunto ∅;
- são subconjuntos de **G** os conjuntos ∅ e {a};
- são subconjuntos de **H** os conjuntos ∅, {a}, {b} e {a, b};
- são subconjuntos de **J** os conjuntos ∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c} e {a, b, c}.

Observe que:

- **F** tem 0 elemento e 1 subconjunto;
- **G** tem 1 elemento e 2 subconjuntos;
- **H** tem 2 elementos e 4 subconjuntos;
- **J** tem 3 elementos e 8 subconjuntos.

Por extensão do exemplo 3, espera-se que o estudante conclua que o número de subconjuntos de um dado conjunto (**X**) é sempre igual a uma potência de 2 cujo expoente é igual ao número de elementos de **X**. Assim sendo, se **X** tem **n** elementos, o número de subconjuntos de **X** é 2^n.

PENSE NISTO:

Se um conjunto **X** tem **n** elementos, quantos são os seus subconjuntos?

OBSERVAÇÃO

Dado um conjunto **A**, podemos formar um conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de **A**. Esse conjunto é chamado **conjunto das partes de A** e é indicado por P(A).

Assim, por exemplo, se A = {1, 2, 3}, então os seus subconjuntos são ∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3} e {1, 2, 3}. Logo, o conjunto das partes de **A** é:

P(A) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

EXERCÍCIOS

7 Sendo M = {0, 3, 5}, classifique as sentenças seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

a) 5 ∈ M
b) 3 ⊂ M
c) ∅ ∈ M
d) 0 ∈ M
e) ∅ ⊂ M
f) 0 = ∅
g) 0 ∈ ∅
h) 0 ⊂ M

8 Responda:

a) Use um diagrama de Venn para representar os conjuntos **A** e **B**, tais que **A** é o conjunto dos países da América do Sul e **B** é o conjunto dos países do continente americano.

b) Reproduza o diagrama obtido no item anterior e nele destaque o conjunto dos países do continente americano que não se localizam na América do Sul.

9 Se **A**, **B**, **C** e **D** são conjuntos não vazios, para cada uma das situações seguintes faça um diagrama de Venn que as represente.

a) D ⊂ A ⊂ C ⊂ B

b) D ⊂ A ⊂ B, C ⊂ B e C ⊄ A

10 Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classifique em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as sentenças abaixo:

a) $B \subset D$ **c)** $A \not\subset C$ **e)** $C \not\supset B$

b) $A \subset B$ **d)** $D \supset A$ **f)** $C = D$

11 São dados os conjuntos: $A = \{x \mid x$ é um número ímpar positivo$\}$ e $B = \{y \mid y$ é um número inteiro e $0 < y \leqslant 4\}$.

Determine o conjunto dos elementos **z**, tais que $z \in B$ e $z \notin A$.

12 Dado o conjunto $A = \{a, b, c\}$, em quais dos itens seguintes as sentenças são verdadeiras?

a) $c \notin A$ **d)** $\{a, b\} \in A$

b) $\{c\} \in A$ **e)** $\{b\} \subset A$

c) $\{a, c\} \subset A$ **f)** $\{a, b, c\} \subset A$

13 Dados os conjuntos $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $Z = \{0, 1, 2\}$:

a) determine todos os subconjuntos de **X**, cada qual com exatamente três elementos;

b) dê três exemplos de subconjuntos de **Y**, cada qual com apenas quatro elementos;

c) determine o conjunto P(Z).

14 Considere as sentenças seguintes:

I. $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$

II. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$

III. $\varnothing \in \{\varnothing\}$

IV. $\varnothing \subset \varnothing$

Quais dessas sentenças são verdadeiras?

15 Dado o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3\}$, classifique em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) cada uma das seguintes afirmações sobre **U**:

I. $\varnothing \in U$

II. $3 \in U$ e $U \supset \{3\}$

III. Existem 4 subconjuntos de **U** que são unitários.

IV. O conjunto P(U) tem 8 elementos.

Interseção e reunião

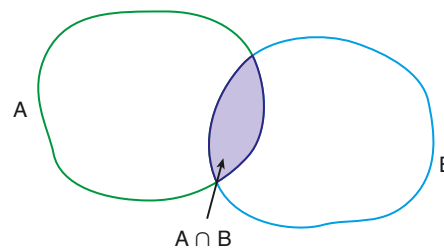
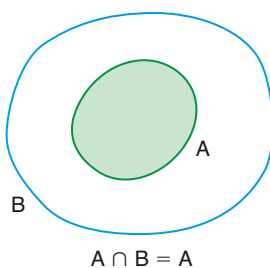
A partir de dois conjuntos **A** e **B** podemos construir novos conjuntos cujos elementos devem obedecer a condições preestabelecidas.

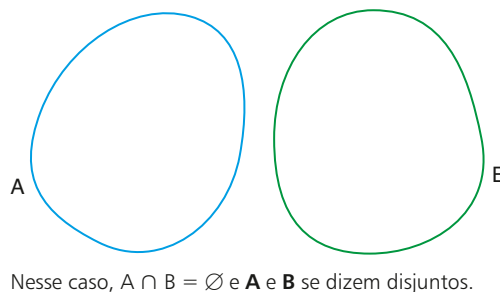
Por exemplo, dados os conjuntos **A** e **B**, podemos determinar um conjunto cujos elementos pertencem simultaneamente a **A** e a **B**. Esse conjunto é chamado **interseção** de **A** e **B** e indicado por $A \cap B$, que se lê "**A** interseção **B**" ou, simplesmente, "**A** inter **B**". Assim, define-se:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Há dois casos particulares:

- $A \subset B$

$A \cap B = A$

- **A** e **B** não têm elementos comuns.

Nesse caso, $A \cap B = \varnothing$ e **A** e **B** se dizem disjuntos.

OBSERVAÇÃO

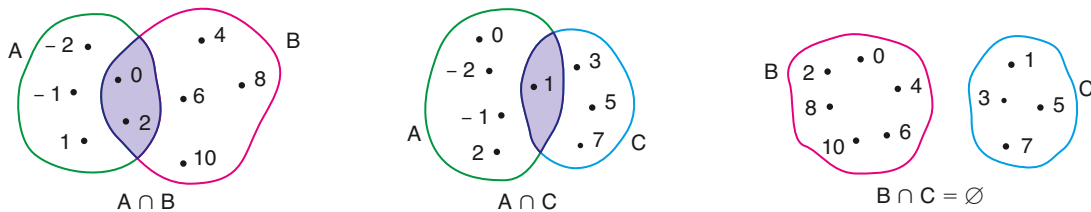
O conectivo **e**, que na definição é colocado entre as duas sentenças ($x \in A$ e $x \in B$), indica que as condições que ambas apresentam devem ser obedecidas. Ele pode ser substituído pelo símbolo $\wedge$.

Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 4

Dados os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $C = \{1, 3, 5, 7\}$, temos:

- $A \cap B = \{0, 2\}$
- $A \cap C = \{1\}$
- $B \cap C = \varnothing$ (Note que **B** e **C** são conjuntos disjuntos.)

Os diagramas de Venn que representam os conjuntos $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são:

EXEMPLO 5

De modo geral, indica-se por $n(A)$ o número de elementos de um conjunto **A**. Assim, por exemplo, se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $D = \{2, 3, 4\}$, então:

- como $A \cap B = \varnothing$, ou seja, **A** e **B** são disjuntos, tem-se $n(A \cap B) = 0$;
- como $A \cap D = \{2\}$, tem-se $n(A \cap D) = 1$.

Lembrando que dentro de um conjunto não precisamos repetir elementos, dizer que $n(A) = x$ significa dizer que o conjunto **A** possui **x** elementos distintos entre si.

EXEMPLO 6

Sendo **F** o conjunto das pessoas que gostam de suco de laranja e **G** o conjunto das pessoas que gostam de suco de uva, podemos considerar que **F** e **G** são subconjuntos de um mesmo conjunto **U**, ou seja, todos os elementos de **F** e **G** pertencem a **U**.

Esse conjunto **U** é chamado **conjunto universo**.

Assim, no caso dos conjuntos **F** e **G** considerados, **U** poderia ser, entre outros, o conjunto das pessoas que moram no estado do Rio de Janeiro (fluminenses). Então, temos:

$$F = \{x \in U \mid x \text{ gosta de suco de laranja}\} \text{ e } G = \{x \in U \mid x \text{ gosta de suco de uva}\}$$

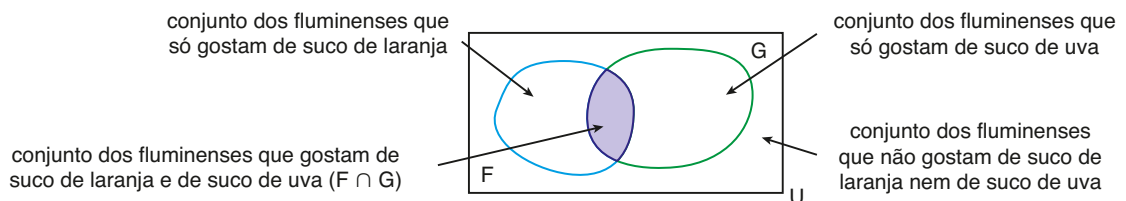
Uma interpretação do diagrama representativo dos conjuntos considerados é:

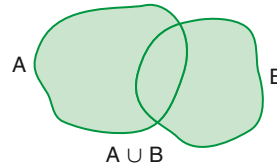
conjunto dos fluminenses que só gostam de suco de laranja

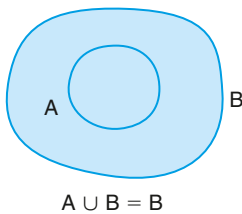
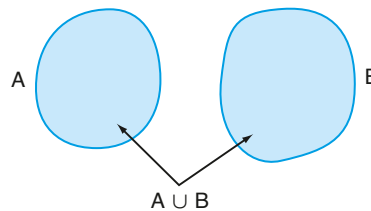
conjunto dos fluminenses que só gostam de suco de uva

conjunto dos fluminenses que gostam de suco de laranja e de suco de uva ($F \cap G$)

conjunto dos fluminenses que não gostam de suco de laranja nem de suco de uva

F G U

A partir de dois conjuntos, **A** e **B**, também se pode obter um novo conjunto cujos elementos pertencem a pelo menos um dos conjuntos dados, ou seja, ou pertencem somente a **A**, ou somente a **B**, ou a ambos ($A \cap B$). O conjunto assim obtido é chamado **reunião** (ou **união**) de **A** e **B** e indicado por $A \cup B$, que se lê "**A** reunião **B**" ou "**A** união **B**". Assim, define-se:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Há dois casos particulares:

- $A \subset B$

- $A \cap B = \varnothing$ (**A** e **B** disjuntos)

Veja o exemplo a seguir.

EXEMPLO 7

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $D = \{3, 4, 6, 8\}$, temos:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$
- $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = C$
- $B \cup D = \{6, 7, 8, 3, 4\}$
- $A \cup (C \cup D) = A \cup \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

OBSERVAÇÕES

- O conectivo **ou**, que na definição é colocado entre as duas sentenças ($x \in A$ ou $x \in B$), indica que pelo menos uma delas deve ser obedecida. Ele pode ser substituído pelo símbolo $\vee$.
- Quaisquer que sejam os conjuntos **A** e **B**, temos: $A \subset (A \cup B)$ e $B \subset (A \cup B)$.
- Se $A \cup B = \varnothing$, então $A = \varnothing$ e $B = \varnothing$, e reciprocamente, se $A = \varnothing$ e $B = \varnothing$, então $A \cup B = \varnothing$.
- Pelo diagrama ao lado, vê-se que:

  $A = X \cup (A \cap B)$ e $A \cup B = X \cup B$

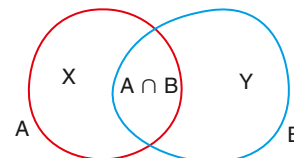
  Como $X \cap (A \cap B) = \varnothing$, então temos:

  $n(A) = n(X) + n(A \cap B)$ (1)

  Como $X \cap B = \varnothing$, então temos:

  $n(A \cup B) = n(X) + n(B)$ (2)

  Assim, de (1) temos: $n(X) = n(A) - n(A \cap B)$, que, substituído em (2), resulta em:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

  Em particular, se **A** e **B** são disjuntos, ou seja, se $A \cap B = \varnothing$, temos:

  $n(A \cap B) = 0$ e, nesse caso, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Propriedades da interseção e da reunião

Vamos admitir, sem demonstração, a validade de cada uma das seguintes propriedades.
Quaisquer que sejam os conjuntos **A**, **B** e **C**:

- **Idempotente:** $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$
- **Comutativa:** $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$
- **Associativa:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ e $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **Distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 São dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, f\}$ e $C = \{a, f, g\}$. Determine um conjunto **X**, sabendo que:

- **X** tem três elementos e $X \subset \{a, b, c, d, f, g\}$;
- $A \cap X = \{c\}$, $B \cap X = \{c, f\}$ e $C \cap X = \{f, g\}$.

Solução:

Se $A \cap X = \{c\}$, temos: $a \notin X$, $b \notin X$ e $c \in X$ (1)

Se $B \cap X = \{c, f\}$, temos: $d \notin X$, $c \in X$ e $f \in X$ (2)

Se $C \cap X = \{f, g\}$, temos: $a \notin X$, $f \in X$ e $g \in X$ (3)

Como **X** tem três elementos e $X \subset \{a, b, c, d, f, g\}$, então, de (1), (2) e (3), conclui-se que:

$$X = \{c, f, g\}$$

2 Seja D(x) o conjunto dos divisores positivos do número inteiro **x**. Determine $D(18) \cap D(24)$.

Solução:

Como $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ e $D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, então: $D(18) \cap D(24) = \{1, 2, 3, 6\}$.

Note que, como o maior elemento do conjunto $D(18) \cap D(24)$ é o número 6, então dizemos que 6 é o **máximo divisor comum** de 18 e 24 (indica-se: mdc(18, 24) = 6).

PENSE NISTO:

Se **x** e **y** são números inteiros, os conjuntos D(x) e D(y) podem ser disjuntos?

Não, pois, se **x** e **y** são números inteiros, então ambos admitem, pelo menos, o divisor 1, ou seja, $D(x) \cap D(y) \neq \varnothing$.

3 Dos 650 alunos matriculados em uma escola de idiomas, sabe-se que 420 cursam inglês, 134 cursam espanhol e 150 não cursam inglês nem espanhol. Determine o número de alunos que:

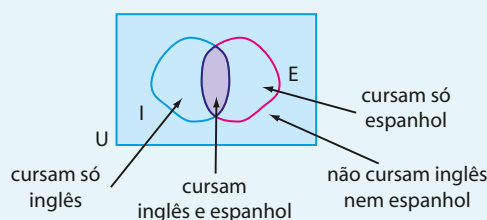
a) cursam inglês ou espanhol;
b) cursam inglês e espanhol;
c) cursam espanhol e não cursam inglês;
d) cursam apenas inglês ou apenas espanhol.

PIXTAL/KEYSTONE BRASIL

Solução:

Considerando **U** o conjunto dos alunos matriculados na escola, I o conjunto dos alunos que cursam inglês e **E** o conjunto dos alunos que cursam espanhol, temos:

$n(U) = 650$, $n(I) = 420$ e $n(E) = 134$.

Para auxiliar a resolução, vamos observar o diagrama de Venn representado abaixo.

a) Calculando $n(I \cup E)$:
$n(I \cup E) = n(U) - 150 = 650 - 150 = 500$

b) Calculando $n(I \cap E)$:
Como $n(I \cup E) = n(I) + n(E) - n(I \cap E)$, então:
$n(I \cap E) = n(I) + n(E) - n(I \cup E) =$
$= 420 + 134 - 500 = 54$

c) Dos 134 alunos que cursam espanhol, 54 também cursam inglês. Como $134 - 54 = 80$, então 80 alunos cursam espanhol e não cursam inglês.

d) Dos 420 alunos que cursam inglês, 54 também cursam espanhol. Como $420 - 54 = 366$, então 366 alunos cursam apenas inglês. Vimos no item c que 80 alunos cursam apenas espanhol, assim, o número de alunos procurado é $366 + 80 = 446$.

EXERCÍCIOS

16 Dados os conjuntos $A = \{p, q, r\}$, $B = \{r, s\}$ e $C = \{p, s, t\}$, determine os conjuntos:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $B \cup C$
d) $A \cap B$
e) $A \cap C$
f) $B \cap C$

17 Sendo **A**, **B** e **C** os conjuntos dados no exercício anterior, determine:

a) $(A \cap B) \cup C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
d) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

18 Dado $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, sejam $A = \{x \in U \mid x < 0\}$, $B = \{x \in U \mid -3 < x < 2\}$ e $C = \{x \in U \mid x \geqslant -1\}$, determine:

a) $A \cap B \cap C$
b) $A \cup B \cup C$
c) $C \cup (B \cap A)$
d) $(B \cup A) \cap C$

19 Dos 36 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de certa escola, sabe-se que 16 jogam futebol, 12 jogam voleibol e 5 jogam futebol e voleibol. Quantos alunos dessa classe não jogam futebol ou voleibol?

20 Sobre os 48 funcionários de certo escritório, sabe-se que: 30 têm automóvel, $\frac{1}{3}$ são do sexo feminino e $\frac{3}{4}$ do número de homens têm automóvel. Com base nessas informações, responda:

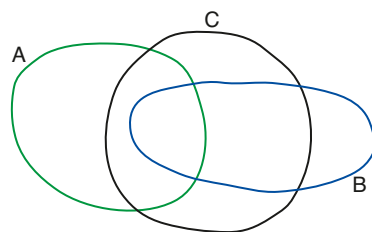
a) Quantos funcionários são do sexo feminino e têm automóvel?
b) Quantos funcionários são homens ou têm automóvel?

21 Se **A**, **B** e **C** são conjuntos quaisquer, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**):

a) $A \cup \varnothing = A$
b) $B \cap \varnothing = \varnothing$
c) $(A \cap B) \subset B$
d) $B \supset (A \cup B)$
e) $(B \cup C) \subset B$
f) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$
g) $\varnothing \not\subset (A \cap B)$
h) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$

22 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$, determine o conjunto **X** sabendo que $A \cup X = \{1, 2, 3\}$, $B \cup X = \{3, 4\}$ e $C \cup X = A \cup B$.

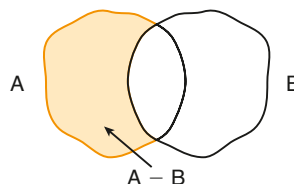
23 Determine o número de conjuntos **X** que satisfazem a relação $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$.

24 Na figura abaixo tem-se a representação dos conjuntos **A**, **B** e **C**, não vazios.

Relativamente a esses conjuntos, quais das afirmações seguintes são verdadeiras?

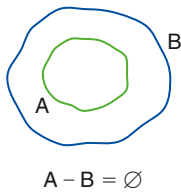
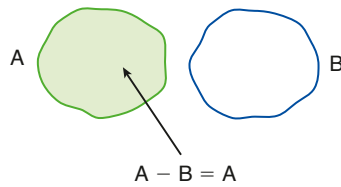
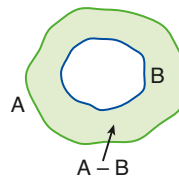
a) $(B \cup C) \subset A$
b) $(B \cap C) \subset (A \cup C)$
c) $(A \cap B) \subset (B \cap C)$
d) $(A \cap B) \cup B = \varnothing$

Diferença

Dados os conjuntos **A** e **B**, podemos determinar um conjunto cujos elementos pertencem ao conjunto **A** e não pertencem ao conjunto **B**. Esse conjunto é chamado **diferença entre A e B** e indicado por $A - B$, que se lê "**A** menos **B**". Assim, define-se:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Há três casos particulares:

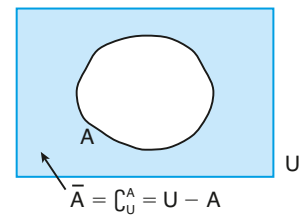
- $A \subset B$
- **A** e **B** disjuntos
- $B \subset A$

A
B
A – B

OBSERVAÇÕES

- No terceiro caso, em que $B \subset A$, o conjunto $A - B$ é chamado **complementar de B em relação a A**.

  Indica-se: $\complement_A^B = A - B$, se $B \subset A$.

- Sendo **A** um subconjunto de um conjunto universo **U**, então $\complement_U^A = U - A$ pode ser representado pelo símbolo $\overline{A}$, que se lê "**A** barra". Assim, $\overline{A} = \complement_U^A = U - A$.

  Note que para todo elemento **x** do conjunto universo **U**, se $x \in \overline{A}$, então $x \notin A$ e, por contraposição, se $x \in A$, então $x \notin \overline{A}$.

Veja o exemplo a seguir:

EXEMPLO 8

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 3\}$ e $D = \{0, 7, 8\}$, temos:

- $A - B = \{1, 2\}$
- $A - C = \{1, 4, 5\}$ (nesse caso, $A - C = \complement_A^C$, pois $C \subset A$).
- $B - A = \{6\}$
- $C - D = \{2, 3\}$, pois, como $C \cap D = \varnothing$, $C - D = C$.
- $C - A = \varnothing$, pois $C \subset A$.
- $D - D = \varnothing$
- $\complement_B^C$: não se define, pois $C \not\subset B$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

4 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, em cada caso vamos determinar os elementos do conjunto indicado.

a) $\complement_U^{(A \cap B)}$ **b)** $\complement_U^A \cup \complement_U^B$

Solução:

a) Como $A \cap B = \{3, 4\}$, então $\complement_U^{(A \cap B)} = U - (A \cap B) = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) Como $\complement_U^A = U - A = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $\complement_U^B = U - B = \{0, 1, 2, 8, 9\}$, então:

$$\complement_U^A \cup \complement_U^B = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Os resultados encontrados nos itens *a* e *b* ilustram a validade da seguinte propriedade:

$$\complement_U^{(A \cap B)} = \complement_U^A \cup \complement_U^B$$

EXERCÍCIOS

25 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c, d, e\}$, $C = \{c, d\}$ e $D = \{a, d, e\}$, classifique cada uma das sentenças seguintes em verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).

a) $A - B = \{b\}$
b) $B - C = \{a, e\}$
c) $D - B = \{c\}$
d) $\complement_A^C = \varnothing$
e) $\complement_B^{\varnothing} = \{a, c, d, e\}$
f) $\complement_B^D = \{c\}$
g) $(A \cap B) - D = \{a, d, e\}$
h) $B - (A \cup C) = \{e\}$
i) $(\complement_B^C) \cup (\complement_B^D) = \{a, c, e\}$

26 Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 8, 12, 14\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $C = \{1, 2, 3, 18, 20\}$, determine:

a) $A - C$
b) $B - C$
c) $(C - A) \cap (B - C)$
d) $(A - B) \cap (C - B)$

27 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, determine o número de subconjuntos de $(A - B) \cap C$.

28 Desenhe um diagrama de Venn para três conjuntos **X**, **Y** e **Z**, não vazios, satisfazendo as condições: $Z \subset Y$, $X \not\subset Y$, $X \cap Y \neq \varnothing$ e $Z - X = Z$.

29 Considerando o conjunto universo $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e dados $A = \{x \in U \mid x \leqslant 3\}$, $B = \{x \in U \mid x \text{ é ímpar}\}$ e $C = \{x \in U \mid -2 \leqslant x < 1\}$, determine:

a) $A \cap B$
b) $A \cup C$
c) $A - C$
d) $C - B$
e) $\complement_A^C$
f) $\complement_B^A$
g) $\overline{B}$
h) $(A \cap C) - B$
i) $C \cup (A - B)$
j) $(A - B) \cup (B - A)$
k) $\overline{C} \cap \overline{A}$
l) $\overline{B} \cap (C - B)$

30 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 4, 5, 7\}$, obtenha o conjunto **X** tal que $X \subset A$ e $A - X = B \cap C$.

31 Sejam **A** e **B** subconjuntos de um conjunto universo **U**. Se **U** tem 35 elementos, **A** tem 20 elementos, $A \cap B$ tem 6 elementos e $A \cup B$ tem 28 elementos, determine o número de elementos dos conjuntos.

a) B
b) $A - B$
c) $B - A$
d) $\overline{A}$
e) $\overline{B}$
f) $\overline{A \cap B}$
g) $\overline{A - B}$
h) $\overline{A} \cap \overline{B}$

DESAFIO

(UFU-MG) De uma escola de Uberlândia, partiu uma excursão para Caldas Novas com 40 alunos. Ao chegar a Caldas Novas, 2 alunos adoeceram e não frequentaram as piscinas. Todos os demais alunos frequentaram as piscinas, sendo 20 pela manhã e à tarde, 12 somente pela manhã, 3 somente à noite e 8 pela manhã, à tarde e à noite. Se ninguém frequentou as piscinas somente no período da tarde, quantos alunos frequentaram as piscinas à noite?

a) 16
b) 12
c) 14
d) 18

CAPÍTULO 2

Conjuntos numéricos

Introdução

Denominamos **conjuntos numéricos** os conjuntos cujos elementos são números.

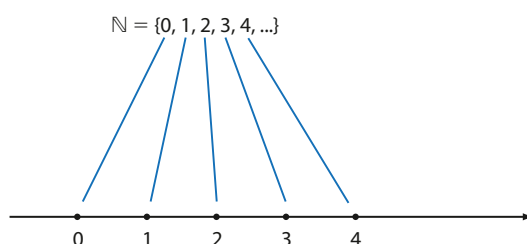
Estudaremos os conjuntos dos números **naturais**, dos **inteiros**, dos **racionais** e dos **irracionais**. Por fim, apresentaremos o conjunto dos números **reais**, presente em grande parte do estudo abordado nesta coleção.

O surgimento do conjunto dos números naturais deveu-se à necessidade do ser humano fazer contagens. Os outros conjuntos numéricos, em geral, surgiram como ampliações daqueles até então conhecidos, por necessidade de serem efetuadas novas operações.

O conjunto $\mathbb{N}$

O conjunto dos **números naturais** é:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$, em que **n** representa o elemento genérico do conjunto.

O conjunto $\mathbb{N}$ possui infinitos elementos e pode ser representado na reta numerada.

O conjunto dos números naturais possui alguns subconjuntos importantes:

- o conjunto dos números naturais não nulos:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\};\ \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$$

Observe que o símbolo ***** (asterisco) à direita do nome do conjunto indica que foi retirado dele o elemento **zero**.

- o conjunto dos números naturais pares:

$$\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...\}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2n$ representa um número par qualquer.

- o conjunto dos números naturais ímpares:

$$\mathbb{N}_i = \{1, 3, 5, 7, ..., 2n + 1, ...\}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

Observe que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $2n + 1$ representa um número ímpar qualquer.

- o conjunto dos números naturais primos:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$$

No conjunto dos números naturais estão definidas duas operações cujos resultados são sempre números naturais: adição e multiplicação. Note que, adicionando-se dois elementos quaisquer de $\mathbb{N}$, a soma pertence a $\mathbb{N}$. Observe também que, multiplicando-se dois elementos quaisquer de $\mathbb{N}$, o produto pertence a $\mathbb{N}$. Em símbolos, temos:

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}, \quad m + n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad m \cdot n \in \mathbb{N}$$

↓ O símbolo $\forall$ significa qualquer.

Essa característica pode ser assim sintetizada:

$\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição e à multiplicação.

Porém, o mesmo raciocínio não vale em relação à subtração. Por exemplo, embora $5 - 2 = 3 \in \mathbb{N}$, não existe um número natural **x** tal que $x = 2 - 5$.

Por esse motivo, é necessária uma ampliação do conjunto $\mathbb{N}$, surgindo daí o conjunto dos números inteiros.

O conjunto $\mathbb{Z}$

O conjunto dos números **inteiros** é:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

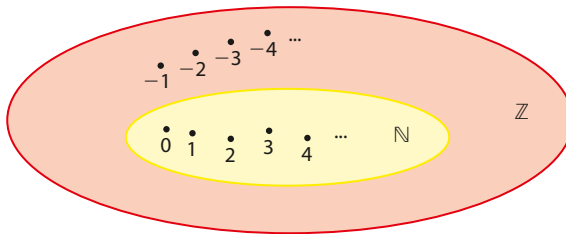
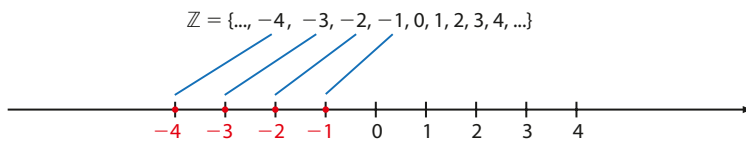
Observe que todo número natural é também um número inteiro, isto é, $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$).

PENSE NISTO:

A proposição

$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{N}$

é verdadeira ou falsa?

Falsa, pois $-2 \in \mathbb{Z}$, mas $-2 \notin \mathbb{N}$, por exemplo. Assim, nem todo número inteiro é natural. Por outro lado, é verdadeira a proposição: $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

A representação geométrica do conjunto dos números inteiros é feita a partir da representação de $\mathbb{N}$ na reta numerada; basta acrescentar os pontos correspondentes aos números negativos:

O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

- o conjunto dos números inteiros não nulos:
  $$\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{Z} - \{0\}$$
- o conjunto dos números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- o conjunto dos números inteiros (estritamente) positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- o conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$
- o conjunto dos números inteiros (estritamente) negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$
- o conjunto dos números inteiros múltiplos de 4: $M(4) = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\}$

OBSERVAÇÃO

Observe que:

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$

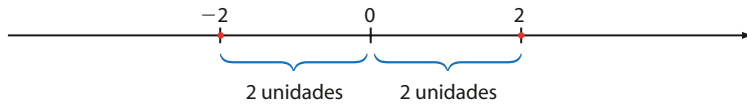
PENSE NISTO:

Como você representa, genericamente, um número inteiro múltiplo de 4? $4 \cdot m$, em que $m \in \mathbb{Z}$.

Números inteiros opostos

Dois números inteiros são ditos **opostos** um do outro quando sua soma é zero. Assim, geometricamente, são representados na reta por pontos que distam igualmente da origem.

Podemos tomar como exemplo o número 2.

O oposto do número 2 é -2, e o oposto de -2 é 2, pois $2 + (-2) =$ $= (-2) + 2 = 0$.

No geral, dizemos que o oposto, ou **simétrico**, de **a** é $-a$, e vice-versa.

Existe algum número inteiro que é igual ao seu oposto?

$x \in \mathbb{Z}$; $x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$. O único inteiro que satisfaz é o número zero.

Módulo de um número inteiro

Se $x \in \mathbb{Z}$, o **módulo** ou **valor absoluto** de **x** (indica-se: $|x|$) é definido pelas seguintes relações:

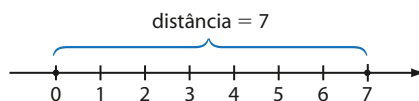
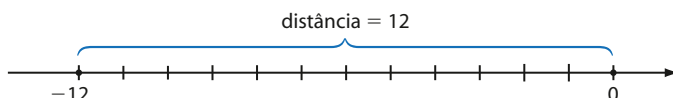
- Se $x \geqslant 0$, o módulo de **x** é igual ao próprio valor de **x**, isto é, $|x| = x$.
- Se $x < 0$, o módulo de **x** é igual ao oposto de **x**, isto é, $|x| = -x$.

Acompanhe os exemplos:

- $|\underbrace{7}_{\text{positivo}}| = 7$
- $|\underbrace{-3}_{\text{negativo}}| = -(-3) = 3$
- $|\underbrace{-12}_{\text{negativo}}| = -(-12) = 12$
- $|0| = 0$
- $|\underbrace{63}_{\text{positivo}}| = 63$

Interpretação geométrica

Na reta numerada dos números inteiros, o módulo de **x** é igual à distância entre **x** e a origem.

- $|7| = 7$

- $|-12| = 12$

É fácil notar que dois números inteiros opostos têm mesmo módulo.

EXEMPLO 1

Tomando os inteiros $a = -3$ e $b = +2$, calculamos:

- $a + b = -3 + (+2) = -3 + 2 = -1$
- $a \cdot b = -3 \cdot (+2) = -3 \cdot 2 = -6$
- $a - b = -3 - (+2) = -3 - 2 = -5$ } opostos
- $b - a = +2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ } opostos
- $-a = -(-3) = 3$
- $-b = -(+2) = -2$
- $|a| = |-3| = 3$
- $|b| = |+2| = |2| = 2$
- $|a - b| = |-3 - 2| = |-5| = 5$
- $|b - a| = |2 - (-3)| = |5| = 5$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leqslant 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 4\}$.

Determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

Solução:

Observemos, inicialmente, que $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Desse modo, temos:

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 4\}$$

$$A \cap B = \{0, 1, 2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 2\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$$

Observe que podemos também escrever:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\};$$

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant x < 3\}$$

EXERCÍCIOS

1 Determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 6\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x \leqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leqslant x < 4\}$

2 Descreva cada conjunto por meio de uma característica comum a todos os seus elementos.

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b) $B = \{0, 1, 2, 8, 9, 10\}$

c) $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

d) $D = \{-3, 3\}$

3 Calcule:

a) $-5 - 3 \cdot (-2)$

b) $|-11|$

c) $|7 - 4| + |4 - 7|$

d) $2 + 5 \cdot (-3) - (-4)$

e) $-11 - 2 \cdot (-3) + 3$

f) $-8 + 3 \cdot [2 - (-1)]$

g) $|2 + 3 \cdot (-2)| - |3 + 2 \cdot (-3)|$

h) $|5 - 10| - |10 - (-5)| - |-5 - (-5)|$

4 Responda:

a) O valor absoluto de um número **x** inteiro é igual a 18. Quais são os possíveis valores de **x**?

b) Quais são os números inteiros cujos módulos são menores que 3?

5 Um conjunto de números naturais tem **x** elementos, todos distintos entre si. Entre estes, sete são pares, três são múltiplos de 3 e apenas um é múltiplo de 6. Qual é o valor de **x**?

6 Sejam $a = |-8|$, $b = -6$ e $c = |5|$. Calcule:

a) $a + b$

b) $b \cdot c$

c) $c - a$

d) $a \cdot b + c$

e) $b - a \cdot c$

f) b^2

g) $|b - c|$

h) $|a - b|$

7 Classifique as afirmações seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):

a) Todo número primo é ímpar.

b) Se dois números inteiros têm o mesmo módulo, então eles são iguais.

c) O quadrado de um número natural não nulo é sempre maior do que o próprio número.

d) O cubo de um número inteiro não nulo é sempre maior que o quadrado desse número.

e) Se $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ e $a > b$, então $a^2 > b^2$.

Professor, no Ensino Básico, em particular no Ensino Médio, são frequentes outros procedimentos de validação em Matemática, além do método dedutivo, como verificações empíricas, medições, validações por meio do raciocínio indutivo etc.
O método dedutivo será visto com mais detalhes no volume 2 desta coleção, na demonstração de alguns teoremas da Geometria.

TROQUE **IDEIAS**

Investigação e argumentação em Matemática

A proposição: "Se **a** e **b** são números inteiros pares quaisquer, então a soma $a + b$ é um número par" é sempre verdadeira?

Para se concluir que ela é sempre verdadeira é suficiente constatar que a proposição é válida para alguns casos particulares?

$8 + 2 = 10$; $(-16) + 48 = 32$; $120 + 122 = 242$; $(-4) + (-8) = -12$; $0 + 6 = 6$ etc.

Do ponto de vista da Matemática, prevalece o método dedutivo, em que uma propriedade matemática só é validada por meio de uma **demonstração**. Na Matemática, uma propriedade (ou um teorema) é uma proposição do tipo "Se **p** então **q**", em que **p** é a **hipótese** e **q** é a **tese**. A demonstração é uma sequência (finita) de passos lógicos que permitem, a partir de **p**, concluir que **q** é verdadeira.

Na proposição inicial, a hipótese é "**a** e **b** são números inteiros pares quaisquer" e a tese é "$a + b$ é um número par".

Acompanhe a demonstração dessa propriedade.

Como **a** é um número inteiro par, podemos escrevê-lo na forma $a = 2 \cdot k$, em que $k \in \mathbb{Z}$.

Analogamente escrevemos $b = 2 \cdot q$, em que $q \in \mathbb{Z}$.

Daí:

$$a + b = 2 \cdot k + 2 \cdot q = 2 \cdot \underbrace{(k + q)}_{\in \mathbb{Z}}$$

Como **k** e **q** são inteiros, a soma $k + q$ é um número inteiro e, desse modo, $a + b$ é um número par.

Nem toda proposição matemática é verdadeira. Veja a seguinte:

"Se **a** é um número inteiro múltiplo de 3, então **a** é múltiplo de 6."

Podemos verificar que a proposição é falsa, pois existem múltiplos de 3 que não são múltiplos de 6, como, por exemplo, 3, 9, 15, 21 etc. Cada um desses valores corresponde a um **contraexemplo**.

- A seguir são apresentadas algumas proposições envolvendo elementos do conjunto dos números inteiros. Decida se elas são verdadeiras ou falsas, exibindo uma demonstração para as verdadeiras e um contraexemplo para as falsas.

a) Se **a** e **b** são números inteiros ímpares, então a soma $a + b$ é um número par.

b) Se **a** é um número inteiro par, então a^2 é um número par.

c) Se **a** é um número inteiro múltiplo de 6, então **a** é múltiplo de 3.

d) Se **a** é um número inteiro divisível por 5, então **a** é divisível por 10.

e) Se **a**, **b** e **c** são números inteiros e consecutivos, então a soma $a + b + c$ é um número inteiro múltiplo de 3.

f) Se **a** e **b** são números inteiros e consecutivos, então $a^2 + b^2$ é um número ímpar.

g) Se **n** é um número natural qualquer, então $n^2 + n + 41$ é um número primo.

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

O conjunto $\mathbb{Q}$

O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações de adição, multiplicação e subtração, mas o mesmo não acontece em relação à divisão. Note que, embora $(-12) : (+4) = -3 \in \mathbb{Z}$, **não existe número inteiro x** para o qual se tenha $x = (+4) : (-12)$. Por esse motivo, fez-se necessária uma ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$, da qual surgiu o conjunto dos números racionais.

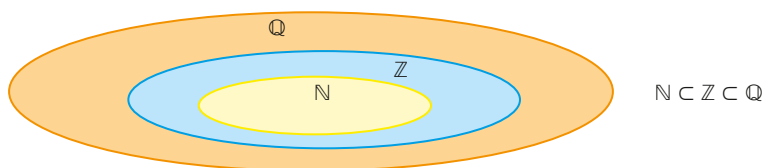
O **conjunto dos números racionais**, identificado por $\mathbb{Q}$, é inicialmente descrito como o conjunto dos quocientes entre dois números inteiros, em que o divisor é diferente de zero. Por exemplo, são números racionais:

$$0,\ \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{2}{5}\ \text{etc}$$

Podemos escrever, de modo mais simplificado:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Dessa forma, podemos definir o conjunto $\mathbb{Q}$ como o conjunto das frações $\frac{p}{q}$; assim, um número é racional quando pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** inteiros e $q \neq 0$.

Se $q = 1$, temos $\frac{p}{q} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Z}$, o que mostra que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$. Assim, podemos construir o diagrama:

No conjunto $\mathbb{Q}$ destacamos os seguintes subconjuntos:

- $\mathbb{Q}^*$: conjunto dos números racionais não nulos;
- $\mathbb{Q}_+$: conjunto dos números racionais não negativos;
- $\mathbb{Q}_+^*$: conjunto dos números racionais positivos;
- $\mathbb{Q}_-$: conjunto dos números racionais não positivos; e
- $\mathbb{Q}_-^*$: conjunto dos números racionais negativos.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado para as operações de adição, multiplicação e subtração.

Como não se define "divisão por zero", o conjunto $\mathbb{Q}$ não é fechado em relação à divisão. No entanto, o conjunto $\mathbb{Q}^*$ é fechado em relação à divisão.

Representação decimal das frações

Tomemos um número racional $\frac{p}{q}$, tal que **p** não seja múltiplo de **q**. Para escrevê-lo na forma decimal, basta efetuar a divisão do numerador pelo denominador. Nessa divisão podem ocorrer dois casos:

1º) O quociente obtido tem, após a vírgula, uma quantidade finita de algarismos e o resto da divisão é zero. Exemplos:

- $\frac{2}{5} \rightarrow \begin{array}{l|l} 2 & 5 \\ \hline 20 & 0{,}4 \\ 0 & \end{array}$; $\frac{2}{5} = 0{,}4$

- $\frac{1}{8} \rightarrow \begin{array}{l|l} 1 & 8 \\ \hline 10 & 0{,}125 \\ 20 & \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$; $\frac{1}{8} = 0{,}125$

- $\frac{35}{4} \rightarrow \begin{array}{l|l} 35 & 4 \\ \hline 30 & 8{,}75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$; $\frac{35}{4} = 8{,}75$

Quando isso ocorrer, os decimais obtidos são chamados **decimais exatos**.

Observe que acrescentar uma quantidade finita ou infinita de algarismos iguais a zero, à direita do último algarismo diferente de zero, não altera o quociente obtido. Veja, no exemplo, algumas representações possíveis para o número racional $\frac{2}{5}$:

$$\frac{2}{5} = 0{,}4 = 0{,}40 = 0{,}400 = 0{,}400000...$$

Inversamente, a partir do decimal exato 0,4, podemos identificá-lo com a fração $\frac{4}{10}$, que, simplificada, se reduz a $\frac{2}{5}$. Do mesmo modo: $8{,}75 = \frac{875}{100} = \frac{35}{4}$; $1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

2º) O quociente obtido tem, após a vírgula, uma infinidade de algarismos, nem todos iguais a zero, e não é possível obter resto igual a zero na divisão. Exemplos:

- $\frac{2}{3} \rightarrow$

```
2      |3
2 0    0,6666...
  2 0
    2 0
      2
```

$\frac{2}{3} = 0{,}6666... = 0{,}\overline{6}$

- $\frac{167}{66} \rightarrow$

```
1 6 7         |66
  3 5 0       2,53030...
    2 0 0
        2 0
        2 0 0
            2 0
```

$\frac{167}{66} = 2{,}53030... = 2{,}5\overline{30}$

- $\frac{11}{9} \rightarrow$

```
1 1     |9
  2 0   1,222...
    2 0
      2 0
        2
```

$\frac{11}{9} = 1{,}222... = 1{,}\overline{2}$

Observe que, nesses casos, ocorre uma repetição de alguns algarismos. Os números decimais obtidos são chamados decimais periódicos ou **dízimas periódicas**; em cada um deles, os algarismos que se repetem formam a parte periódica, ou período da dízima. Para não escrever repetidamente os algarismos de uma dízima, colocamos um traço horizontal sobre seu primeiro período.

Se uma fração é equivalente a uma dízima periódica, ela é chamada **geratriz** dessa dízima. Nos exemplos anteriores, $\frac{2}{3}$ é a fração geratriz da dízima $0{,}\overline{6}$; $\frac{11}{9}$ é a fração geratriz da dízima $1{,}\overline{2}$ etc.

Para uma fração (irredutível) gerar uma dízima, é necessário que, na decomposição do denominador em fatores primos, haja algum fator diferente de 2 e de 5, por exemplo:

- As frações $\frac{41}{25}$; $\frac{3}{16}$; $\frac{31}{100}$; $-\frac{7}{8}$ etc. não geram dízimas periódicas;
  ($25 = 5^2$; $16 = 2^4$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$; $8 = 2^3$)

- As frações $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{42}$, $-\frac{5}{33}$, $\frac{2}{45}$ etc. geram dízimas periódicas.
  ($6 = 2 \cdot 3$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $33 = 3 \cdot 11$; $45 = 3^2 \cdot 5$)

Representação fracionária das dízimas periódicas

Vamos apresentar alguns exemplos de transformação de dízimas periódicas em frações.

EXEMPLO 2

Seja a dízima $x = 0,\overline{8} = 0,8888...$ (1):
Fazemos $10x = 10 \cdot 0,8888... = 8,888... = 8,\overline{8}$ (2)
Subtraindo membro a membro (1) de (2), temos:

$$10x - x = 8,\overline{8} - 0,\overline{8}$$
$$9x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

EXEMPLO 3

Com a dízima $z = 0,\overline{96}$, fazemos $100z = 96,\overline{96}$ e subtraímos a primeira da segunda equação:

$$100z - z = 96,\overline{96} - 0,\overline{96}$$
$$99z = 96$$
$$z = \frac{96}{99} = \frac{32}{33}$$

EXEMPLO 4

Seja a dízima periódica $t = 2,0454545...$ (1)
Temos:

$$\begin{cases} 10 \cdot t = 20,4545... & (2) \\ 1\,000 \cdot t = 2\,045,4545... & (3) \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (3), obtemos:

$$990t = 2\,025 \Rightarrow t = \frac{2\,025}{990} = \frac{45}{22}$$

PENSE NISTO:

Por que não subtraímos diretamente (1) de (3)?

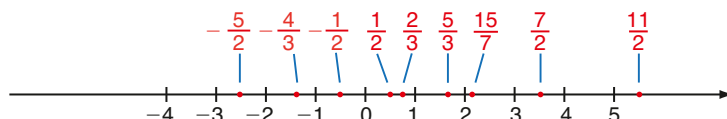
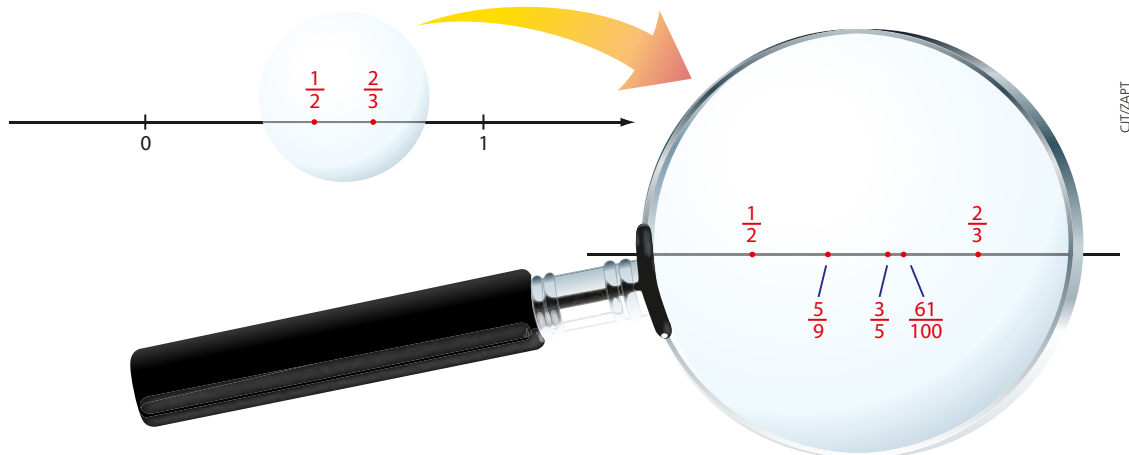
Pois o segundo membro da igualdade não resultaria em um número inteiro.

PENSE NISTO:

As igualdades $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$; $0,\overline{6} = \frac{2}{3}$ e $0,\overline{9} = \frac{3}{3} = 1$ são verdadeiras?

Sim. Todas essas frações geratrizes podem ser obtidas através do método apresentado. É importante que o estudante perceba que 0,999... = 1, mas que, por exemplo, 0,999999 ≠ 1.

Representação geométrica do conjunto dos números racionais

Daremos exemplos de números racionais e os localizaremos na reta numerada, que já contém alguns números inteiros assinalados:

Podemos notar que entre dois números inteiros consecutivos existem infinitos números racionais e, também, que entre dois números racionais quaisquer há infinitos números racionais. Por exemplo, entre os racionais $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$, podemos encontrar os racionais $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$, $\frac{3}{5} = 0{,}6$ e $\frac{61}{100} = 0{,}61$, entre outros.

Um procedimento comum para achar um número racional compreendido entre outros dois números racionais é calcular a **média aritmética** entre eles; no caso, temos:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{3 + 4}{6}}{2} = \frac{\frac{7}{6}}{2} = \frac{7}{12}$$

ou

$$\frac{0{,}5 + 0{,}\overline{6}}{2} = \frac{1{,}1\overline{6}}{2} = 0{,}58\overline{3} = \frac{7}{12}$$

Oposto, módulo e inverso de um número racional

Os conceitos de oposto e módulo, já estudados para os números inteiros, também são válidos para um número racional qualquer.

Assim, por exemplo:

- O oposto de $-\frac{3}{4}$ é $\frac{3}{4}$.
- O oposto de $\frac{17}{11}$ é $-\frac{17}{11}$.
- $\left|-\frac{7}{8}\right| = \left|\frac{7}{8}\right| = \frac{7}{8}$
- $\left|-\frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

Dois números racionais são ditos **inversos** um do outro se o produto deles é igual a 1.

Por exemplo, $\frac{5}{6}$ e $\frac{6}{5}$ são inversos um do outro; 2 é o inverso de $\frac{1}{2}$; e $-\frac{5}{3}$ é o inverso de $-\frac{3}{5}$.

Observe que dois números inversos entre si têm necessariamente mesmo sinal.

PENSE NISTO:

Todo número racional admite inverso?

Não; $x = 0 \in \mathbb{Q}$ e não existe o inverso de 0.

EXERCÍCIOS

8 Classifique cada item como verdadeiro (**V**) ou falso (**F**):

a) $10 \in \mathbb{Q}$

b) $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ e $3 \in \mathbb{Q}$

c) $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ ou $x \in \mathbb{N}$

d) $0{,}851 \in \mathbb{Q}$

e) $-2{,}\overline{3} \notin \mathbb{Q}$

f) $-2 \in \mathbb{Q} - \mathbb{N}$

g) $-\frac{17}{9} \notin \mathbb{Q}$

h) $-5{,}16666... \notin \mathbb{Z}$

i) $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{\ \}$

j) Todo número racional é inteiro.

9 Sabendo que $m = 3 - 2n$ e $n = -\frac{2}{3}$, escreva os seguintes números racionais na forma decimal e na forma de fração:

a) $-m + n$ **b)** $m + n - \frac{13}{4}$

10 Represente na forma fracionária mais simples:

a) 0,05 **c)** −10,2 **e)** 3,3

b) 1,05 **d)** 0,33 **f)** −2,25

11 Represente na forma decimal:

a) $\frac{4}{5} + \frac{8}{5}$ **c)** $\frac{2}{25}$ **e)** $\frac{5}{16} - \frac{16}{5}$

b) $\frac{57}{100}$ **d)** $\frac{3}{125}$

12 Destaque as frações que geram dízimas periódicas:

$\frac{7}{40}, \frac{1}{30}, \frac{2}{25}, \frac{-5}{13}, \frac{-13}{8}, \frac{6}{30}, \frac{4}{11}, \frac{83}{100}, \frac{3}{1000}, \frac{1000}{3}$

13 Obtenha o valor de **y** na forma decimal:

$$y = (2{,}\overline{8} : 1{,}\overline{6}) + \frac{2 - \frac{1}{2}}{-3 \cdot \frac{1}{2}}$$

14 Ache dois números racionais entre $-\frac{17}{5}$ e $-\frac{33}{10}$.

15 Encontre a fração geratriz de cada dízima:

a) $0{,}\overline{4}$ **e)** $1{,}12\overline{3}$

b) $0{,}\overline{14}$ **f)** $0{,}0\overline{23}$

c) $2{,}\overline{7}$ **g)** $1{,}\overline{03}$

d) $1{,}\overline{715}$ **h)** $1{,}\overline{030}$

16 Qual é o número racional cujo inverso é igual ao oposto?

17 Escreva na forma de fração irredutível:

a) $0{,}2 \cdot 1{,}\overline{3} + 0{,}8$

b) $[0{,}6 : (-0{,}25) + 2]^2$

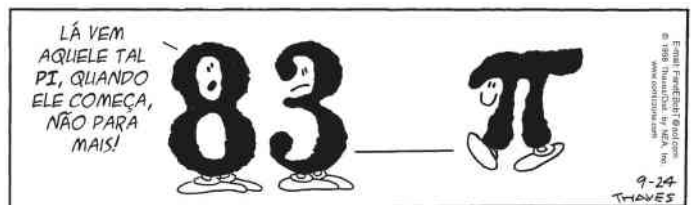
18 Represente na reta numerada os seguintes números racionais:

-1; $-1{,}76$; $-\frac{5}{4}$; $-\frac{9}{5}$; $-1{,}2\overline{3}$; $-\frac{3}{2}$; $-\frac{7}{5}$; e -2

O conjunto $\mathbb{I}$

Assim como existem números decimais que podem ser escritos como frações com numerador e denominador inteiros — os números racionais que acabamos de estudar —, há os que não admitem tal representação. Trata-se dos números decimais que possuem representação infinita não periódica.

Vejamos alguns exemplos:

- O número 0,212112111... não é dízima periódica, pois os algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente.
- O número 1,203040... também não comporta representação fracionária, pois não é dízima periódica.
- Os números $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$, $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ e $\pi = 3{,}141592...$, por não apresentarem representação infinita periódica, também não são números racionais. Lembre-se de que o número π representa o quociente entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida do seu diâmetro.

Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado **número irracional**, e o conjunto desses números é representado por $\mathbb{I}$.

A representação decimal do número $\sqrt{2}$, apresentada anteriormente, não garante, aparentemente, que $\sqrt{2}$ seja irracional. Apenas como exemplo, vamos demonstrar esse fato.

Demonstração:

Usaremos uma demonstração conhecida como redução ao absurdo.

Ela consiste em formular uma hipótese, supostamente verdadeira, e a partir dela, por meio de encadeamento lógico, chegar a uma proposição contrária a essa hipótese. Dessa contradição, deduz-se que a hipótese formulada é falsa.

Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; nessas condições, teríamos $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (1), com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Vamos supor, ainda, que $\frac{p}{q}$ seja fração irredutível, isto é, mdc(p, q) = 1.

Elevando ao quadrado os dois membros de (1), temos: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$ (2).

Como $q \in \mathbb{Z}^*$ e $2q^2$ é par, conclui-se que p^2 é par; logo, **p** é par e $p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Substituindo em (2):

$$(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ é par}$$

Daí, **q** é par.

Então, se **p** e **q** são pares, a fração $\frac{p}{q}$ não é irredutível, o que contraria a hipótese. A contradição veio do fato de termos admitido que $\sqrt{2}$ é um número racional. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser racional.

Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Professor, com relação a essa demonstração, não deixe de ler o item "Sugestões de abordagem, avaliação e tópicos principais" nas Orientações Didáticas.

OBSERVAÇÕES

É comum aproximar números irracionais a números racionais. Por exemplo, o número irracional π pode ser aproximado aos números racionais 3,1; 3,14; $\frac{22}{7}$; 3 etc. Representaremos a aproximação pelo símbolo $\simeq$; assim, por exemplo, escrevemos $\pi \simeq 3{,}14$.

Para o número irracional $\sqrt{2}$ são usuais as seguintes aproximações racionais:

- 1,4 é uma aproximação, por falta, de $\sqrt{2}$, pois $1{,}4^2 = 1{,}96 < 2$;
- 1,41 é uma aproximação, por falta, de $\sqrt{2}$, pois $1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2$;
- 1,42 é uma aproximação, por excesso, de $\sqrt{2}$, pois $1{,}42^2 = 2{,}0164 > 2$.

Observe que $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$ e $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Como $1{,}42 - 1{,}41 = 0{,}01$, dizemos que, ao usarmos o valor 1,41 (ou 1,42) para $\sqrt{2}$, estamos cometendo um erro inferior a 0,01.

Em vários momentos nesta coleção, principalmente em exercícios, você vai se deparar com aproximações racionais para números irracionais, usadas para facilitar alguns cálculos.

Baseado nos cálculos anteriores devemos "testar" valores entre 1,41 e 1,42. Fazendo tentativas com a calculadora, notamos que $1{,}411^2$; $1{,}412^2$; $1{,}413^2$ e $1{,}414^2$ são menores que 2, mas $1{,}415^2$ é maior que 2. Assim $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$: 1,414 é aproximação (por falta) e 1,415 é aproximação (por excesso), com erro inferior a 0,001.

PENSE NISTO:

Com auxílio de uma calculadora, obtenha aproximações racionais para $\sqrt{2}$, por falta e por excesso, com erro inferior a 0,001.

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais

O conjunto formado pela reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais é chamado **conjunto dos números reais** e é representado por $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$: 1; $-5{,}2$; $0{,}\overline{78}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{19}{5}$

$\mathbb{I}$: $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{10}$; $-\sqrt{5}$; π; $\sqrt{15}$

$\mathbb{R}$

Assim, temos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ sendo } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$

Se um número real é racional, então não é irracional, e vice-versa.

Temos: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Observe: $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

Além desses ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$), o conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes:

- o conjunto dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

- o conjunto dos números reais não negativos: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- o conjunto dos números reais positivos: $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- o conjunto dos números reais não positivos: $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
- o conjunto dos números reais negativos: $\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Observe que cada um desses cinco conjuntos contém números racionais e números irracionais.

PENSE NISTO:

A soma de dois números irracionais pode ser racional? E o produto?

Espera-se que o estudante responda que sim. Alguns exemplos:

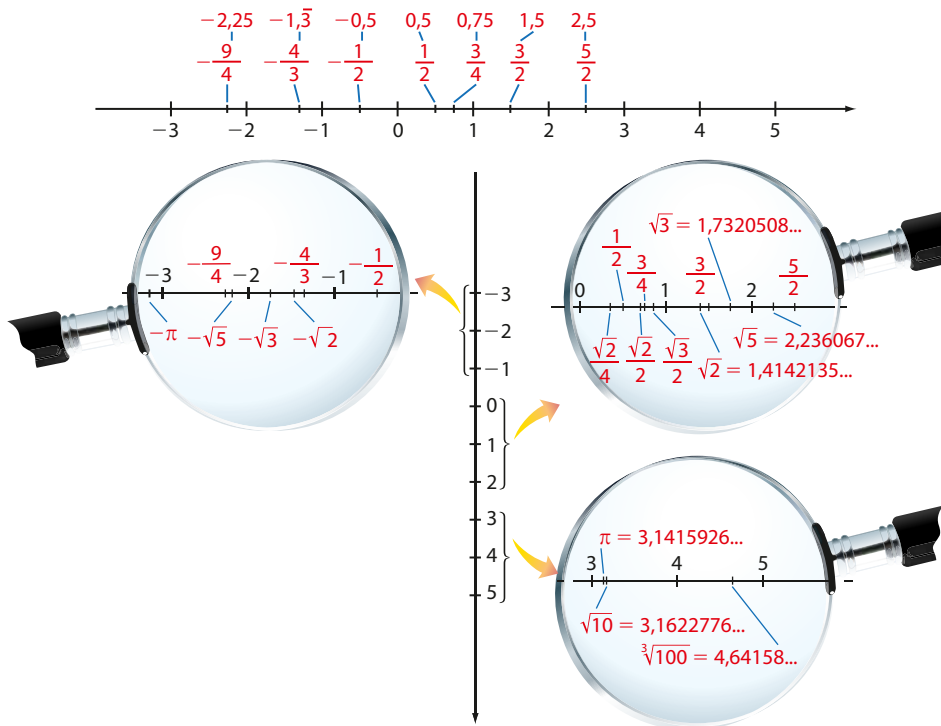
$\underbrace{(1 + \pi)}_{\text{irracional}} + \underbrace{(1 - \pi)}_{\text{irracional}} = \underbrace{2}_{\text{racional}}$

$\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{irracional}} \cdot \underbrace{\sqrt{18}}_{\text{irracional}} = \sqrt{36} = \underbrace{6}_{\text{racional}}$

Representação geométrica do conjunto dos números reais

Retomemos a reta numerada, com alguns números racionais (inteiros ou não) já assinalados. Vamos marcar nela alguns números irracionais:

OBSERVAÇÃO

Os conjuntos numéricos aqui apresentados serão amplamente utilizados nesta obra. Por exemplo, ao resolvermos uma equação, devemos estar atentos ao seu **conjunto universo** (**U**), pois este define os possíveis valores que a incógnita pode assumir. A equação $2x - 1 = 0$, por exemplo, não apresenta solução se $U = \mathbb{Z}$; no entanto, se $U = \mathbb{Q}$ (ou $U = \mathbb{R}$), ela apresenta $x = \frac{1}{2}$ como solução.

Os conceitos de números opostos, números inversos e módulo de um número foram apresentados nos conjuntos pertinentes. Todos se aplicam (e do mesmo modo) aos números reais, de maneira geral.

Por exemplo:

- O oposto de $\sqrt{5}$ é $-\sqrt{5}$, pois $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = 0$.
- $|-\pi| = |\pi| = \pi$
- O inverso de $\sqrt{2}$ é $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

EXERCÍCIOS

19 Represente, na reta numerada, os números reais: $\sqrt{20}$, 4, $\frac{9}{2}$, $\frac{23}{5}$, $\frac{\pi^2}{2}$, 5, $\frac{17}{4}$.
Entre os números acima, quais são irracionais?

20 Classifique cada número real seguinte em racional ou irracional.

a) $\sqrt{50}$
b) $\sqrt{7^2}$
c) $1 + 2\pi$
d) $(\sqrt{3} + 1)^2$
e) $\sqrt{\frac{20}{80}}$
f) $0{,}25 : 0{,}\overline{25}$
g) $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)$
h) $(0{,}\overline{3})^2$
i) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
j) $\sqrt{2} + \sqrt{7}$
k) $\sqrt{2 + 7}$

21 Seja $x \in \mathbb{R}^*$; classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações seguintes.

a) O oposto de **x** é sempre negativo.
b) x^2 é sempre maior que **x**.
c) O dobro de **x** é sempre menor que o triplo de **x**.
d) O inverso de **x** pode ser maior que **x**.
e) $x + 2$ pode ser menor que **x**.

22 Classifique os conjuntos seguintes em vazios ou unitários.

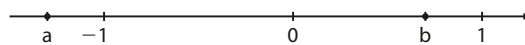
a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^3 = -8\}$
b) $\{x \in \mathbb{R}_- \mid x^4 = 16\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; -\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = -4\}$
f) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^5 = 0\}$
g) $\left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; \frac{1}{x} = 2\right\}$
h) $\left\{x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; x^3 = \frac{1}{8}\right\}$

23 Sendo $x = 1 : 0{,}05$ e $y = 2 : 0{,}2$, classifique os números reais seguintes em racional ou irracional:

$A = \sqrt{\frac{x}{y}}$; $B = \sqrt{x - \frac{x}{y}}$; $C = A \cdot B$; $D = \frac{B}{A}$; e $E = A + B$

24 Usando uma calculadora, obtenha aproximações racionais, por falta e por excesso, do número irracional $\sqrt{3}$, com erro inferior a:

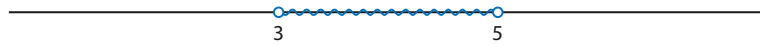
a) 0,01
b) 0,001

25 Os números reais **a** e **b** estão representados na reta seguinte:

Classifique em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as afirmações seguintes.

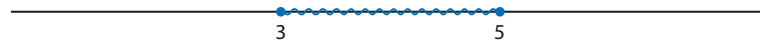
a) O número $\frac{a}{b}$ deve ser representado à esquerda de **a**.
b) O número b^2 deve ser representado à direita de 1.
c) O número $a + b$ deve ser representado entre -1 e 0.
d) O número a^2 deve ser representado entre **b** e 1.
e) O número $b - a$ deve ser representado entre **b** e 1.
f) O número $\frac{1}{b}$ deve ser representado à direita de 1.
g) O número $\frac{1}{a}$ deve ser representado entre **a** e -1.

Intervalos reais

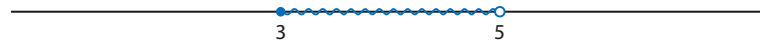
O conjunto dos números reais possui também subconjuntos denominados **intervalos**, nos quais os elementos são determinados por meio de desigualdades. Sejam os números reais **a** e **b**, com $a < b$.

- Intervalo aberto de extremos **a** e **b** é o conjunto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.

$$]3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$

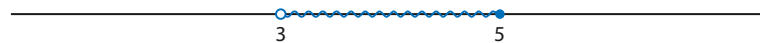
Note as "bolinhas vazias"; elas excluem os valores 3 e 5.

- Intervalo fechado de extremos **a** e **b** é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

$$[3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$$

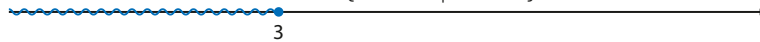
Note as "bolinhas cheias"; elas incluem os valores 3 e 5.

- Intervalo aberto à direita e fechado à esquerda de extremos **a** e **b** é o conjunto $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$.

$$[3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < 5\}$$

- Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos **a** e **b** é o conjunto $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$.

$$]3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 5\}$$

Existem ainda os seguintes intervalos:

- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$

$$]-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$$

Observe que o intervalo determina uma semirreta (à esquerda) com origem em 3.

- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

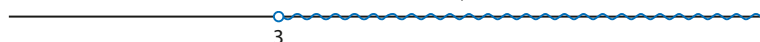
$$]-\infty, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$

- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

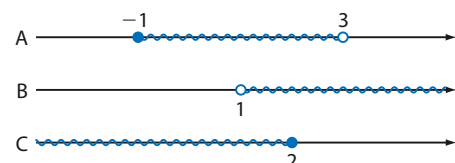
$$[3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$$

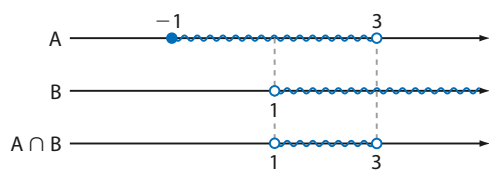
Observe que o intervalo determina uma semirreta (à direita) com origem em 3.

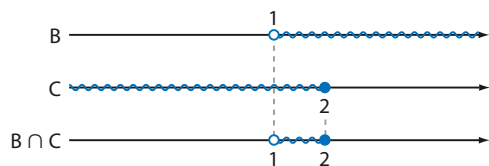
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

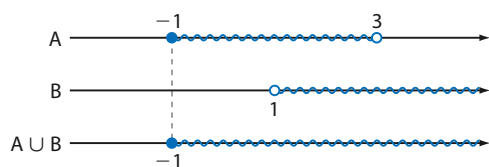
$$]3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$

Na resolução de inequações e de outros problemas em que são necessárias operações como união, interseção etc. entre intervalos, podemos utilizar uma representação gráfica.

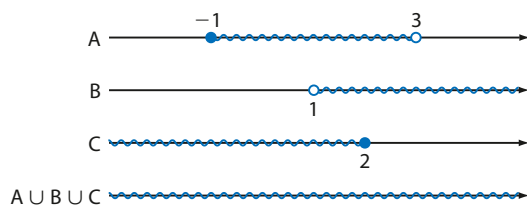
EXEMPLO 5

Dados os intervalos:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ e $C =]-\infty, 2]$, podemos representá-los como se vê ao lado.

Vamos determinar $A \cap B$, $B \cap C$, $A \cup B$ e $A \cup B \cup C$.

- $A \cap B$

$A \cap B =]1, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

- $B \cap C$

$B \cap C =]1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 2\}$

- $A \cup B$

$A \cup B = [-1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

- $A \cup B \cup C$

$A \cup B \cup C =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

26 Represente graficamente cada um dos seguintes intervalos:

a) $]-3, 5]$ **c)** $\left[\frac{7}{5}, +\infty\right[$ **e)** $[-1, 1[$

b) $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$ **d)** $]0, 2[$ **f)** $]\sqrt{2}, 5[$

27 Descreva, por meio de uma propriedade característica, cada um dos conjuntos representados a seguir:

a)

b) (reta numérica: $3\sqrt{2}$)

c) (reta numérica: $-\frac{1}{4}$, 1)

d)

$-\frac{3}{4}$

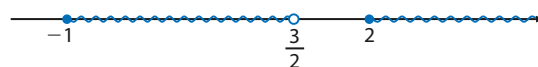
28 Sejam $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$ e $B = \left]-3, \frac{4}{3}\right]$. Determine:

a) $A \cup B$ **c)** $A - B$

b) $A \cap B$ **d)** $B - A$

29 Com relação ao exercício anterior, determine a quantidade de números inteiros pertencentes a $A \cap B$.

30 Represente, por meio de uma operação entre conjuntos, os intervalos abaixo representados:

$\frac{3}{2}$

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

O NÚMERO DE OURO

Um número irracional bem conhecido por suas inúmeras aplicações e curiosidades é o número de ouro, na maioria das vezes representado pela letra grega ϕ (lê-se: fi).

$$\phi = 1{,}61803...$$

Na **escola pitagórica** grega (século V a.C.), era bastante difundida a ideia de dividir um segmento em **média** e **extrema razão**.

ESCOLA PITAGÓRICA

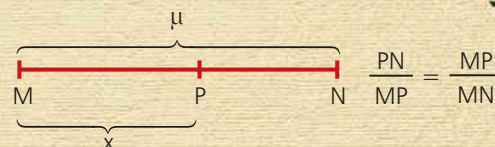
Pitágoras (570 a.C.-497 a.C.) foi um filósofo e matemático grego, fundador da escola pitagórica de pensamento.

A RAZÃO ÁUREA E O NÚMERO ϕ APARECEM NOS LIVROS:

- LIBER ABACI (1202) Fibonacci
- DE DIVINA PROPORTIONE (1509) Luca Pacioli

MÉDIA E EXTREMA RAZÃO (razão áurea)

Para dividir um segmento $\overline{MN}$ de medida $\boldsymbol{\mu}$ em média e extrema razão, é preciso determinar o ponto **P**, tal que:

$$\frac{PN}{MP} = \frac{MP}{MN}$$

Fazendo MP = x, segue a proporção:

$$\frac{\mu - x}{x} = \frac{x}{\mu} \Rightarrow x^2 + x\mu - \mu^2 = 0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau na incógnita **x**:

$$x = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4(-\mu^2)}}{2} \overset{x > 0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\mu\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\mu} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\mu}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \simeq 1{,}618...$$

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Busto de Pitágoras, Museus Capitolinos, Roma.

RETÂNGULO ÁUREO

Um retângulo áureo é aquele em que a razão entre as medidas de suas dimensões é $\phi = 1{,}61803...$

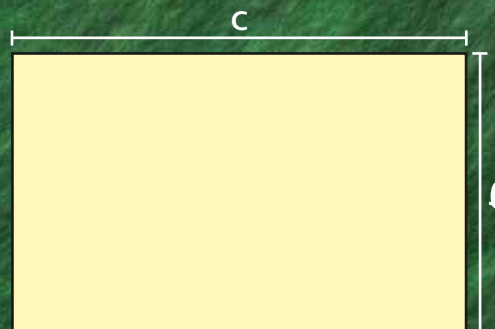
Os gregos usavam essa razão como critério estético. Até hoje é considerada a razão mais harmoniosa.

O retângulo de lados **c** e $\boldsymbol{\ell}$ a seguir tem medidas próximas de um áureo:

$$\frac{c}{\ell} \simeq 1{,}62$$

c

ℓ

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Razão, proporção e porcentagem

Vamos lembrar alguns conceitos fundamentais estudados em anos anteriores.

Razão

Dados dois números reais **a** e **b**, com $b \neq 0$, chama-se **razão de a para b** o quociente $\frac{a}{b}$ que também pode ser indicado por a : b.

O número **a** é chamado **antecedente**, e o número **b** é chamado **consequente**.

Veja os exemplos a seguir:

EXEMPLO 6

Em um grupo de 60 turistas que visitaram o Pão de Açúcar, no Rio de Janeiro, havia 36 brasileiros e 24 estrangeiros.

A razão entre o número de brasileiros e o número de estrangeiros no grupo é $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$, o que significa que, "para cada 3 brasileiros, há 2 estrangeiros".

A razão entre o número de brasileiros e o total de turistas no grupo é de $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$, o que significa que "de cada 5 turistas no grupo, 3 são brasileiros".

EXEMPLO 7

Para um concurso público, candidataram-se 24 500 pessoas para concorrer às 20 vagas disponíveis.

A razão $\frac{24\,500}{20} = \frac{1\,225}{1} = 1\,225$ representa o número de candidatos por vaga (cada vaga está sendo disputada por 1 225 candidatos).

Proporção

Dadas duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, chama-se **proporção** a igualdade entre essas razões:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lê-se: **a** está para **b** assim como **c** está para **d**)

Em uma proporção, os números **a** e **d** são chamados **extremos**, e os números **b** e **c** são chamados **meios**.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ vale a propriedade:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Para demonstrá-la, basta multiplicar os dois membros da igualdade por $b \cdot d \neq 0$:

$$b \cdot d \cdot \frac{a}{b} = b \cdot d \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Dizemos que o produto dos extremos (**a** e **d**) é igual ao produto dos meios (**b** e **c**).

Por exemplo, na proporção $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ temos $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 = 18$; em $\frac{1}{4} = \frac{4}{16}$ temos $1 \cdot 16 = 4 \cdot 4$.

Porcentagem

O quadro seguinte mostra a evolução dos salários, em reais, dos irmãos Marta e Caio nos anos de 2015 e 2016.

	Salário em 2015	Salário em 2016	Aumento salarial
Marta	2 400,00	3 000,00	600,00
Caio	1 900,00	2 470,00	570,00

Vamos calcular, para cada irmão, a razão entre o aumento salarial e o salário em 2015:

$$\text{Marta} \rightarrow \frac{600}{2\,400} \qquad \text{Caio} \rightarrow \frac{570}{1\,900}$$

Quem obteve o maior aumento salarial relativo?

Uma das maneiras de comparar essas razões consiste em expressá-las com o mesmo denominador (100, por exemplo):

$$\text{Marta: } \frac{600}{2\,400} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$\text{Caio: } \frac{570}{1\,900} = \frac{3}{10} = \frac{30}{100} = 30\%$$

Concluímos que Caio obteve maior aumento salarial relativo, tendo como referência o salário de 2015.

As razões de denominador 100 são chamadas **razões centesimais** ou **taxas percentuais** ou, mais informalmente, **porcentagens**.

As porcentagens podem ser expressas de duas maneiras: na forma de fração com denominador 100 ou na forma decimal (dividindo-se o numerador pelo denominador).

Veja alguns exemplos:

- $30\% = \frac{30}{100} = 0,30$
- $4\% = \frac{4}{100} = 0,04$
- $135\% = \frac{135}{100} = 1,35$
- $27,9\% = \frac{27,9}{100} = 0,279$
- $0,5\% = \frac{0,5}{100} = 0,005$
- $18\% = \frac{18}{100} = 0,18$

Sim, pois $100\% = \frac{100}{100} = 1$; $200\% = \frac{200}{100} = 2$; e assim por diante. É importante que o estudante entre em contato também com porcentagens maiores que 100%.

PENSE NISTO:

É verdade que 100% = 1; 200% = 2; 300% = 3 etc.?

EXEMPLO 8

Em um condomínio residencial com 80 apartamentos, verificou-se que em 35% das unidades moram inquilinos. Podemos utilizar diferentes estratégias para calcular em quantas unidades moram inquilinos.

A taxa de 35% significa que, se o condomínio tivesse 100 unidades, 35 delas seriam ocupadas por inquilinos. Assim, podemos escrever a proporção:

$$\frac{35}{100} = \frac{x}{80} \Rightarrow 100 \cdot x = 35 \cdot 80 \Rightarrow x = 28$$

Logo, há 28 unidades em que moram inquilinos.

A determinação de **x** poderia ser simplificada, calculando-se diretamente 35% de 80:

$$\frac{35}{100} \cdot 80 = 0{,}35 \cdot 80 = 28$$

Com uma calculadora simples, podemos fazer rapidamente cálculos de porcentagens de certo valor.

Veja a tecla %.

Para se calcular 35% de 80, procedemos da seguinte forma:

O cálculo mental também é amplamente usado no cálculo de porcentagens. Acompanhe o raciocínio:

Como 10% (décima parte) de 80 vale 8, então 5% (metade de 10%) vale 4 e 30% (triplo de 10%) vale $3 \cdot 8 = 24$.

Assim, 35% de 80 corresponde a $4 + 24 = 28$.

PENSE NISTO:

Como você calcularia, mentalmente, 3% de 80?

10% de 80 → 8
1% de 80 → 0,8
3% de 80 → 2,4

EXEMPLO 9

Dos 240 alunos do 1º ano do Ensino Médio de um colégio, 90 são moças.

A razão entre o número de moças e o número total de alunos é $\frac{90}{240}$.

Para calcular a porcentagem de moças no 1º ano desse colégio, podemos fazer:

$$\frac{90}{240} = \frac{x}{100} \Rightarrow 240 \cdot x = 90 \cdot 100 \Rightarrow x = 37{,}5$$

A porcentagem é 37,5%.

Podemos, também, simplesmente dividir 90 por 240:

$$\frac{90}{240} = 0{,}375 = \frac{375}{1\,000} = \frac{37{,}5}{100} \text{ ou } 37{,}5\%$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

31 Determine a razão (na ordem dada) entre:

a) 16 e 5
b) 40 e 120
c) 32 e 8
d) 0,4 e 0,02
e) $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$
f) 2 km e 400 m
g) 10 min e 2 h
h) 8 kg e 500 g

32 Calcule o valor real de **x** em:

a) $\frac{x}{3} = \frac{3}{2}$
b) $\frac{4x}{5} = \frac{x + 1}{3}$
c) $\frac{2 - x}{x + 5} = \frac{3}{4}$
d) $\frac{x - 1}{x - 2} = \frac{3}{2}$

33 A densidade demográfica de uma região (cidade, estado, país etc.) é definida como a razão entre o número de habitantes e a área da região. Qual é a região **menos** densamente povoada entre as citadas no quadro?

Região	Área (km²)	Número de habitantes
X	30 000	1,5 milhão
Y	1 500	120 mil
Z	20 000	0,8 milhão

34 Calcule, quando possível mentalmente, e comprove a resposta com uma calculadora:

a) 20% de 600
b) 15% de 840
c) 50% de 120
d) 10% de 123,5
e) 27% de 2 500
f) 7,5% de 400
g) 350% de 75
h) 15,4% de 350
i) 3% de 90
j) 0,5% de 2 100

35 Um vendedor recebe um salário fixo de R$ 950,00 mais 4% sobre o total de vendas no mês. Qual será seu salário se, em certo mês, o total de vendas efetuadas for R$ 10 000,00? E se as vendas dobrarem?

36 Calcule o valor de **x** em cada caso:

a) 10 é x% de 40
b) 3,6 é x% de 72
c) 120 é x% de 150
d) 136 é x% de 400
e) 150 é x% de 120

37 Em uma determinada fruta cuja massa é 60 g, o teor de água é 45% e o resto é polpa. Quantos gramas há de polpa de fruta?

38 De um grupo de 120 universitários que participam de um congresso, 48 são alunos do curso de Farmácia, 36 são alunos do curso de Química e os demais do curso de Biologia. Determine:

a) a razão entre o número de alunos que cursam Biologia e o número total de alunos.
b) a razão entre o número de alunos do curso de Farmácia e o número de alunos do curso de Química.
c) o número de alunos adicionais do curso de Química que deveriam ter participado do congresso a fim de que o percentual de alunos desse curso passasse a ser 40%.

39 Uma empresa pretende adquirir um certo equipamento eletrônico. Cinco fabricantes participam de um teste para determinar o percentual de peças defeituosas em um lote. Os resultados do teste são dados a seguir.

Fabricante	Número de peças analisadas	Número de peças com defeito
A	150	15
B	250	10
C	180	11
D	200	10
E	230	13

A empresa decidiu recusar as fabricantes cujo percentual de peças boas (não defeituosas) estivesse abaixo de 95%. Qual(is) fabricante(s) teve seu lote aprovado?

40 No mês de janeiro, o índice de pontualidade dos voos de uma companhia aérea foi de 95% e, no mês seguinte caiu para 90%. Sabendo que em janeiro a companhia operou 1 800 voos e em fevereiro 1 350, determine o índice de pontualidade dos voos nesse bimestre.

41 Em uma liquidação, os produtos de uma loja são anunciados com descontos de 25% até 60%.

a) Um artigo que custa R$180,00 é anunciado com 28% de desconto. Quanto ele passou a custar?
b) Um artigo que custa R$ 400,00 foi vendido por R$ 260,00. Qual foi o desconto percentual oferecido?

42 Em um supermercado trabalham 120 pessoas, sendo 70% mulheres. Entre as mulheres, $\frac{2}{7}$ são solteiras e, entre os homens, 25% não são solteiros. Determine:

a) o número de homens solteiros.
b) o percentual de funcionários que não são solteiros.

43 Em um jogo de futebol, constatou-se que a razão entre não pagantes e pagantes era de 3 : 17.

a) Qual foi o percentual de pagantes no jogo?
b) Se o público total foi de 45 000 pessoas, quantos não pagaram ingresso?

DESAFIO

Um número natural é um **quadrado perfeito** se ele for igual ao quadrado de outro número natural. Por exemplo, 49 é um quadrado perfeito, pois $49 = 7^2$. Um número natural é chamado **cubo perfeito** se ele for igual ao cubo de outro número natural. Por exemplo, 8 é um cubo perfeito, pois $8 = 2^3$.

a) Determine o menor número natural $x \neq 0$, tal que $56 \cdot 33 \cdot x$ seja um quadrado perfeito.
b) Qual é o menor número natural $z \neq 0$, tal que $z \cdot 540^2$ seja, simultaneamente, um cubo e um quadrado perfeito?

TROQUE IDEIAS

Matemática e Geografia: Escalas

Um exemplo conhecido e importante de razão são as **escalas numéricas**, amplamente usadas em mapas de Geografia, plantas de imóveis e maquetes.

Um mapa é uma imagem reduzida de uma determinada superfície. No mapa é preservada a proporção real entre distância, isto é, as distâncias lineares no mapa são proporcionais às correspondentes distâncias lineares reais.

A **escala** de um mapa é a razão entre a medida de um comprimento qualquer no mapa e a real medida do comprimento correspondente.

Brasil: divisão política

Fonte: CALDINI, V. L. M.; Ísola, L. *Atlas geográfico* Saraiva. 4ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013. p. 30.

Observe o mapa político do Brasil. Nele foi utilizada uma **escala gráfica**: um segmento de medida 2 cm (verifique com a régua) está dividido ao meio por uma marcação, acima da qual se lê o valor 428. Isso significa que 1 cm no mapa corresponde a 428 km na realidade (ou ainda, 2 cm no mapa correspondem, na realidade, a 856 km).

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Escrevendo as medidas indicadas na escala gráfica, em uma mesma unidade, obtenha a escala númerica desse mapa e represente a razão obtida $\frac{a}{b}$ na forma a : b.

b) Qual é, em linha reta, a distância real entre Belo Horizonte e Florianópolis?

c) A distância, em linha reta, de Cuiabá a Teresina é de aproximadamente 1 870 km. Qual deve ser a medida, no mapa, do segmento de extremidades nessas capitais? Confira sua resposta com uma régua.

d) Qual é a escala numérica correspondente à seguinte escala gráfica?

0 13 km

e) Represente a escala 1 : 20 000 por meio de uma escala gráfica.

f) Deseja-se produzir um mapa do Brasil no qual ocorra uma redução menor das distâncias reais, comparando-se com o mapa dado. Para isso, entre as escalas seguintes, qual deverá ser escolhida? Explique.

0 400 km ou 0 500 km

Funções

A noção intuitiva de função

No estudo científico de qualquer fenômeno, sempre procuramos identificar grandezas mensuráveis ligadas a ele e, em seguida, estabelecer as relações existentes entre essas grandezas.

Acompanhe os exemplos a seguir.

EXEMPLO **1**

Tempo e espaço

Uma pista de ciclismo tem marcações a cada 600 m. Um ciclista treina para uma prova de resistência, desenvolvendo uma velocidade constante. Enquanto isso, seu técnico anota, de minuto em minuto, a distância já percorrida pelo ciclista.

O resultado pode ser observado na tabela abaixo:

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Instante (min)	Distância (m)
0	0
1	600
2	1 200
3	1 800
4	2 400
...	...

A cada instante (**x**) corresponde uma única distância (**y**). Dizemos, por isso, que a distância é função do instante. A fórmula (ou a lei) que relaciona **y** com **x** é:

$y = 600 \cdot x$, com **y** em metros e **x** em minutos.

EXEMPLO **2**

Mercadoria e preço

Em uma barraca de praia, em Fortaleza, vende-se água de coco ao preço de R$ 3,50 o copo. Para facilitar seu trabalho, o proprietário da barraca montou a tabela ao lado.

Nesse exemplo, duas grandezas estão relacionadas: o número de copos de água de coco e o respectivo preço. A cada quantidade de copos corresponde um único preço. Dizemos, por isso, que o preço é função do número de copos. A fórmula que estabelece a relação de interdependência entre preço (**y**), em reais, e o número de copos de água de coco (**x**) é:

$$y = 3{,}50 \cdot x$$

Número de copos	Preço (R$)
1	3,50
2	7,00
3	10,50
4	14,00
5	17,50
6	21,00
7	24,50
8	28,00
9	31,50
10	35,00

EXEMPLO 3

Passageiros e preço da passagem

Para fretar um ônibus de excursão com 40 lugares, paga-se ao todo R$ 1 800,00. Essa despesa deverá ser igualmente repartida entre os participantes.

Para calcular a quantia que cada um deverá desembolsar (**y**), basta dividir o preço total (R$ 1 800,00) pelo número de passageiros (**x**). A fórmula (ou a lei) que relaciona **y** com **x** é:

$$y = \frac{1\,800}{x}$$

Observe na tabela alguns valores referentes à correspondência entre **x** e **y**:

x	y
4	450,00
12	150,00
15	120,00
18	100,00
20	90,00
24	75,00
36	50,00
40	45,00

RIVALDO GOMES/FOLHAPRESS

EXEMPLO 4

Tempo e temperatura

Um Instituto de Meteorologia, quando quer estudar a variação da temperatura em certa cidade, mede a temperatura a intervalos regulares – por exemplo, a cada 2 horas – e monta uma tabela que relaciona as grandezas hora e temperatura. Vamos supor que a tabela de um determinado dia seja assim:

Tempo (h)	Temperatura (°C)
0	7
2	4
4	3
6	2
8	5
10	12
12	18
14	20
16	20
18	15
20	12
22	8
24	7

CARLOS GOLDGRUB/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

A cada hora corresponde uma única medida de temperatura. Dizemos, por isso, que a medida da temperatura é função da medida de tempo.

EXERCÍCIOS

1 A tabela mostra o valor final de alguns pedidos de um certo tipo de piso laminado, solicitados a um fabricante, de acordo com a área de piso colocado:

Área (m^2)	Valor (R$)
40	2 800
25	1 750
60	4 200
140	9 800
180,5	12 635

a) Qual será o valor de um pedido de 100 m^2 desse piso? E de 250 m^2?

b) Qual é a fórmula (ou lei) que relaciona o valor (**y**), em reais, de um pedido de acordo com a quantidade (**x**) de piso, em metros quadrados?

2 Na cidade, um veículo econômico de passeio consome um litro de gasolina a cada 9 quilômetros rodados.

a) Faça uma tabela que forneça a distância percorrida pelo veículo ao serem consumidos: 0,25 L; 0,5 L; 2 L; 3 L; 10 L; 25 L; 40 L de gasolina.

b) Qual é a fórmula que relaciona a distância percorrida (**d**), em quilômetros, em função do número de litros (**L**) consumidos?

3 Um moderno avião é capaz de manter uma velocidade média de cruzeiro de aproximadamente 900 km/h.

a) Qual é a distância percorrida pelo avião em 15 minutos, meia hora, 2 horas e 5 horas? Represente em uma tabela.

b) Em quanto tempo o avião percorre 2 880 km?

c) Relacione, por meio de uma lei, a distância percorrida (**d**), em quilômetros, em função do tempo (**t**), em horas.

4 Ao receber sua conta de R$ 85,00 referente à TV por assinatura, Nair leu a seguinte instrução: "Para pagamentos realizados com atraso, serão acrescentados multa de R$ 1,70 e juros de R$ 0,03 por dia de atraso no pagamento".

a) Qual valor Nair pagaria se atrasasse 1,5, 10 ou 30 dias?

b) Seja **x** o número de dias de atraso ($1 \leq x \leq 30$). Qual é a lei (ou fórmula) que relaciona o total (**y**) a ser pago, em reais, em função de **x**?

5 Em uma atividade, um professor pediu aos alunos que desenhassem uma sequência de cinco quadrados, a partir da medida de seus lados. Para cada quadrado, os alunos deveriam calcular o perímetro e a área, como mostra a tabela:

Medida do lado (cm)	1	3,5	5	8	10
Medida do perímetro (cm)					
Área (cm^2)					

a) Copie a tabela acima no caderno e complete-a.

b) Qual é a lei de correspondência entre a medida do perímetro (**p**) e a medida do lado (ℓ) do quadrado?

c) Qual é a lei de correspondência entre a área (**a**) e a medida do lado (ℓ) do quadrado?

d) Dobrando-se a medida do lado, dobra-se a medida do perímetro? E a área?

6 Juntas, duas torneiras idênticas, com a mesma vazão, enchem um reservatório vazio em 20 minutos.

a) Faça uma tabela para representar o tempo (em minutos) gasto para encher esse mesmo reservatório, quando vazio, se forem utilizadas 1, 4, 6, 8 e 10 torneiras, todas idênticas às duas primeiras.

b) Qual é a lei que relaciona o tempo (**t**), em minutos, gasto para encher tal reservatório de acordo com o número **n** dessas torneiras?

c) Quantas dessas torneiras seriam necessárias para encher tal reservatório em 1 minuto e 36 segundos?

7 Considere um processo de divisão celular em que cada célula se subdivide em outras duas a cada hora.

a) Partindo-se de uma única célula, iniciou-se uma experiência científica. Faça uma tabela para representar a quantidade de células presentes nessa cultura após 1, 2, 3, 4, 5 e 6 horas do início da experiência.

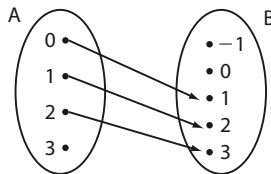
b) Qual é a quantidade mínima de horas (completas) necessárias para que haja mais de 1 000 células na cultura?

c) Qual é a lei que relaciona o número de células (**n**) encontrado na cultura após **t** horas do início da experiência?

A noção de função como relação entre conjuntos

Para caracterizar de modo mais preciso a noção de função, devemos recorrer às noções sobre conjuntos.

Vamos considerar, por exemplo, os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e observar algumas relações entre elementos de **A** e elementos de **B**.

1ª) Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x + 1$:

x	y
0	1
1	2
2	3

Para cada elemento $x \in A$, com exceção do 3, existe um só elemento $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

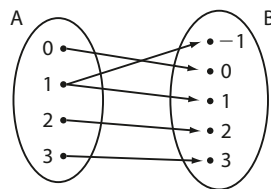
Para o elemento $3 \in A$ não existe correspondente $y \in B$.

2ª) Vamos associar a cada elemento $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y^2 = x^2$:

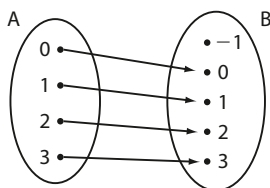
x	y
0	0
1	± 1
2	2
3	3

Professor, lembre o estudante de que, se os quadrados de dois números reais coincidem, não obrigatoriamente os dois números são iguais. Por exemplo: $(-3)^2 = 3^2$ e $-3 \neq 3$.

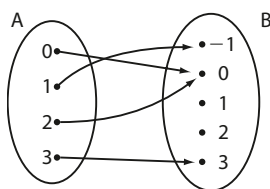
PENSE NISTO:

Você notou que, se **x** e **y** são números reais e $y^2 = x^2$, então $y = x$ ou $y = -x$?

Para cada elemento $x \in A$, com exceção de 1, existe um só elemento $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

Para o elemento $1 \in A$ existem dois elementos correspondentes em **B**: o 1 e o −1.

3ª) Associemos a cada $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x$:

x	y
0	0
1	1
2	2
3	3

Para todo $x \in A$, sem exceção, existe um único $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

4ª) Associemos a cada $x \in A$ o elemento $y \in B$ tal que $y = x^2 - 2x$:

x	y
0	0
1	−1
2	0
3	3

Para todo $x \in A$, sem exceção, existe um único $y \in B$ tal que **y** é o correspondente de **x**.

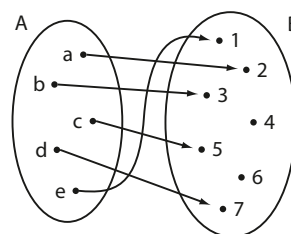
Nos dois últimos casos, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que **y** está associado a **x**. Por esse motivo, cada uma dessas relações recebe o nome de **função definida em A com valores em B**.

Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de **função de A em B**.

Veja um exemplo:

EXEMPLO 5

Observe ao lado a relação entre os elementos dos conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Essa relação é uma função porque a todo elemento de **A** corresponde um único elemento de **B**. Tal relação também poderia ser descrita por uma tabela em que cada $x \in A$ tem um único correspondente $y \in B$.

x ∈ A	**y ∈ B**
a	2
b	3
c	5
d	7
e	1

A mesma relação poderia, ainda, ser descrita por um conjunto **f** de pares ordenados do tipo (x, y) em que $x \in A$, $y \in B$ e **y** é o correspondente de **x**:

$$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 5), (d, 7), (e, 1)\}$$

Nessa função, dizemos que:

$x = a$ corresponde a $y = 2$; ou $x = a$ está associado a $y = 2$; ou, ainda, 2 é a imagem de **a**.

Da mesma forma:

3 é a imagem de **b**, 5 é a imagem de **c**, 7 é a imagem de **d** e 1 é a imagem de **e**.

Note, mais uma vez, que cada $x \in A$ tem uma única imagem $y \in B$.

Notação

De modo geral, se **f** é um conjunto de pares ordenados (x, y) que define uma função de **A** em **B**, indicamos:

$$f: A \rightarrow B$$

Se, nessa função, $y \in B$ é imagem de $x \in A$, indicamos:

$y = f(x)$ (lê-se: **y** é igual a **f** de **x**)

Retomando o exemplo anterior, temos:

$$f(a) = 2;\ f(b) = 3;\ f(c) = 5;\ f(d) = 7;\ f(e) = 1.$$

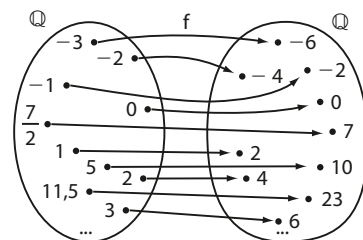
Funções definidas por fórmulas

Existe um interesse especial no estudo de funções em que **y** pode ser calculado a partir de **x** por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei). Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 6

A lei de correspondência que associa cada número racional **x** ao número racional **y**, sendo **y** o dobro de **x**, é uma função f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida pela fórmula $y = 2x$, ou $f(x) = 2x$.

Nessa função:

- para $x = 5$, temos $y = 2 \cdot 5 = 10$. Escrevemos $f(5) = 10$.
- a imagem de $x = -3$ é $f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$.
- $x = 11{,}5$ corresponde a $y = 2 \cdot (11{,}5) = 23$.
- $y = 7$ é a imagem de $x = \frac{7}{2}$.
- $f(3) = 6$

PENSE NISTO:

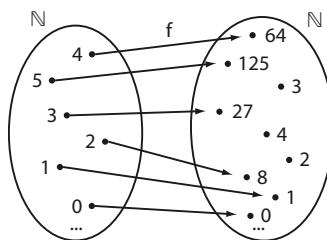
Nessa função todo número racional é imagem de algum **x** racional?

Sim. Dado $y_0 \in \mathbb{Q}$, o elemento do domínio cuja imagem é $\mathbf{y_0}$ é $x_0 = \frac{y_0}{2}$, pois $f(x_0) = 2\,\frac{y_0}{2} = y_0$.

EXEMPLO 7

A função **f** que associa a cada número natural **x** o número natural **y**, sendo **y** o cubo de **x**, é uma função f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $y = x^3$, ou $f(x) = x^3$.

Nessa função:

- para $x = 2$, temos $y = 2^3 = 8$. Dizemos que $f(2) = 8$.
- para $x = 5$, temos $y = 5^3 = 125$. Assim, $f(5) = 125$.
- $y = 64$ é a imagem de $x = 4$.

PENSE NISTO:

Nessa função todo número natural **y** é imagem de algum **x** natural?

Não, apenas os cubos perfeitos, isto é: 1, 8, 27, 64, 125, ...

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{3x + 8}{5}$.

a) Calcule: $f(3)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{4}\right)$ e $f\left(\sqrt{2}\right)$.

b) Determine o elemento do domínio cuja imagem é 0.

Solução:

a)

- $f(3) = -\frac{3 \cdot 3 + 8}{5} = -\frac{17}{5}$
- $f(-2) = -\frac{3 \cdot (-2) + 8}{5} = -\frac{2}{5}$
- $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{3 \cdot \frac{1}{4} + 8}{5} = -\frac{\frac{35}{4}}{5} = -\frac{7}{4}$
- $f\left(\sqrt{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2} + 8}{5}$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow -\frac{3x + 8}{5} = 0 \Rightarrow -(3x + 8) = 0 \Rightarrow x = -\frac{8}{3}$

2 Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x + m$, em que **m** é uma constante real. Calcule **m**, sabendo que $f(-2) = 5$.

Solução:

Observe que as variáveis relacionadas nessa função estão representadas por **x** e f(x), enquanto **m** representa um número real fixo, isto é, **m** é uma constante.

De $f(-2) = 5$ obtemos: $4 \cdot (-2) + m = 5 \Rightarrow -8 + m = 5 \Rightarrow m = 13$; portanto, a lei da função é $f(x) = 4x + 13$.

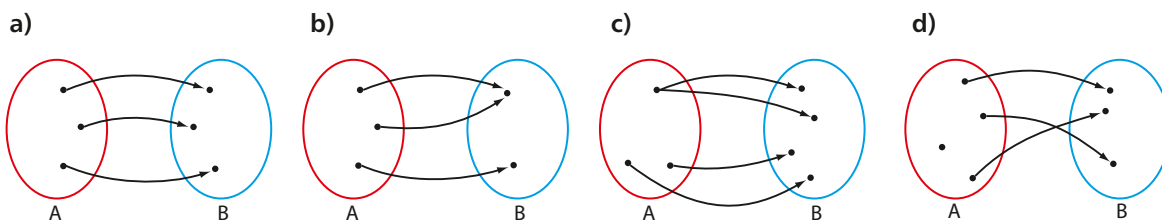
EXERCÍCIOS

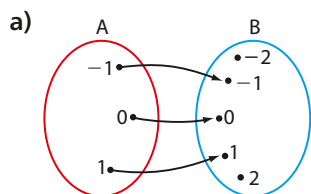
8 Verifique, em cada caso, se o esquema define ou não uma função de **A** em **B**; os pontos assinalados representam os elementos dos conjuntos **A** e **B**.

a)

b)

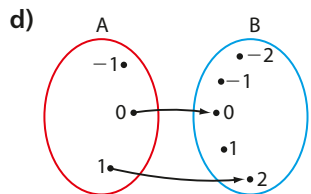
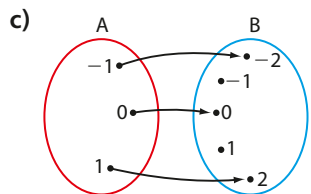
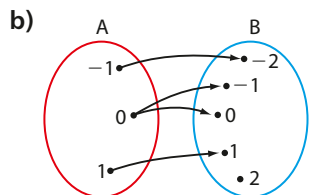
c)

d)

9 Em cada caso, verifique se o esquema representa uma função de **A** em **B**, sendo $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Em caso afirmativo, dê uma possível lei que define tal função:

a)

Professor, na correção, comente que pode existir mais de uma resposta: por exemplo, no item *a*, $y = x$, ou $y = x^3$, ou $y = x^5$ etc.

b)

c)

d)

10 Sendo $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, verifique em cada caso se a lei dada define uma função de **A** com valores em **B**:

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = |x| - 1$

11 Sejam $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N}$. Responda:

a) A lei que associa cada elemento de **A** ao seu sucessor em **B** define uma função?

b) A lei que associa cada elemento de **A** ao seu quadrado em **B** define uma função?

c) A lei que associa cada elemento de **A** ao seu oposto em **B** define uma função?

12 Considere **f** uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 - x + 4$. Calcule:

a) $f(1)$

b) $f(-1)$

c) $f(0)$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

e) $f\left(\sqrt{2}\right)$

13 Seja **f** uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = (3 + x) \cdot (2 - x)$.

a) Calcule $f(0)$, $f(-2)$ e $f(1)$.

b) Seja $a \in \mathbb{R}$. Qual é o valor de $f(a) - f(-a)$?

14 Sendo $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 2x + (-1)^x$, calcule:

a) $f(0)$

b) $f(1)$

c) $f(2)$

d) $f(-2)$

e) $f(37)$

15 Considerando **f** e **g** funções de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ dadas por $f(x) = 3x^2 - x + 5$ e $g(x) = -2x + 9$, faça o que se pede:

a) Determine o valor de $\frac{f(0) + g(-1)}{f(1)}$.

b) Resolva a equação: $g(x) = f(-3) + g(-4)$.

16 Seja **f** uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x) = \frac{4x - 2}{3}$.

Em cada caso, determine, se existir, o número inteiro cuja imagem vale:

a) 6

b) -10

c) 0

d) 1

17 A lei seguinte mostra a relação entre a projeção do valor (**v**), em reais, de um equipamento eletrônico e o seu tempo de uso (**t**), em anos:

$$v(t) = 1\,800 \cdot \left(1 - \frac{t}{20}\right)$$

a) Qual é o valor desse equipamento novo, isto é, sem uso?

b) Qual é a desvalorização, em reais, do equipamento no seu primeiro ano de uso?

c) Com quantos anos de uso o aparelho estará valendo R$ 1 260,00?

18 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{3}{4}x + m$, sendo **m** uma constante real. Sabendo que $f(-8) = -4$, determine:

a) o valor de **m**;

b) $f(1)$;

c) o valor de **x** tal que $f(x) = -12$.

19 O gerente de uma casa de espetáculos verificou, durante uma temporada, que o número de pagantes (**y**) em um musical variou de acordo com o preço (**x**), em reais, do ingresso para o espetáculo, segundo a lei

$$y = 400 - \frac{5}{2}x, \text{ com } 20 \leqslant x \leqslant 120$$

a) Qual foi o número de pagantes quando o preço do ingresso era R$ 60,00?

b) Se o número de pagantes em uma noite foi 320, qual foi o valor cobrado pelo ingresso?

c) Quanto arrecadou a bilheteria quando o preço do ingresso era R$ 90,00?

20 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida pela lei $f(x) = m \cdot 4^x$, sendo **m** uma constante real. Sabendo que $f(1) = 12$, determine o valor de:

a) **m**

b) $f(2)$

21 Estima-se que a população **p** (em milhares de habitantes) de certo município, daqui a **x** anos a contar de hoje, seja dada pela lei:

$$p(x) = 10 - \frac{2}{x + 1}$$

a) Qual é a população atual desse município?

b) Qual será a população daqui a 3 anos?

c) De quantas pessoas a população aumentará do 3º para o 4º ano?

d) Daqui a quantos anos a população será de 9 900 habitantes?

22 No Brasil, o número (**N**) do sapato varia de acordo com o "tamanho" ou o comprimento (**c**) do pé, em centímetros, segundo a lei:

$$N = \frac{5c + 28}{4}$$

a) O pé de Luís mede 28 cm. Qual é o número de seu sapato?

b) Luma calça sapatos de número 36. Quanto mede seu pé?

c) Dois irmãos sabem que as numerações de seus sapatos diferem de 4 unidades. Em quantos centímetros diferem os comprimentos de seus pés?

23 Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida pela lei $f(x) = -3x + 5$. Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ tais que:

$$f(a) + f(a + 1) = 3 \cdot f(2a)$$

24 Um laboratório realizou um teste de um novo medicamento em uma amostra de 900 voluntários doentes. O número **n** de pessoas que ainda estavam doentes no tempo **t**, em semanas, contado a partir do início da experiência ($t = 0$), é expresso pela lei

$$n(t) = a \cdot t^2 + b$$

em que **a** e **b** são constantes reais.

Sabendo que o último voluntário curou-se assim que foi completada a 15ª semana, determine o número de pessoas que ainda estavam doentes decorridas 5 semanas do início dos testes.

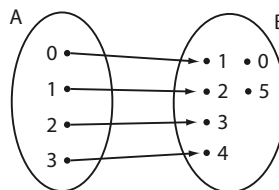
Domínio e contradomínio

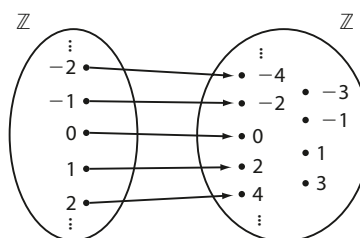
Seja f: A → B uma função.

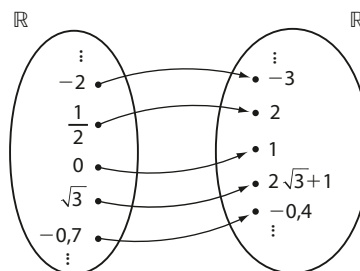
O conjunto **A** é chamado **domínio** de **f**, e o conjunto **B** é chamado **contradomínio** de **f**.

Veja os exemplos a seguir.

EXEMPLO 8

Sendo A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, a função f: A → B tal que f(x) = x + 1 tem domínio **A** e contradomínio **B**.

EXEMPLO 9

Sendo A = $\mathbb{Z}$ e B = $\mathbb{Z}$, a função f: A → B tal que f(x) = 2x tem domínio $\mathbb{Z}$ e contradomínio $\mathbb{Z}$.

EXEMPLO 10

Sendo A = $\mathbb{R}$ e B = $\mathbb{R}$, a função f: A → B definida por f(x) = 2x + 1 tem domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$.

Observe que todo elemento **x** do domínio tem uma única imagem **y** no contradomínio, embora possam existir elementos do contradomínio que não são imagem de nenhum **x** do domínio. Note que, no exemplo 8, os números 0 e 5 não são imagens de x ∈ A; no exemplo 9, os números inteiros ímpares não são imagens de x ∈ $\mathbb{Z}$. No exemplo 10, todos os números reais são imagens de algum x ∈ $\mathbb{R}$, do domínio, como veremos logo adiante.

Determinação do domínio

Muitas vezes se faz referência a uma função **f**, dizendo apenas qual é a lei de correspondência que a define. Quando não é dado explicitamente o domínio **D** de **f**, deve-se subentender que **D** é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de **x** na lei de correspondência y = f(x), de modo que, efetuados os cálculos, resulte um **y** real. Vejamos alguns exemplos.

- O domínio da função definida pela lei y = 3x + 4 é D = $\mathbb{R}$, pois, qualquer que seja o valor real atribuído a **x**, o número 3x + 4 também é real.

- O domínio da função dada por $y = \dfrac{x+3}{x-1}$ é $D = \mathbb{R} - \{1\}$, pois, para todo **x** real diferente de 1, o número $\dfrac{x+3}{x-1}$ é real.
- O domínio da função dada por $y = \sqrt{x-2}$ é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$, pois $\sqrt{x-2}$ só é um número real se $x - 2 \geqslant 0$.
- A função dada por $y = \dfrac{1}{x-1} + \sqrt{x}$ só é definida para $x - 1 \neq 0$ e $x \geqslant 0$; então, seu domínio é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

Conjunto imagem

Se $f: A \to B$ é uma função, chama-se **conjunto imagem de f** (indica-se: Im) o subconjunto do contradomínio constituído pelos elementos **y** que são imagens de algum $x \in A$. Retomando os exemplos 8, 9 e 10 temos:

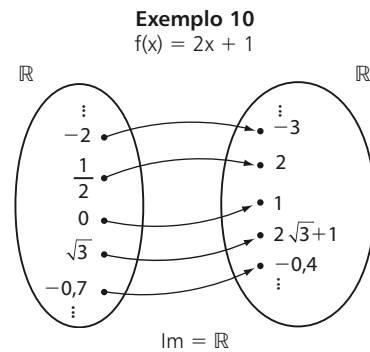
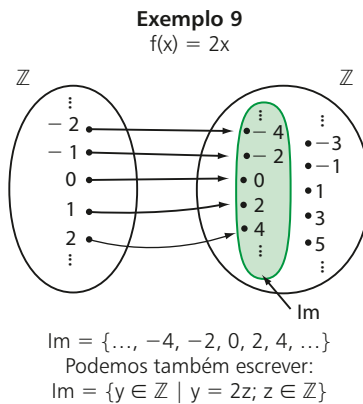
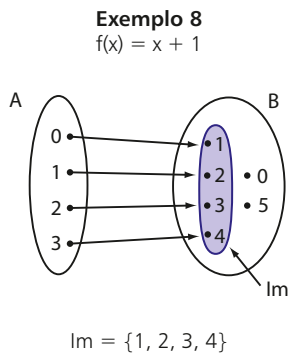
Exemplo 8
$f(x) = x + 1$

$Im = \{1, 2, 3, 4\}$

Exemplo 9
$f(x) = 2x$

$Im = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$
Podemos também escrever:
$Im = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = 2z; z \in \mathbb{Z}\}$

Exemplo 10
$f(x) = 2x + 1$

$Im = \mathbb{R}$

No exemplo 10, todos os números reais são imagens de algum $x \in \mathbb{R}$, do domínio de **f**. Com efeito, dado um número real qualquer **a**, ele é imagem de $x = \dfrac{a-1}{2}$:

$$f\left(\frac{a-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{a-1}{2}\right) + 1 = a - 1 + 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$$

É importante destacar que o procedimento apresentado acima não se aplica facilmente a qualquer função. Na maioria das vezes, a determinação do conjunto imagem de uma função será feita por meio da leitura de seu gráfico, como veremos adiante.

Professor, a ideia deste *Pense nisto* é mostrar, no exemplo 10, como obter o valor de um elemento do domínio a partir de sua imagem. É importante que o estudante perceba que, neste caso, é possível isolar **x**, mas esse procedimento não se aplica facilmente a todas as funções.

PENSE NISTO:

Note que $a = 2x + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{a-1}{2}$.

EXERCÍCIOS

25 Sejam os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Em cada caso, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de **f**:

a) $f: A \to B$ dada por $f(x) = x + 2$
b) $f: A \to B$ dada por $f(x) = x^2$
c) $f: A \to B$ dada por $f(x) = -x + 1$
d) $f: A \to B$ dada por $f(x) = |x|$

26 Se $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leqslant x \leqslant 5\}$ e $f: A \to B$ é definida pela lei $y = 2x + 1$, quantos são os elementos de **B** que não pertencem ao conjunto imagem da função?

27 Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = -x$. Qual é o conjunto imagem de **f**?

28 Se **x** e **y** são números reais, estabeleça o domínio de cada uma das funções dadas pelas seguintes leis:

a) $y = -4x^2 + 3x - 1$ **b)** $y = -\dfrac{3x + 11}{2}$ **c)** $y = \dfrac{2x + 3}{x}$ **d)** $y = \dfrac{4}{x - 1}$

29 Se **x** e **y** são números reais, determine o domínio das funções definidas por:

a) $y = \sqrt{x - 2}$ **b)** $y = \sqrt[3]{4x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{3x + 1}{\sqrt{x - 3}}$ **d)** $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x}$

30 Estabeleça o domínio $D \subset \mathbb{R}$ de cada uma das funções definidas pelas sentenças abaixo:

a) $f(x) = \sqrt{2x - 1} + \sqrt{x}$

b) $g(x) = \sqrt{-3x + 5} - \sqrt{x - 1}$

c) $i(x) = \dfrac{2}{x^3 - 4x}$

d) $j(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

O desenvolvimento do conceito de função

A ideia de função que temos hoje em dia foi sendo construída ao longo do tempo por vários matemáticos.

Conheça um pouco dessa longa história.

- Na Antiguidade, a ideia de função aparece, implícita, em algumas informações encontradas em tábuas babilônicas.
- Um importante registro sobre funções aparece, não com este nome, na obra do francês Nicole Oresme (c. 1323-1382), que teve a ideia de construir "um gráfico" ou "uma figura" para representar graficamente uma quantidade variável — no caso, a velocidade de um móvel variando no tempo. Oresme teria usado os termos latitude (para representar a velocidade) e longitude (para representar o tempo) no lugar do que hoje chamamos de ordenada e abscissa — era o primeiro grande passo na representação gráfica das funções.
- O matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) introduziu a palavra **função**, com praticamente o mesmo sentido que conhecemos e usamos hoje.
- A notação f(x) para indicar "função de **x**" foi introduzida pelo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783).

PORTRAIT OF LEONHARD EULER, JAKOB EMANUEL HANDMANN, 1753/ KUNSTMUSEUM BASEL

A pintura de Jakob Emanuel Handmann, datada dos anos 1753, mostra o matemático suíço Leonhard Euler.

- O matemático alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) deu uma definição de função muito próxima da que usamos hoje em dia:

> *"Se uma variável **y** está relacionada com uma variável **x** de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a **x**, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de **y**, então se diz que **y** é função da variável independente **x**."*

- Por fim, com a criação da teoria dos conjuntos, no fim do século XIX, foi possível definir função como um conjunto de pares ordenados (x, y) em que **x** é elemento de um conjunto **A**, **y** é elemento de um conjunto **B** e para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

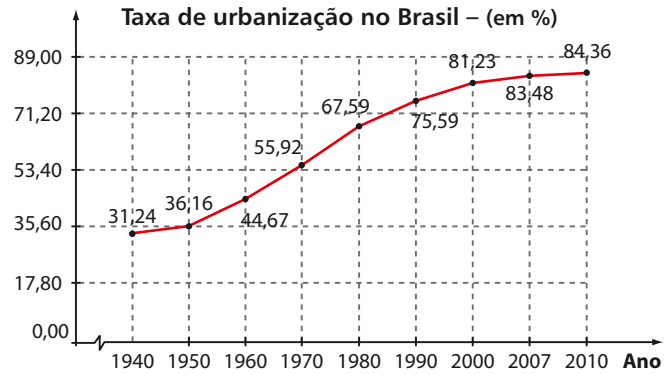
Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Leitura informal de gráficos

Vamos observar alguns gráficos disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Gráficos como estes são comuns em jornais, revistas, na internet e em outros veículos de comunicação. A partir deles, conheceremos algumas propriedades das funções representadas por eles.

EXEMPLO **11**

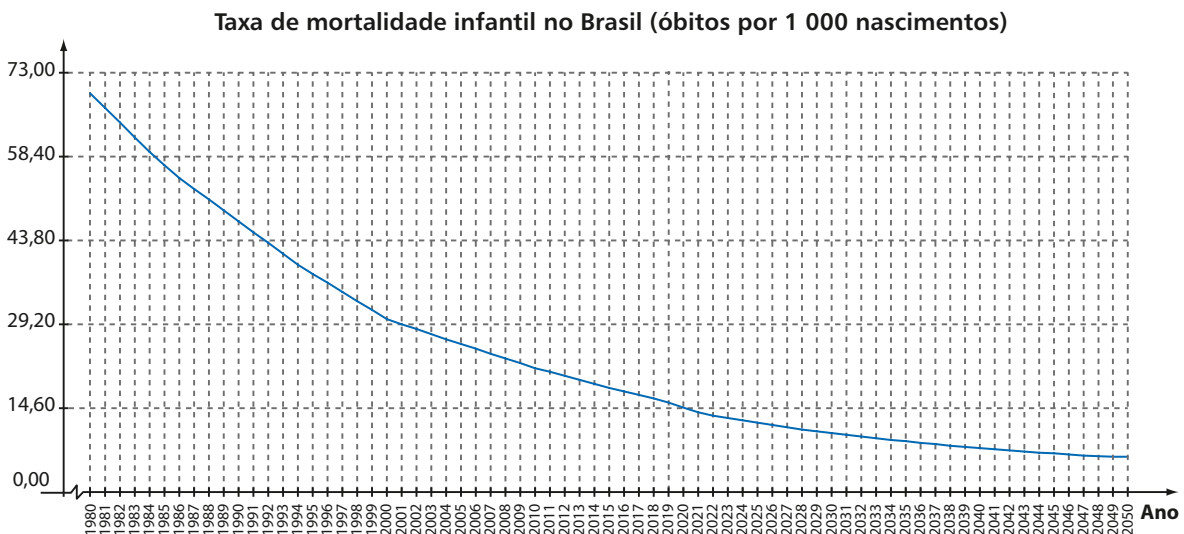
O gráfico relaciona duas grandezas: a taxa (percentual) de urbanização e o tempo (período de 1940 a 2010). A taxa é função do tempo: para cada ano corresponde um único valor do percentual da população brasileira que vive em zonas urbanas. Por exemplo, em 2000, 81,23% da população brasileira vivia em zonas urbanas.

É fácil perceber que a taxa cresce (aumenta) à medida que o tempo avança (aumenta). Dizemos que essa função é **crescente**. No gráfico evidencia-se, também, um forte crescimento da taxa até o ano 2000; a partir daí, os aumentos são mais "suaves".

Fonte: IBGE. Censo demográfico 1940-2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP122&t=taxa-urbanizacao>. Acesso em: 4 mar. 2016.

EXEMPLO **12**

O gráfico mostra uma grande conquista da sociedade brasileira: a queda na taxa de mortalidade infantil desde 1980, passando pelos dias de hoje, até as projeções para 2050. A relação entre essas duas grandezas (taxa e tempo) define uma função: a cada ano está associada uma única taxa de mortalidade infantil.

Em todo o período considerado, a taxa de mortalidade diminui à medida que avançam os anos: trata-se de uma **função decrescente**. Observe que, de 1980 a 2000, a taxa se reduziu em 40 óbitos (por 1 000 nascimentos): de aproximadamente 70 por 1 000 para aproximadamente 30 por 1 000.

As projeções indicam que, em 2020, a taxa estará próxima de 15 por 1 000. Em 2050, atingirá um valor próximo de 7 por 1 000.

Fonte: IBGE, Projeção da População do Brasil por Sexo e Idade para o Período 1980-2050 - Revisão 2008. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP324&t=revisao-2008-projecao-populacao-taxa-mortalidade>. Acesso em: 4 mar. 2016.

EXEMPLO 13

O gráfico seguinte mostra a relação entre duas grandezas: o número de óbitos por aids no Brasil (por 100 mil habitantes) e o tempo (de 1990 a 2009).

Essa relação define uma função, pois a cada ano corresponde uma única taxa.

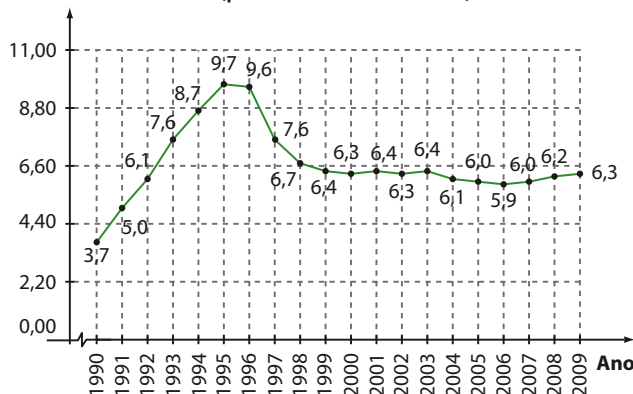
No 1º ano – 1990 – a taxa de mortalidade (por 100 mil habitantes) era de 3,7 e esse foi o menor valor registrado no período considerado. Dizemos que o **valor mínimo** da função é 3,7 por 100 mil.

De 1990 a 1995 as taxas aumentaram (nesse intervalo a função é crescente). Em 1995 foi registrada a maior taxa de mortalidade (por 100 mil) que é igual a 9,7. Assim, o **valor máximo** dessa função é 9,7 por 100 mil.

De 1995 a 2000 as taxas diminuíram (nesse intervalo a função é decrescente) e de 2000 a 2003 a taxa praticamente não se alterou.

Uma nova queda ocorreu até 2006, seguida de novos aumentos até 2009. Quando analisamos os dez últimos anos do período considerado, podemos notar que a taxa de óbitos (por 100 mil habitantes) manteve-se na faixa de 5,9 a 6,4.

A despeito dos avanços no tratamento da doença, no qual o Brasil é referência internacional, é sempre muito importante lembrar que a aids ainda não tem cura, e informação e prevenção são sempre as opções mais seguras.

Número de óbitos por aids no Brasil
(por 100 000 habitantes)

Fonte: Ministério da Saúde/SVS – 2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/exportador.aspx?arquivo=MS39_BR_PERC.csv&categorias="%C3%93bitos por AIDS - Taxa de mortalidade espec%C3%ADfica(TME)"&localidade=Brasil>. Acesso em: 4 mar. 2016.

PENSE NISTO:

No ano de 2009 a população brasileira estava próxima de 190 milhões de habitantes. Qual foi o número aproximado de óbitos por aids registrados naquele ano?

$\frac{190\,000\,000}{100\,000} \cdot 6,3 = 11\,970$

EXERCÍCIOS

31 O gráfico ao lado representa a oscilação diária do valor da ação de uma empresa, comercializada em uma bolsa de valores, desde a abertura do pregão, às 10 horas, até o fechamento, às 18 horas.

Convencionaremos que t = 0 corresponde às 10 h; t = 1 corresponde às 11 h; e assim por diante.

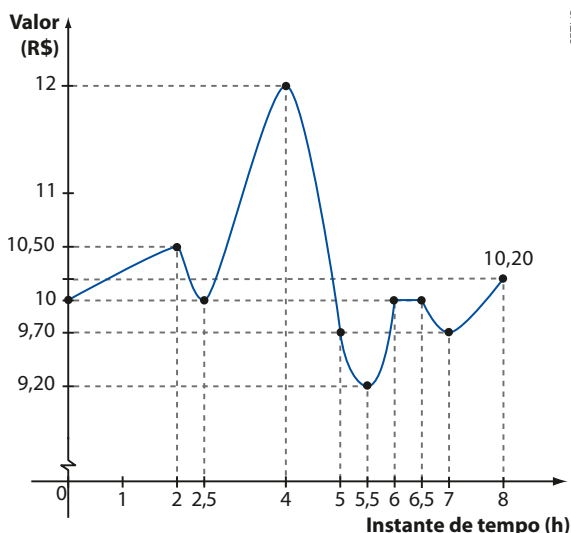
Com base no gráfico, responda:

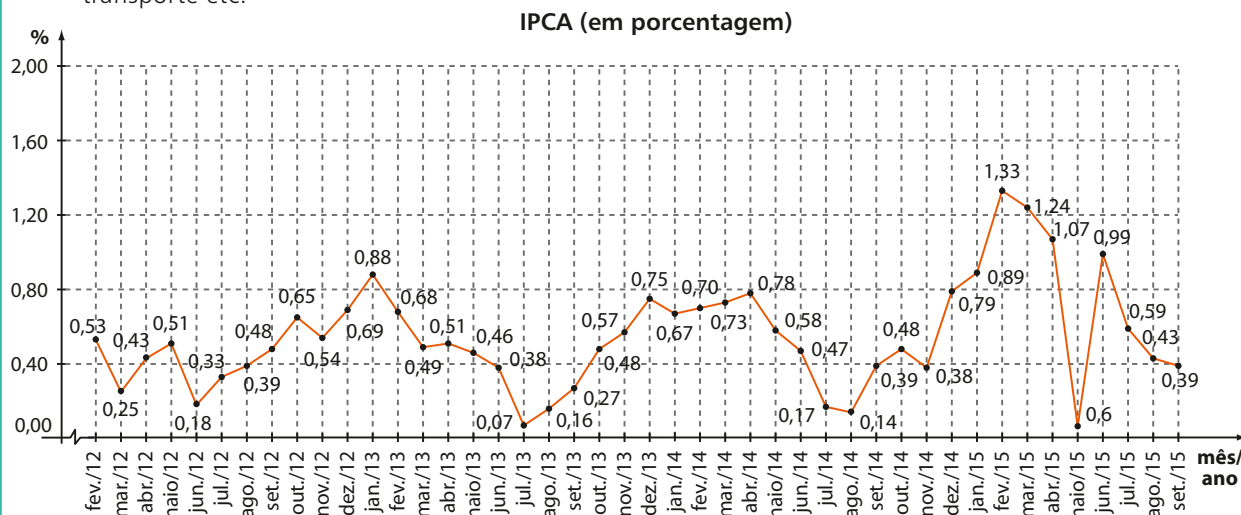
a) Em quais intervalos de horários o valor da ação subiu?

b) Em quais intervalos de horários o valor da ação caiu?

c) Nesse dia, entre quais valores oscilou o preço da ação dessa empresa?

d) Em que horários a ação esteve cotada a R$ 9,70?

e) A ação encerrou o dia em alta, estável, ou em baixa? De quanto por cento?

SETUP

32 O gráfico a seguir mostra a variação mensal do Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) de fevereiro de 2012 a setembro de 2015. Esse índice oficial tem por objetivo medir a inflação de um conjunto de produtos e serviços comercializados no varejo, como habitação, alimentação, educação, transporte etc.

Fonte: IBGE. Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo15. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=11&op=0&vcodigo=IL4&t=ipca15-indice-nacional-precos-consumidor-amplor>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Com base nas informações do gráfico, responda:

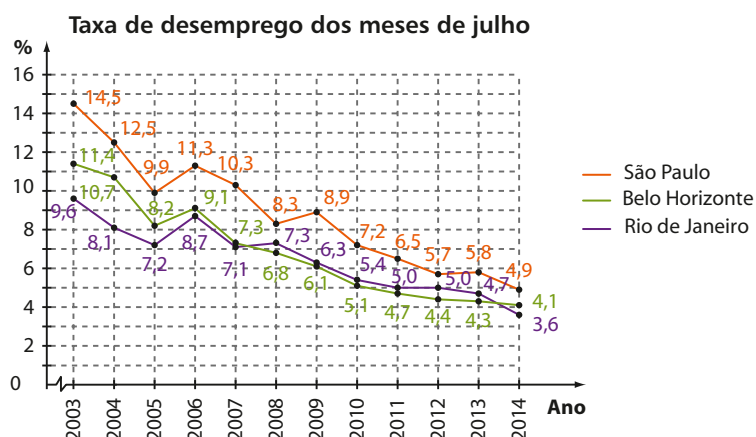
a) Em que data (mês e ano) foi registrado o menor IPCA?

b) Em que data (mês e ano) foi registrado o maior IPCA?

c) Indique, para o ano de 2013, os períodos em que o IPCA subiu e os períodos em que o IPCA caiu.

d) Em quantos meses do período considerado o IPCA ficou acima de 0,8% ao mês?

e) É possível concluir que, no 1º trimestre desses anos, ocorreu uma desaceleração da inflação?

33 O gráfico abaixo compara as taxas de desemprego nos meses de julho, no período de 2003 a 2014, nas regiões metropolitanas de São Paulo (SP), Belo Horizonte (BH) e Rio de Janeiro (RJ). Com base apenas nos dados do gráfico, classifique as afirmações seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), justificando as falsas:

Fonte: IBGE. Pesquisa Mensal de Emprego (PME). Disponível em: <blog.planalto.gov.br/taxa-de-desemprego-em-julho-e-a-menor-para-o-mes-desde-2003>. Acesso em: 4 mar. 2016.

a) Em todo o período, a região metropolitana de SP registrou as maiores taxas de desemprego.

b) Em todo o período, quando a taxa em BH diminui, a taxa em SP também diminui.

c) A diferença entre a maior e a menor taxa de desemprego no RJ é maior que 5 pontos percentuais.

d) Em todo o período, a taxa de desemprego na região metropolitana do RJ é menor que a taxa em BH.

e) Em 2014, o número de desempregados em BH superava o número de desempregados no RJ.

34 O gráfico ao lado mostra o desflorestamento bruto, no estado do Amazonas, em quilômetros quadrados, no período de 1991 a 2010.

Fonte: INPE/PRODES. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=16&op=0&vcodigo=IU12&t=desflorestamento-amazonia-legal-3-desflorestamento-bruto>. Acesso em: 4 mar. 2016.

a) Identifique os períodos em que ocorreu aumento na área desmatada, considerando os anos de 1991 a 2005.

b) Considerando dois anos consecutivos, identifique o período em que foi registrado maior aumento absoluto na área desmatada. Esse aumento foi superior ou inferior a 1 000 km^2?

c) Nos últimos dez anos do período considerado no gráfico, identifique o ano que apresentou maior área desmatada.

d) A diferença entre a área desmatada anual foi menor que 15 km^2 para quais anos consecutivos?

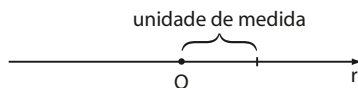
e) Em 2010, a área desmatada foi de 474 km^2. Considere um campo de futebol com 100 m de comprimento por 70 m de largura. Determine a quantos campos de futebol, aproximadamente, corresponde a área desmatada naquele ano.

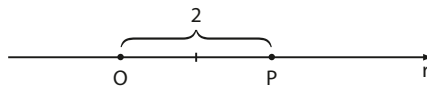
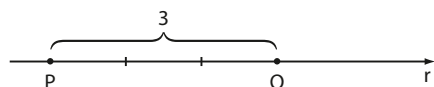
Lembre que 1 km^2 = 1 000 000 m^2.

O plano cartesiano

Representação de pontos em uma reta

No capítulo 2 apresentamos a representação geométrica do conjunto dos números reais. Vamos agora formalizar alguns conceitos.

Dada uma reta **r** podemos associar números reais aos pontos dessa reta. Para isso, escolhemos um ponto **O** (origem), uma unidade de medida de comprimento e um sentido positivo (para a direita).

A cada ponto **P** dessa reta associamos um número real **x** tal que:

- Se **P** está à direita de **O** (sentido de **O** a **P** é positivo), **x** é o comprimento do segmento $\overline{OP}$ associado a um sinal positivo.
  Exemplo: $x = +2 = 2$

- Se **P** está à esquerda de **O** (sentido de **O** a **P** é negativo), **x** é o comprimento do segmento $\overline{OP}$ associado a um sinal negativo.
  Exemplo: $x = -3$

Em ambos os casos, dizemos que **x** é a **medida algébrica** do segmento $\overline{OP}$ e indicamos por $x = \text{med}(\overline{OP})$.

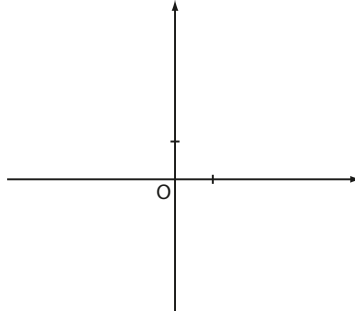
OBSERVAÇÃO

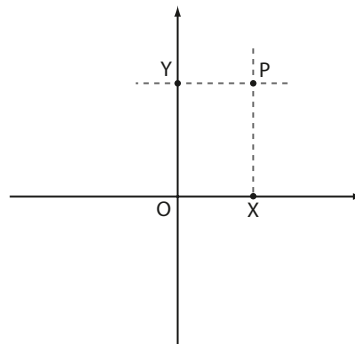
Se **P** coincide com **O**, então $x = 0$.

Representação de pontos em um plano

Para representar pontos em um plano, procederemos da seguinte maneira:

1º) Traçamos duas retas (eixos) perpendiculares e usamos a sua interseção **O** como origem para cada um desses eixos.

2º) Para cada um dos eixos, escolhemos uma unidade de medida e um sentido positivo.

3º) Para cada ponto **P** do plano traçamos:

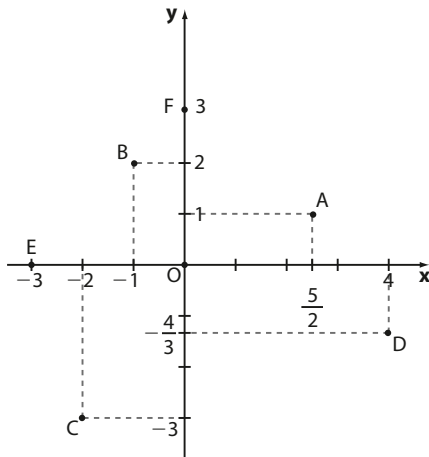
- uma reta paralela ao eixo vertical que intersecta o eixo horizontal no ponto **X**.
- uma reta paralela ao eixo horizontal que intersecta o eixo vertical no ponto **Y**.

4º) O número real $x = \text{med}(\overline{OX})$ é a **abscissa** de **P**, e o número real $y = \text{med}(\overline{OY})$ é a **ordenada** de **P**. Observe, na figura acima, que a abscissa de **P** é positiva e a ordenada de **P** também é positiva.

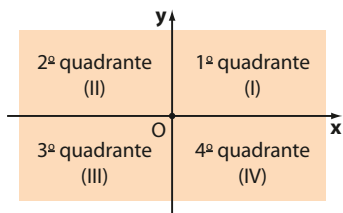
Os números reais **x** e **y** são as **coordenadas** de **P** e as indicamos na forma de **par ordenado** P(x, y).

O plano que contém as duas retas é o **plano cartesiano**.

O eixo horizontal (Ox) é o **eixo das abscissas**.

O eixo vertical (Oy) é o **eixo das ordenadas**.

Observe, no plano cartesiano seguinte, a representação dos pontos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** por meio de suas coordenadas:

- O(0, 0)
- $A\left(\frac{5}{2}, 1\right)$
- B(−1, 2)
- C(−2, −3)
- $D\left(4, -\frac{4}{3}\right)$
- E(−3, 0)
- F(0, 3)

Cada uma das quatro partes em que fica dividido o plano pelos eixos cartesianos chama-se **quadrante**. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas.

EXERCÍCIOS

35 Distribua em um plano cartesiano os pontos: A(3, 1); B(−4, 2); C(5, −3); D(−1, −1); E(2, 0); F(0, −2); G(0, 0); H(−4, 0); I(0, 4); $J\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$; $K(\sqrt{2}, 2)$; $L\left(-2, \frac{5}{2}\right)$; $M\left(3, -\frac{7}{3}\right)$.

36 Forneça as coordenadas de cada ponto assinalado no plano cartesiano abaixo; o lado de cada quadradinho mede uma unidade.

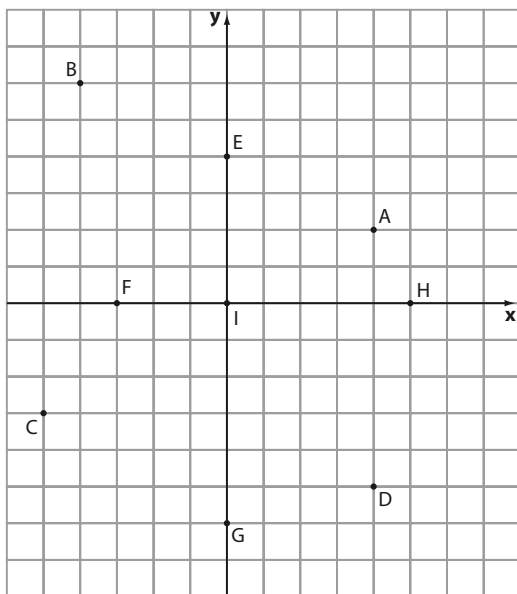
37 Encontre **x** e **y** que determinam, em cada caso, a igualdade:

a) $(x, y) = (2, -5)$

b) $(x + 4, y - 1) = (5, 3)$

c) $(x + y, x - 3y) = (3, 7)$

38 Determine **m** para que $(m^2, m + 4) = (16, 0)$.

39 O ponto P(m − 3, 4) pertence ao eixo **y**. Qual é o valor de **m**?

40 O ponto $Q(-2, m^2 - 1)$ pertence ao eixo das abscissas. Qual é o valor de **m**?

41 Para cada item, represente em um plano cartesiano, o conjunto de pontos (x, y) tais que:

a) $y > 0$

b) $x \leqslant 0$

c) $x = y$

d) $x \cdot y < 0$

e) $y = 0$

f) $x = 0$ e $y \geqslant 0$

42 O ponto P(a, b) pertence ao 2º quadrante.

a) Quais são os sinais de **a** e de **b**?

b) A qual quadrante pertence o ponto Q(−a, b)?

43 O ponto R(−a, b) pertence ao 3º quadrante.

a) Quais são os sinais de **a** e de **b**?

b) A qual quadrante pertence o ponto S(a, b)?

Construção de gráficos

Como podemos construir o gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência y = f(x) e seu domínio **D**?

Se **D** é finito, pode-se proceder assim:

- 1º passo: construímos uma tabela na qual aparecem os valores de **x** pertencentes a **D** e os valores do correspondente **y**, calculados por meio da lei y = f(x);

- 2º passo: representamos cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto do plano cartesiano. O conjunto dos pontos obtidos constitui o gráfico da função.

EXEMPLO **14**

Vejamos como construir o gráfico da função dada por y = 2x, com domínio D = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}.

1º passo:

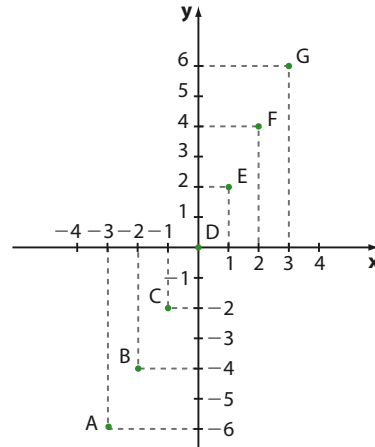
Construímos uma tabela:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−6	−4	−2	0	2	4	6

2º passo:

Representamos os pares ordenados que estão na tabela por pontos, a saber:

- A(−3, −6)
- B(−2, −4)
- C(−1, −2)
- D(0, 0)
- E(1, 2)
- F(2, 4)
- G(3, 6)

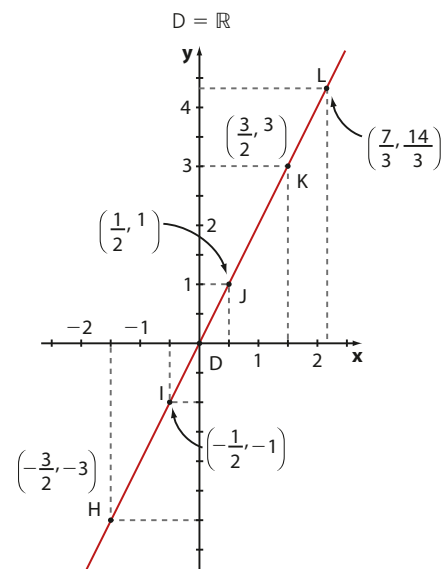
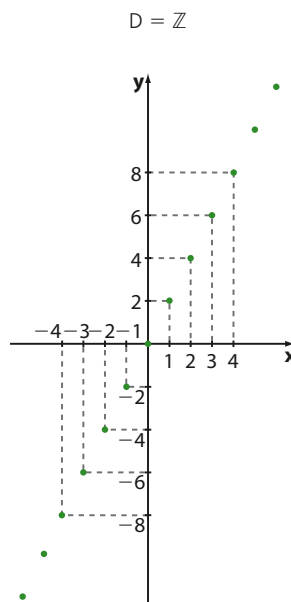
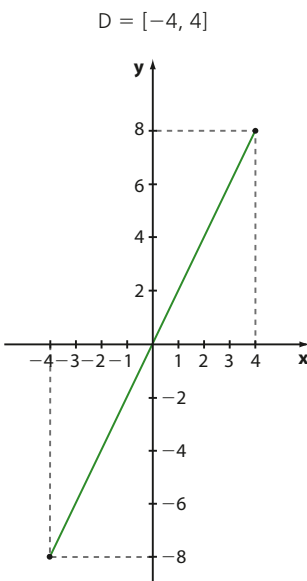
O gráfico da função é formado por esses 7 pontos.

Se o conjunto **D** não é finito, podemos construir uma tabela e obter alguns pontos do gráfico; entretanto, o gráfico da função será constituído por infinitos pontos.

EXEMPLO **15**

Veja como são os gráficos da função y = 2x em domínios diferentes do exemplo anterior.

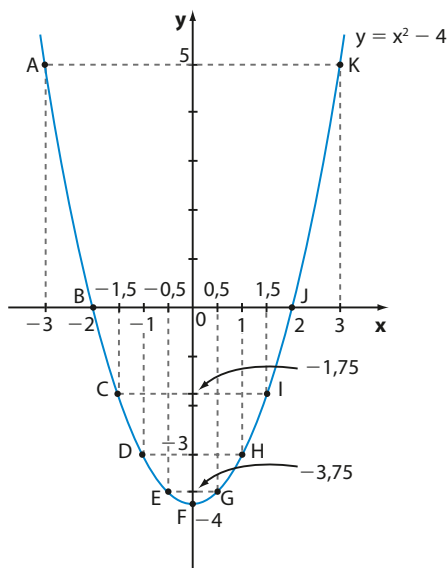
D = [−4, 4]

D = ℤ

D = ℝ

EXEMPLO 16

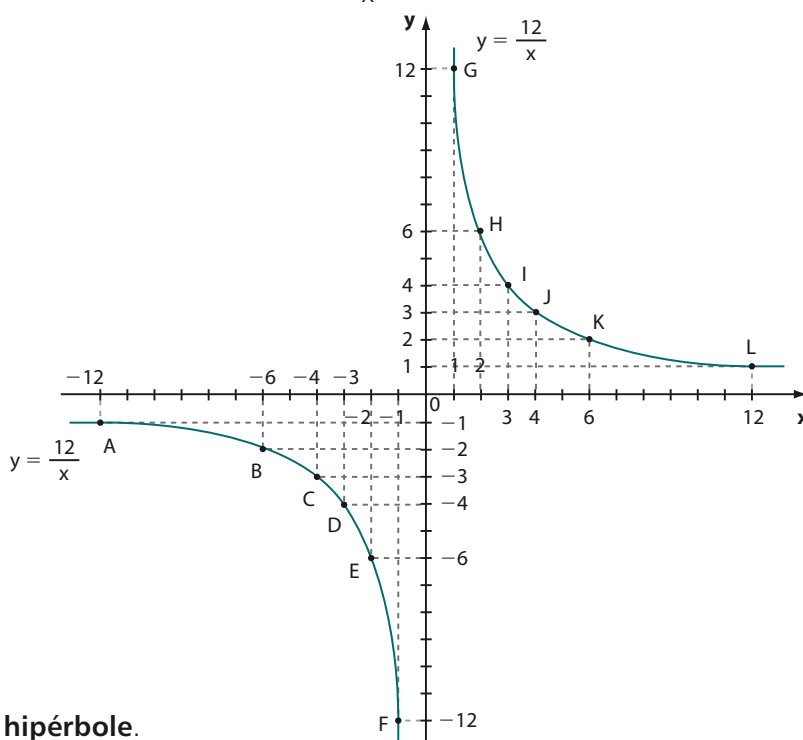
Vamos construir o gráfico da função dada por $y = x^2 - 4$ com domínio $\mathbb{R}$:

Professor, se julgar necessário, veja o comentário na página 96, capítulo 5.

x	y	Ponto
−3	5	A
−2	0	B
−1,5	−1,75	C
−1	−3	D
−0,5	−3,75	E
0	−4	F
0,5	−3,75	G
1	−3	H
1,5	−1,75	I
2	0	J
3	5	K

Essa curva é chamada **parábola** e será estudada com mais detalhes no capítulo 5.

EXEMPLO 17

Vamos construir o gráfico da função dada por $y = \frac{12}{x}$ no domínio $\mathbb{R}^*$:

x	y	Ponto
−12	−1	A
−6	−2	B
−4	−3	C
−3	−4	D
−2	−6	E
−1	−12	F
1	12	G
2	6	H
3	4	I
4	3	J
6	2	K
12	1	L

Essa curva é chamada **hipérbole**.

O estudo completo da hipérbole não será feito neste volume da coleção; veja, como complemento, a seção *Um pouco mais sobre* do capítulo 4.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

44 Construa os gráficos das funções f: A → B, sendo B ⊂ ℝ, dadas pela lei y = x + 1 nos seguintes casos:

a) A = {0, 1, 2, 3}
b) A = [0, 3]
c) A = ℤ
d) A = ℝ

45 Construa os gráficos das funções f: A → B com B ⊂ ℝ, dadas pela lei y = −2x + 1 nos seguintes casos:

a) A = {−2, −1, 0, 1, 2}
b) A = [−2, 2[
c) A = ℝ

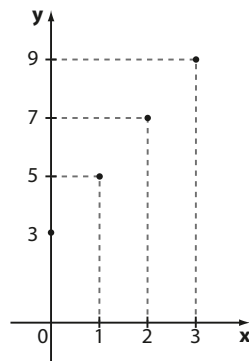
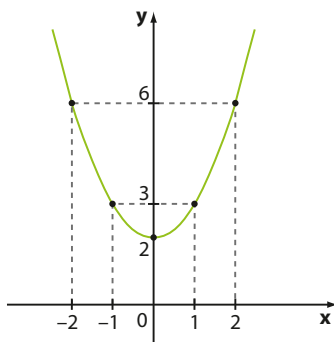
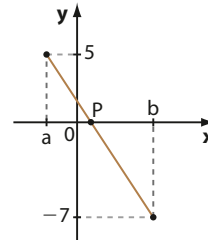
46 Construa os gráficos das funções f: A → B, com B ⊂ ℝ definidas por $f(x) = x^2$, nos seguintes casos:

a) $A = \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$
b) A = [−2, 2[
c) A = ℝ

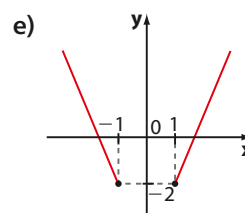
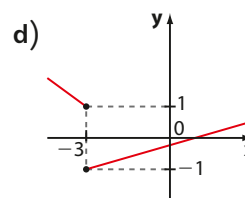
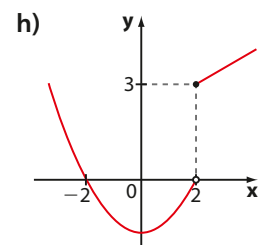
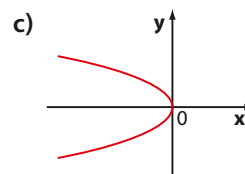
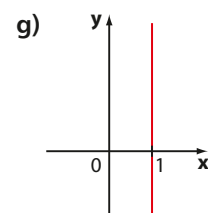
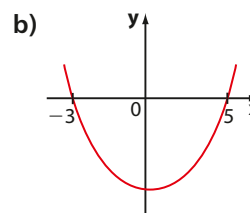
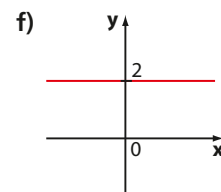
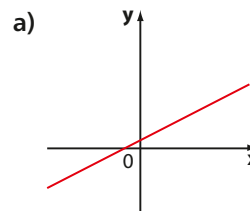
47 Construa os gráficos das funções f: A → B, sendo B ⊂ ℝ, dadas pela lei $y = 1 - x^2$ nos seguintes casos:

a) A = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3}
b) A = [−3, 3]
c) A = ℝ

48 Construa o gráfico da função f: ℝ* → ℝ* dada por $y = \frac{1}{x}$.

49 A função definida por y = 2x + b tem domínio D = ℕ, e **b** é uma constante que pode ser determinada pela leitura do gráfico ao lado. Qual é o valor de **b**?

50 O gráfico seguinte representa a função **f**, de domínio real, cuja lei é $y = ax^2 + b$, com **a** e **b** constantes. Quais são os valores de **a** e de **b**?

51 O gráfico seguinte representa a função f: D ⊂ ℝ → ℝ, sendo D = [a, b]. Sabendo que f(x) = −3x + 2, determine:

a) os valores de **a** e **b**;
b) a abscissa do ponto **P**.

52 Quais dos gráficos seguintes não representam função de domínio igual a ℝ? Explique.

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)

Análise de gráficos

Muitas informações a respeito do comportamento de uma função podem ser obtidas a partir do seu gráfico. Por meio dele, podemos ter uma visão do crescimento (ou decrescimento) da função, dos valores máximos (ou mínimos) que ela assume, do seu conjunto imagem, de eventuais simetrias etc.

Agora vamos analisar os gráficos já apresentados e observar os comportamentos das respectivas funções.

EXEMPLO 18

Observe, ao lado, o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = 2x$.

Já vimos que esse gráfico é uma reta.

Como a reta corta o eixo Ox no ponto $x = 0$, então $x = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 2x = 2 \cdot 0 = 0$.

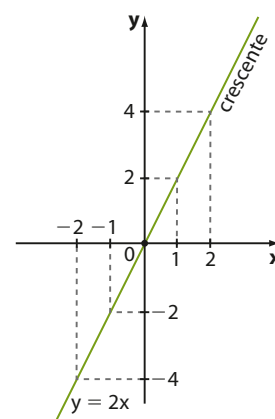
O valor de **x** que anula **y** é chamado **raiz** ou **zero** da função.

Note que, para $x > 0$, os pontos do gráfico estão acima do eixo Ox, portanto apresentam $y > 0$. Veja também que, para $x < 0$, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo Ox, portanto apresentam $y < 0$.

Quanto maior o valor dado a **x**, maior será o valor do correspondente $y = 2x$. Dizemos, por isso, que essa função é **crescente**.

Observe que todo número real **y** é imagem de algum número real **x**. De fato, dado $y_0 \in \mathbb{R}$, o número real $\mathbf{x_0}$ cuja imagem é $\mathbf{y_0}$ é $x_0 = \frac{y_0}{2}$, pois $f(x_0) = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot \frac{y_0}{2} = y_0$. Desse modo, o conjunto imagem de **f** é $Im = \mathbb{R}$.

Note também que $f(1) = 2$ e $f(-1) = -2$; $f(2) = 4$ e $f(-2) = -4$ etc.

De modo geral, se $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ e $f(-x) = 2 \cdot (-x) = -2x$; portanto, $f(-x) = -f(x)$ para todo **x**. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao ponto **O** (origem).

EXEMPLO 19

Observe, ao lado, o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = x^2 - 4$.

Já vimos que esse gráfico é uma parábola.

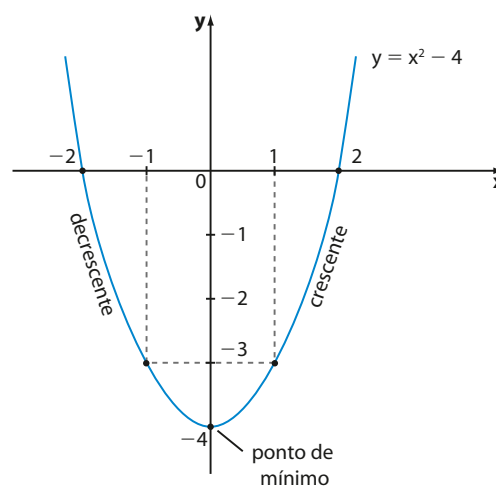
Como a parábola corta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e −2, então:

$x = 2 \Rightarrow y = x^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0$ e

$x = -2 \Rightarrow y = x^2 - 4 = (-2)^2 - 4 = 0$

−2 e 2 são as raízes dessa função.

Note que, para $x < -2$ ou $x > 2$, os pontos do gráfico estão acima do eixo Ox, portanto apresentam $y > 0$. Veja também que, para $-2 < x < 2$, os pontos do gráfico estão abaixo do eixo Ox, portanto apresentam $y < 0$.

Para $x > 0$, quanto maior o valor atribuído a **x**, maior será o valor do correspondente $y = x^2 - 4$.

Por outro lado, para $x < 0$, quanto maior o valor dado a **x**, menor será o valor do correspondente $y = x^2 - 4$.

Dizemos, então, que:

- para $x > 0$, essa função é crescente;
- para $x < 0$, essa função é decrescente.

Se $x = 0$, temos $y = -4$, e se $x \neq 0$, temos $y > -4$. Dizemos, por isso, que $(0, -4)$ é **ponto de mínimo** da função e -4 é o **valor mínimo** que a função assume. Assim, o conjunto imagem dessa função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$.

Note também que $f(1) = -3$ e $f(-1) = -3$; $f(2) = 0$ e $f(-2) = 0$ etc.

De modo geral, se $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ e $f(-x) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4$; portanto, $f(x) = f(-x)$ para todo **x**. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao eixo **y**.

Conceitos

Analisando o gráfico de uma função **f** qualquer, podemos descobrir algumas propriedades notáveis. Vejamos:

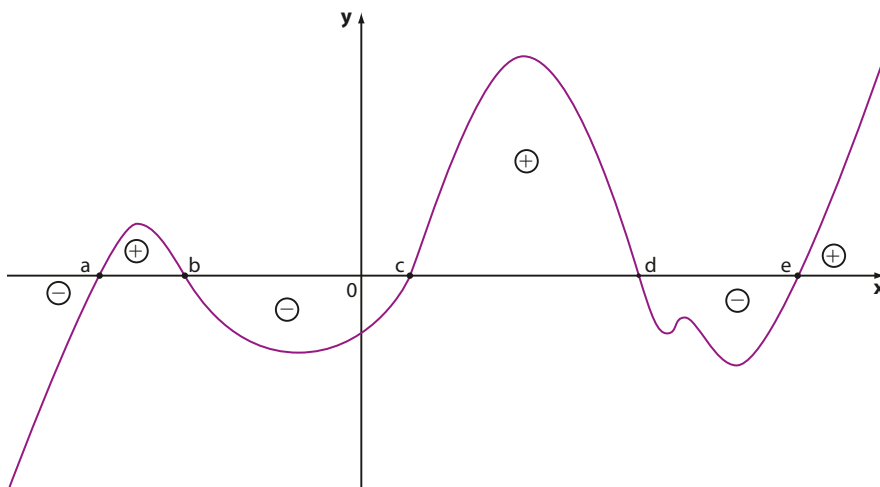
O sinal da função

Os pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox apresentam ordenadas $y = 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x_0}$ são tais que $f(x_0) = 0$. Essas abscissas $\mathbf{x_0}$ são os **zeros** ou **raízes** da função **f**.

Os pontos do gráfico situados acima do eixo Ox apresentam ordenadas $y > 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x_0}$ determinam $f(x_0) > 0$.

Já os pontos do gráfico situados abaixo do eixo Ox apresentam ordenadas $y < 0$, ou seja, suas abscissas $\mathbf{x_0}$ determinam $f(x_0) < 0$.

Note que o sinal de uma função refere-se ao sinal de **y**. Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de **x** tem-se $y > 0$ e para quais valores de **x** tem-se $y < 0$.

Observe:

Nesse gráfico, temos:

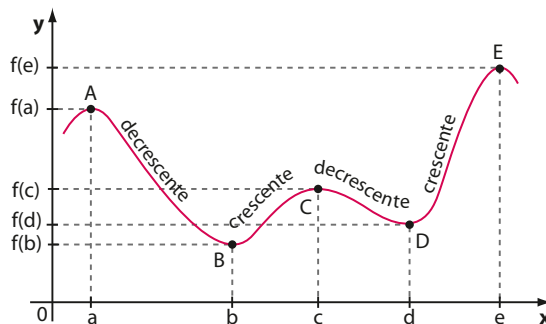
- $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, $f(c) = 0$, $f(d) = 0$ e $f(e) = 0$ (**a**, **b**, **c**, **d** e **e** são raízes);
- o sinal de **f** é:

$$y > 0 \text{ para } a < x < b, \text{ para } c < x < d \text{ ou para } x > e;$$
$$y < 0 \text{ para } x < a, \text{ para } b < x < c \text{ ou para } d < x < e.$$

Crescimento/decrescimento

Se, para quaisquer valores $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ de um subconjunto **S** (contido no domínio **D**), com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$, então **f** é crescente em **S**.

Se, para quaisquer valores $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ de um subconjunto **S**, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$, então **f** é decrescente em **S**.

Observe:

Máximos/mínimos

Seja **S** um subconjunto do domínio **D** e seja $x_0 \in S$.

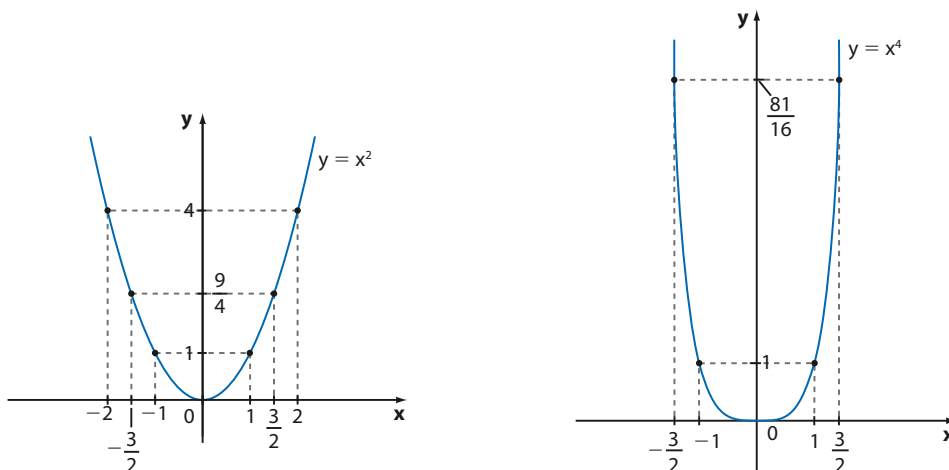
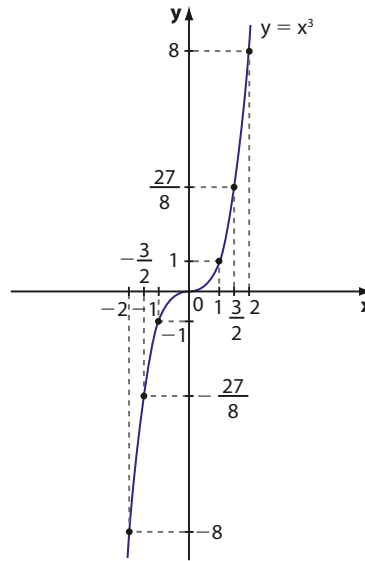
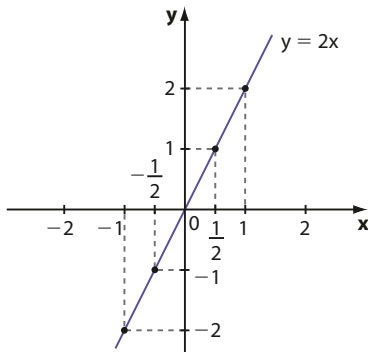
Se, para todo **x** pertencente a **S**, temos $f(x) \geqslant f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é o **ponto de mínimo** de **f** em **S**, e $f(x_0)$ é o **valor mínimo** de **f** em **S**.

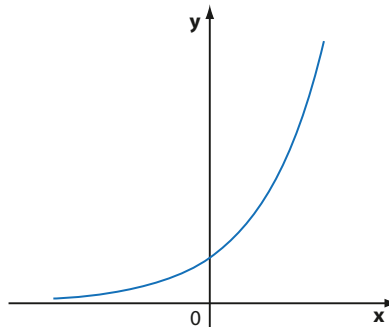
Se, para todo **x** pertencente a **S**, temos $f(x) \leqslant f(x_0)$, então $(x_0, f(x_0))$ é o **ponto de máximo** de **f** em **S**, e $f(x_0)$ é o **valor máximo** de **f** em **S**.

No gráfico anterior:

- considerando o intervalo $I = [a, c]$, temos que **B** é o ponto de mínimo de **f** em **I** e f(b) é o valor mínimo que a função assume em **I**;
- considerando o intervalo $J = [b, d]$, observamos que **C** é o ponto de máximo de **f** em **J** e f(c) é o valor máximo de **f** em **J**;
- quando consideramos o intervalo $K = [a, e]$, observamos que **B** é o ponto de mínimo de **f** em **K** e **E** é o ponto de máximo de **f** em **K**; os valores mínimo e máximo assumidos por **f** em **K** são, respectivamente, f(b) e f(e).

Simetrias

Se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in D$, então **f** tem o gráfico simétrico em relação ao eixo **y**. Nesse caso, dizemos que **f** é uma **função par**.

Se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in D$, então **f** tem o gráfico simétrico em relação à origem. Nesse caso, dizemos que **f** é uma **função ímpar**.

OBSERVAÇÃO

Existem funções que não são classificadas em nenhuma dessas categorias (par e ímpar) e seus gráficos não apresentam nenhuma das simetrias citadas anteriormente. Veja, por exemplo, o gráfico de uma função **f** que não é par nem é ímpar, representado ao lado.

Veja o exemplo a seguir:

EXEMPLO 20

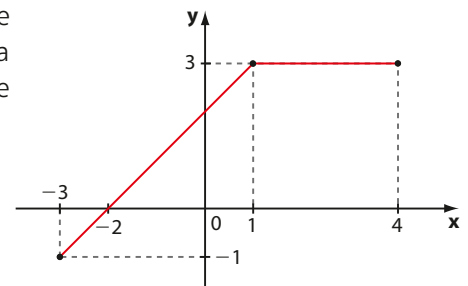
Seja $f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo gráfico está representado a seguir. Observe que:

1º) se $-3 \leqslant x < 1$, **f** é crescente; se $1 \leqslant x \leqslant 4$, temos que $f(x) = 3$; dizemos que, nesse intervalo, **f** é **constante**, pois a imagem de qualquer **x** pertencente a esse intervalo é sempre igual a 3;

2º) **f** admite -2 como raiz;

3º) o sinal de **f** é: $\begin{cases} y > 0, \text{ se } -2 < x \leqslant 4 \\ y < 0, \text{ se } -3 \leqslant x < -2 \end{cases}$;

4º) o conjunto imagem de **f** é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$;

5º) **f** não é par nem ímpar.

EXERCÍCIOS

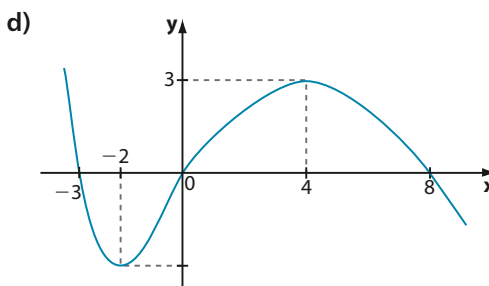
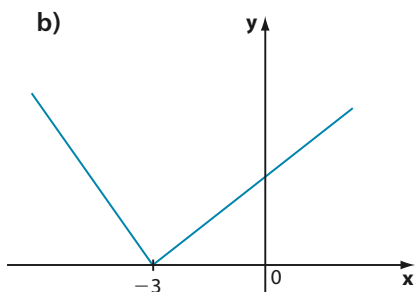
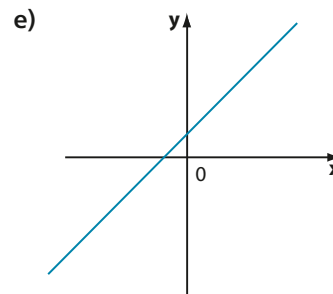
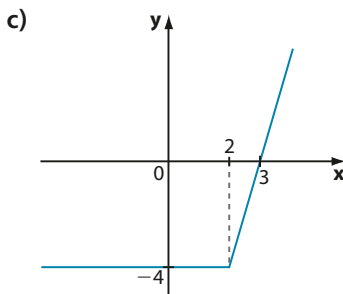
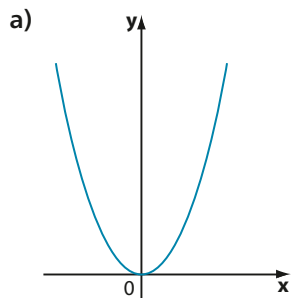
53 Em cada caso, o gráfico representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Especifique os intervalos em que a função é crescente, decrescente ou constante:

a)

b)

c)

d)

e)

54 Estude o sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujos gráficos estão representados a seguir e forneça também a(s) raiz(es), se houver.

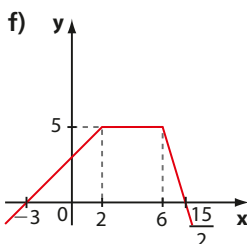
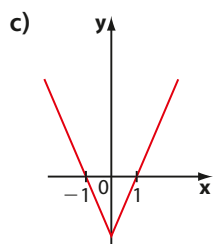
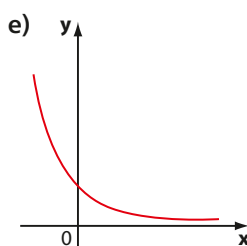
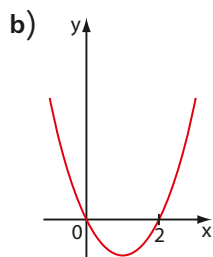
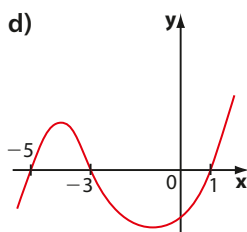
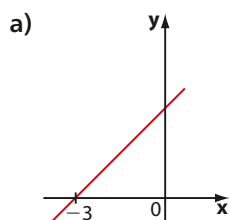
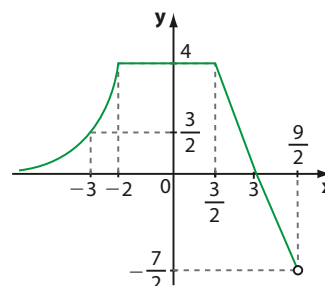
a)

b)

c)

d)

e)

f)

55 O gráfico abaixo representa uma função $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $D = \left]-\infty, \frac{9}{2}\right[$.

Determine:

a) os valores de f(–1), f(0), f(–3) e f(3);

b) os intervalos em que **f** é crescente;

c) os intervalos em que **f** é decrescente;

d) o sinal de **f**;

e) o conjunto imagem de **f**;

f) a(s) raiz(es) de **f**.

56 Em cada item é dada uma condição sobre uma função de domínio real. Faça um gráfico possível de uma função que verifique tal condição.

a) **f** é sempre decrescente.

b) **f** é crescente se $x > 2$ e decrescente se $x < 2$.

c) **f** é constante se $x < 1$ e decrescente se $x > 1$.

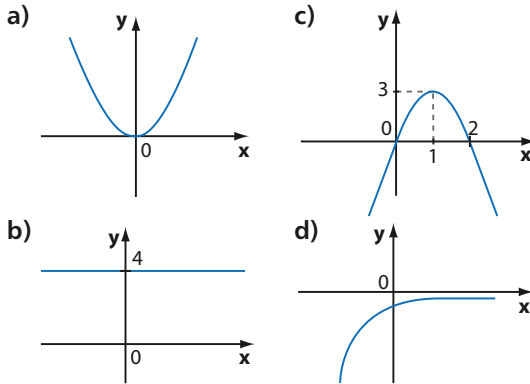
d) **f** é crescente se $x < 1$, decrescente se $x > 1$ e o sinal de **f** é $y < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

57 Determine, em cada caso, o conjunto imagem das funções de domínio real cujos gráficos estão a seguir representados:

a)

c)

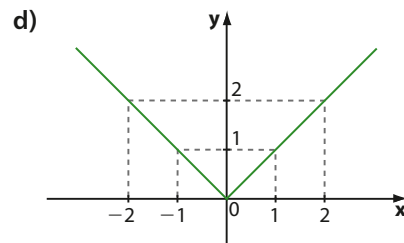
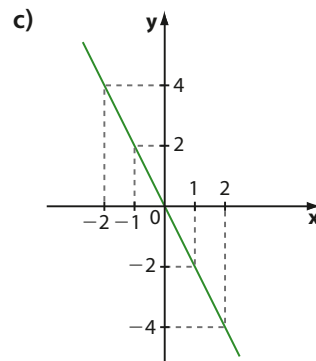
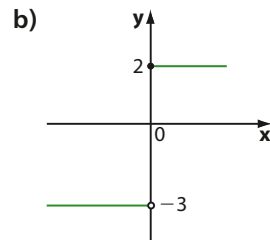
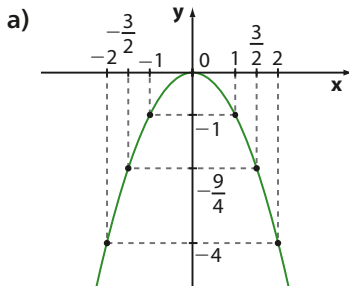
b)

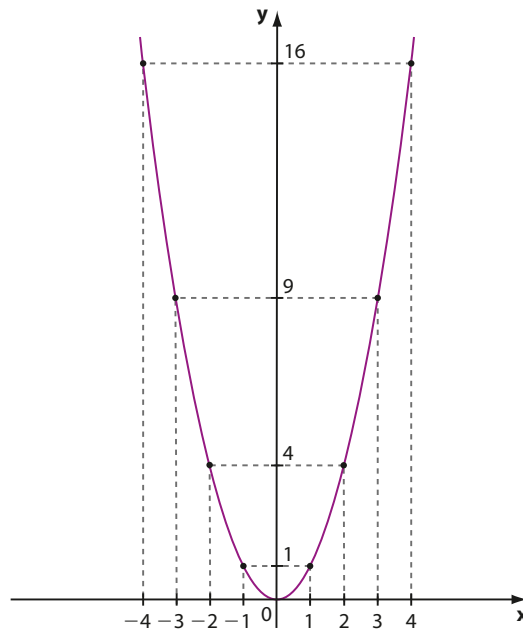
d)

58 Indique **P** para a função par, **I** para função ímpar e **O** para função que não é par nem ímpar:

a)

b)

c)

d)

Taxa média de variação de uma função

Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = x^2$, cujo gráfico está abaixo representado:

Vamos analisar de que maneira, em um determinado intervalo, os valores da imagem (isto é, da variável **y**) variam à medida que variam os valores do domínio (isto é, da variável **x**). Em outras palavras, à medida que **x** varia de $\mathbf{x}_1$ até $\mathbf{x}_2$, analisaremos como se dá a variação das imagens de $f(x_1)$ a $f(x_2)$.

Acompanhe a tabela seguinte, considerando inicialmente o intervalo em que **f** é crescente, isto é, $x \geqslant 0$:

	x_1	x_2	Δx: variação de x $\Delta x = x_2 - x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	Δy: variação de y $\Delta y = y_2 - y_1$
(I)	0	1	$\Delta x = 1 - 0 = 1$	0	1	$\Delta y = 1 - 0 = 1$
(II)	1	2	$\Delta x = 2 - 1 = 1$	1	4	$\Delta y = 4 - 1 = 3$
(III)	2	3	$\Delta x = 3 - 2 = 1$	4	9	$\Delta y = 9 - 4 = 5$
(IV)	3	4	$\Delta x = 4 - 3 = 1$	9	16	$\Delta y = 16 - 9 = 7$

Nos itens (I), (II), (III) e (IV), à medida que **x** aumenta uma unidade, os valores de **y** aumentam 1, 3, 5 e 7 unidades, respectivamente.

Observe o sinal (positivo) de Δy.

Podemos perceber que o "ritmo" de variação de **y** em relação à variação de **x** difere de acordo com os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) considerados.

Considerando agora o intervalo em que **f** é decrescente ($x \leqslant 0$), montamos a tabela:

	x_1	x_2	$\Delta x = x_2 - x_1$	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$\Delta y = y_2 - y_1$
(V)	−4	−3	$\Delta x = 1$	16	9	$\Delta y = 9 - 16 = -7$
(VI)	−3	−2	$\Delta x = 1$	9	4	$\Delta y = 4 - 9 = -5$
(VII)	−2	−1	$\Delta x = 1$	4	1	$\Delta y = 1 - 4 = -3$
(VIII)	−1	0	$\Delta x = 1$	1	0	$\Delta y = 0 - 1 = -1$

Nos itens (V), (VI), (VII) e (VIII), à medida que **x** aumenta uma unidade, os valores de **y** diminuem 7, 5, 3 e 1 unidade, respectivamente.

Observe o sinal (negativo) de Δy.

Veja a seguinte definição:

> Seja **f** uma função definida por $y = f(x)$; sejam $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ dois valores do domínio de **f**, $(x_1 \neq x_2)$, cujas imagens são, respectivamente, $f(x_1)$ e $f(x_2)$.
>
> O quociente $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ recebe o nome de **taxa média de variação da função f**, para **x** variando de $\mathbf{x_1}$ até $\mathbf{x_2}$.

Vamos retomar a função $f(x) = x^2$ apresentada na página anterior e calcular a taxa média de variação de **f**, para **x** variando de:

a) 0 a 1

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

b) 2 a 3

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{9 - 4}{1} = 5$$

c) 1 a 3

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

d) 3 a 1

$$\frac{f(1) - f(3)}{1 - 3} = \frac{1 - 9}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Observe que as taxas médias de variação calculadas nos itens *c* e *d* coincidem, como mostra a observação anterior.

e) −4 a −1

$$\frac{f(-1) - f(-4)}{-1 - (-4)} = \frac{1 - 16}{3} = \frac{-15}{3} = -5$$

OBSERVAÇÕES

- A taxa média de variação depende dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tomados.
- Note que $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{-[f(x_1) - f(x_2)]}{-(x_1 - x_2)} = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Desse modo, verificamos que é indiferente escolher o sentido em que calculamos a variação (de $\mathbf{x_1}$ para $\mathbf{x_2}$ ou de $\mathbf{x_2}$ para $\mathbf{x_1}$), desde que mantenhamos o mesmo sentido no numerador e no denominador.

Veja outros exemplos:

EXEMPLO 21

Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2x + 3$ cujo gráfico está representado ao lado. Vamos calcular a taxa média de variação de **f** para **x** variando de:

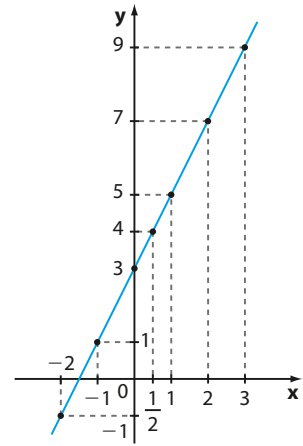
a) −2 a 0

$$\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2$$

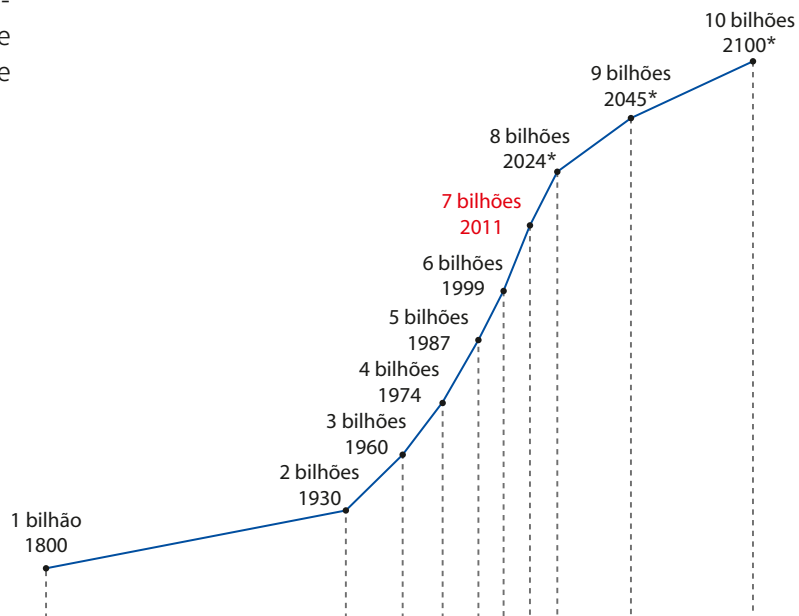
b) $\frac{1}{2}$ a 3

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ f(3) = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(3) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{9 - 4}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{\frac{5}{2}} = 2$$

c) −1 a 1

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Observe, nesse exemplo, que o valor encontrado para a taxa média de variação da função **f** é o mesmo, independente dos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) considerados. No capítulo seguinte, veremos que se trata de uma propriedade particular das funções polinomiais do 1º grau.

EXEMPLO 22

O gráfico ao lado mostra a evolução da população mundial no decorrer do tempo e sua projeção para o fim deste século (até o ano de 2100).

Fonte: Revista *Veja*, edição 2241, 2 nov. 2011, p. 124-125.

* Projeção segundo a qual, em 2100, a população estabiliza ou cai um pouco.

Vamos calcular inicialmente a taxa média de variação da população, em pessoas/ano, de 1800 a 2011:

$$\frac{7\,000\,000\,000 - 1\,000\,000\,000}{2011 - 1800} = \frac{6\,000\,000\,000}{211} \simeq 28\,436\,019 \simeq 28{,}44 \text{ milhões}$$

A taxa média encontrada não significa, obrigatoriamente, que a população mundial aumentou 28,44 milhões de pessoas por ano no período considerado. Há períodos em que a população cresceu mais devagar (por exemplo, de 1800 a 1930) e períodos em que a população cresceu mais rápido (de 1999 a 2011, por exemplo). Quando analisamos globalmente, todas as variações ocorridas equivalem, em média, a um aumento de 28,44 milhões de pessoas por ano.

A seguir, vamos comparar o ritmo de crescimento da população em três períodos:

- 1º período: de 1800 a 1930

  A taxa média de variação, em pessoas/ano, é:

  $$\frac{2\,000\,000\,000 - 1\,000\,000\,000}{1930 - 1800} = \frac{1\,000\,000\,000}{130} \simeq 7\,692\,308 \simeq 7{,}69 \text{ milhões}$$

  Dizemos que a população mundial aumentou, no período considerado (1800 a 1930), em média, 7,69 milhões de pessoas/ano (valem as ressalvas feitas para o período anterior).

- 2º período: de 1987 a 2011

  A taxa média de variação, em pessoas/ano, é:

  $$\frac{7\,000\,000\,000 - 5\,000\,000\,000}{2011 - 1987} = \frac{2\,000\,000\,000}{24} \simeq 83\,333\,334 \simeq 83{,}3 \text{ milhões}$$

  Observe que esse ritmo de aumento é quase 11 vezes o ritmo de aumento da população humana registrado no 1º período, de 1800 a 1930.

- 3º período: de 2045 a 2100 (projeções)

  A taxa média de variação, em pessoas/ano, é:

  $$\frac{10\,000\,000\,000 - 9\,000\,000\,000}{2100 - 2045} = \frac{1\,000\,000\,000}{55} \simeq 18\,181\,818 \simeq 18{,}2 \text{ milhões}$$

  Esse valor indica uma tendência de desaceleração do crescimento populacional até o final deste século. Observe que esse valor é pouco maior que a quinta parte da taxa calculada no 2º período.

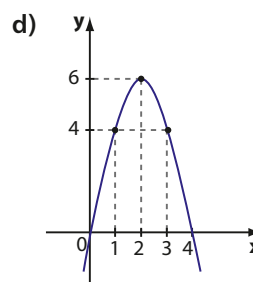
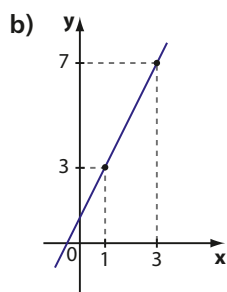
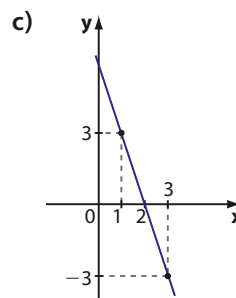
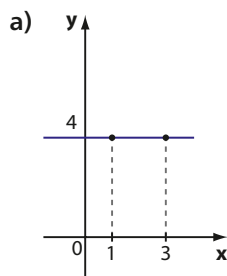
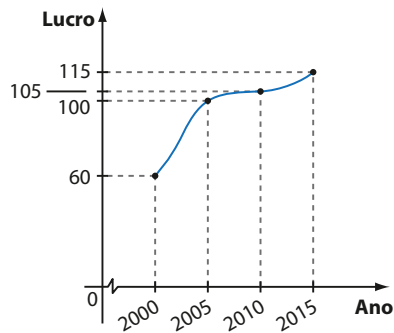
EXERCÍCIOS

59 Em cada caso, calcule a taxa média de variação da função cujo gráfico está representado, quando **x** varia de 1 a 3:

a)

c)

b)

d)

60 O gráfico mostra o lucro (em milhares de reais) de uma pequena empresa, de 2000 a 2015:

Compare o ritmo de crescimento do lucro da empresa, calculando a taxa média de variação do lucro nos 5 primeiros e nos 5 últimos anos do período considerado.

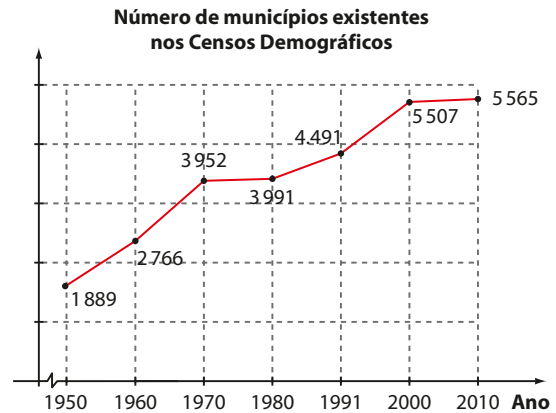
61 Em cada item, calcule a taxa média de variação da função dada quando **x** varia de 1 a 4:

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$.

b) g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 4x$.

c) h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

d) i: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $i(x) = -3x + 5$.

62 O gráfico mostra a evolução da quantidade de municípios no Brasil de 1950 a 2010 (datas dos Censos Demográficos).

Fonte: IBGE. Censo demográfico 1950/2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=CD96&t=numero-municipios-existentes-censos-demograficos>. Acesso em: 4 mar. 2016.

a) Para a função representada pelo gráfico, determine a taxa média de variação de:

i) 1960 a 1970

ii) 1970 a 1980

iii) 1950 a 2010

b) Entre quais censos: 1960-1970 ou 1991-2000 o número de municípios no Brasil cresceu mais rápido?

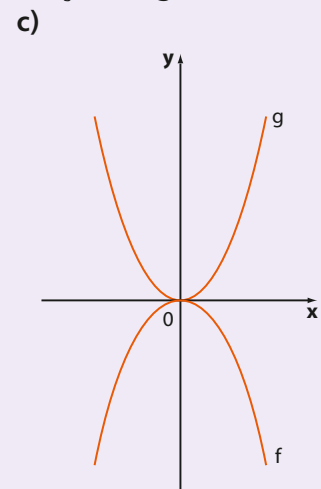
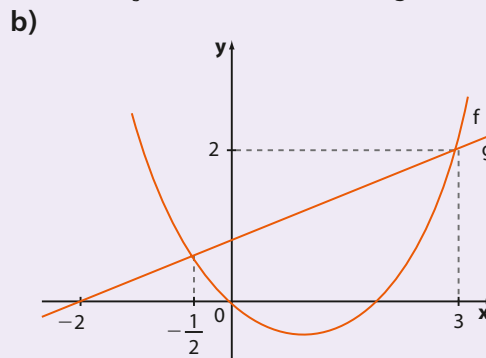
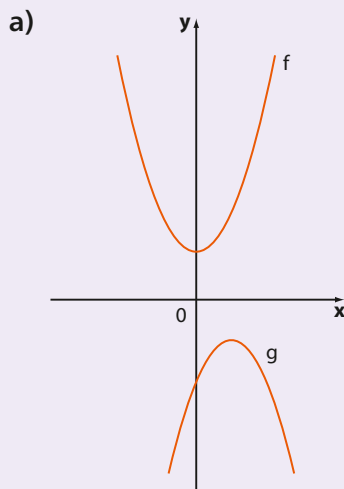
DESAFIO

Sejam **f** e **g** funções cujo domínio é $\mathbb{R}$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, define-se a função **h** pela lei $h(x) = \sqrt{f(x) - g(x)}$. Obtenha, em cada caso, o domínio da função **h**, sendo dados os gráficos das funções **f** e **g**:

a)

b)

c)

Aplicações

A velocidade escalar média e a aceleração escalar média

O conceito de aceleração escalar média nos permite afirmar que, a cada segundo, a velocidade do carro **diminui uniformemente** em 5 m/s, o que explica a forma retilínea e descendente do gráfico.

1ª situação:

Viajando em um ônibus para a praia, Cléber observou que exatamente às 10 h o ônibus passou pelo km 56 da rodovia; às 11 h 30 min, o ônibus passava pelo km 191 da mesma rodovia.

Observe que, nesse período de 1,5 h (11,5 h − 10 h), a variação da posição ocupada pelo ônibus é 191 km − 56 km = 135 km.

A razão $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(191 - 56)\text{ km}}{(11,5 - 10)\text{ h}} = \frac{135\text{ km}}{1,5\text{ h}} =$ $= 90$ km/h representa a taxa média de variação da posição ou variação do espaço (Δs) em relação ao intervalo de tempo (Δt) da viagem.

Esse quociente é a conhecida **velocidade escalar média**. Isso não significa, necessariamente, que o ônibus manteve a velocidade de 90 km/h em todo o percurso. Em alguns trechos ele pode ter ido mais rápido ou mais devagar. O valor da velocidade escalar média nos dá apenas uma ideia global sobre o movimento do ônibus nesse período.

2ª situação:

Um carro está viajando em uma via expressa. Em um certo momento, quando o velocímetro apontava a velocidade de 72 km/h, o motorista aciona os freios ao observar um congestionamento à sua frente. Em 4 s de frenagem, o veículo diminui uniformemente a velocidade até parar.

Vamos calcular a taxa média de variação da velocidade, considerando o intervalo de tempo decorrido do instante em que o motorista aciona os freios até a parada:

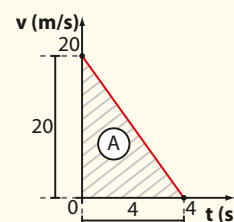
$$v_1 = 72\text{ km/h} = \frac{72\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}} = 20\text{ m/s}$$

$v_2 = 0$ km/h ou 0 m/s (parada do veículo após 4 segundos)

A taxa é:

$$\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 20}{4 - 0} = -5\text{ m/s}^2$$

Isso significa que a velocidade do carro variou (diminuiu – veja o sinal negativo obtido), em média, 5 m/s a cada segundo. Esse quociente representa a taxa média de variação da velocidade em relação ao tempo e é conhecido como **aceleração escalar média**.

Podemos avaliar a distância percorrida pelo carro durante a frenagem até parar com base no gráfico ao lado, da velocidade (**v**) × tempo (**t**).

Nas aulas de Física você verá que a distância percorrida é numericamente igual à área **A**, destacada no gráfico.

Como $A_{\triangle} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{20 \cdot 4}{2} = 40$, a distância percorrida foi 40 m.

Porém, precisamos ter em mente que, entre o motorista notar o congestionamento e acionar os freios, existe um intervalo de tempo correspondente à transmissão do impulso nervoso entre a parte receptora (olho, que vê um obstáculo) e a parte do corpo correspondente à ação (pés, que acionam os freios): é o chamado **tempo de reação**. Supondo que esse tempo seja igual a 1 segundo, podemos estimar que a distância percorrida pelo carro, do momento em que o motorista vê o congestionamento até a parada, é composta pelos 40 metros com os freios acionados mais a distância percorrida ao longo do tempo de reação, dada por:

$$20\text{ m/s} \cdot 1\text{ s} = 20\text{ m}$$

Assim, a distância total passa para 60 m (50% maior que no caso anterior). Por isso é importante que o motorista não exceda os limites de velocidade e que mantenha uma distância segura do veículo à sua frente.

Fontes de pesquisa:
TAOKA, G. T. *Tempo de reação para frenagem de motoristas não alertados*. (Trad.) LEHFELD, Gilberto Monteiro. Disponível em: <www.cetsp.com.br/media/20608/nt148.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2016; DETRAN-PR. *Comportamentos seguros no trânsito.* Disponível em: <www.detran.pr.gov.br/modules/catasg/servicos-detalhes.php?tema=motorista&id=345>. Acesso em: 4 mar. 2016.

CAPÍTULO 4

Função afim

Introdução

Antes de apresentarmos o conceito de função afim, vejamos alguns exemplos envolvendo questões do dia a dia.

EXEMPLO 1

Antônio Carlos pegou um táxi para ir à casa de sua namorada, que fica a 15 km de distância.

O valor cobrado engloba o preço da parcela fixa (bandeirada) de R$ 4,00 mais R$ 2,20 por quilômetro rodado (não estamos considerando aqui o tempo em que o táxi ficaria parado em um eventual congestionamento).

Ou seja, ele pagou 15 · R$ 2,20 = R$ 33,00 pela distância percorrida mais R$ 4,00 pela bandeirada; isto é:

$$\text{R\$ } 33{,}00 + \text{R\$ } 4{,}00 = \text{R\$ } 37{,}00$$

Se a casa da namorada ficasse a 25 km de distância, Antônio Carlos pagaria, pela corrida:

$$25 \cdot \text{R\$ } 2{,}20 + \text{R\$ } 4{,}00 = \text{R\$ } 59{,}00.$$

Podemos notar que, para cada distância **x** percorrida pelo táxi, há certo preço **p** para a corrida.

Nesse caso, a fórmula que expressa **p** (em reais) em função de **x** (em quilômetros) é:

$$p(x) = 2{,}20 \cdot x + 4{,}00$$

que é um exemplo de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.

EXEMPLO 2

Um corretor de imóveis recebe mensalmente da empresa em que trabalha um salário composto de duas partes:

- uma ajuda de custo de R$ 700,00;
- uma parte variável, que corresponde a um adicional de 2% sobre o valor das vendas realizadas no mês.

Em certo mês, as vendas somaram R$ 300000,00.

Para calcular quanto o corretor recebeu de salário, fazemos:

$$700 + 2\% \cdot 300000 = 700 + \frac{2}{100} \cdot 300000 = 700 + 6000 = 6700$$

Salário: R$ 6700,00

Em outro mês, as vendas somaram apenas R$ 80000,00. Nesse mês o corretor recebeu:

$$700 + 2\% \cdot 80000 = 700 + 1600 = 2300$$

Salário: R$ 2300,00

Observamos que, para cada total **x** de vendas no mês, há um certo salário **s** pago ao corretor.

Nesse caso, a fórmula que expressa **s** em função de **x** é:

$$s(x) = 700 + 0{,}02 \cdot x$$

que é um exemplo de função afim.

EXEMPLO 3

Restaurantes *self-service* podem ser encontrados em todas as regiões do Brasil. Em um deles, cobra-se R$ 3,80 por cada 100 g de comida. Dois amigos serviram-se, nesse restaurante, de 620 g e 410 g. Vamos calcular quanto cada um pagou.

Inicialmente, observe que R$ 3,80 por 100 g equivale a R$ 38,00 por quilograma. Assim, podemos calcular quanto cada amigo pagou. Quem se serviu de 620 g = 0,62 kg, pagou $0,62 \cdot 38 = 23,56$ reais; o outro amigo pagou $0,41 \cdot 38 = 15,58$ reais.

ANA DRUZIAN/FOTOARENA

O valor (**y**) pago, em reais, varia de acordo com a quantidade de comida (**x**), em quilogramas. A lei que relaciona **y** e **x**, nesse caso, é: $y = 38 \cdot x$, que é outro exemplo de função polinomial do 1º grau.

Chama-se **função polinomial do 1º grau**, ou **função afim**, qualquer função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que **a** e **b** são números reais dados e $a \neq 0$.

Na lei $f(x) = ax + b$, o número **a** é chamado **coeficiente** de **x**, e o número **b** é chamado **termo constante** ou **independente**.

Veja os exemplos a seguir.

- $f(x) = 5x - 3$, em que $a = 5$ e $b = -3$.
- $f(x) = -2x - 7$, em que $a = -2$ e $b = -7$.
- $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{5}$, em que $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{5}$.
- $f(x) = 11x$, em que $a = 11$ e $b = 0$.
- $y = -x + 3$, em que $a = -1$ e $b = 3$.
- $y = -2,5x + 1$, em que $a = -2,5$ e $b = 1$.

Função linear

Um caso particular de função afim é aquele em que $b = 0$. Nesse caso, temos a função afim **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = ax$ com **a** real e $a \neq 0$, que recebe a denominação especial de **função linear**.

Exemplos:

- $f(x) = 3x$, em que $a = 3$ e $b = 0$.
- $f(x) = -4x$, em que $a = -4$ e $b = 0$.
- $f(x) = x$, em que $a = 1$ e $b = 0$. Nesse caso a função **f** recebe o nome de **função identidade**.

Veja, na página 77, um texto que relaciona grandezas proporcionais com funções lineares.

Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy (isto é, é uma reta não paralela a nenhum dos eixos coordenados).

Demonstração:

Tomemos três pontos distintos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ pertencentes ao gráfico dessa função. Vamos mostrar que **A**, **B** e **C** estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta.

Como **A**, **B** e **C** são pontos do gráfico da função, suas coordenadas satisfazem a lei $y = ax + b$, com **a** e **b** reais e $a \neq 0$. Temos:

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1 + b & (1) \\ y_2 = a \cdot x_2 + b & (2) \\ y_3 = a \cdot x_3 + b & (3) \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro, (2) de (3), encontramos:

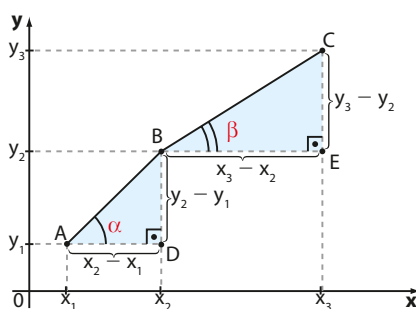
$$y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$

Daí, temos:

$$\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_2}{x_2 - x_1} \quad (4)$$

Vamos supor, por absurdo, que **A**, **B** e **C** não pertencessem a uma mesma reta, como mostra a figura:

Observemos os triângulos ABD e BCE, que são retângulos ($\hat{D} = \hat{E} = 90°$) e têm lados proporcionais, pois, de acordo com (4), temos:

$$\frac{EC}{DB} = \frac{BE}{AD}$$

Nesse caso, os triângulos ABD e BCE seriam semelhantes e, portanto, seus ângulos correspondentes seriam congruentes, de onde se concluiria que $\alpha = \beta$, o que não poderia ocorrer.

A contradição vem do fato de supormos que **A**, **B** e **C** não pertencem a uma mesma reta.

Assim, **A**, **B** e **C** estão alinhados, isto é, pertencem a uma mesma reta.

Desse modo, está provado que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau é uma reta.

OBSERVAÇÃO

Provada essa propriedade, podemos, de agora em diante, construir o gráfico de uma função afim utilizando apenas dois de seus pontos, pois, como sabemos da Geometria, dados dois pontos distintos existe uma única reta passando por eles.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

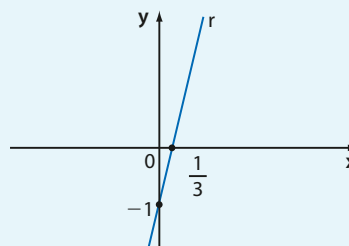
1 Construa o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$.

Solução:

Basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua:

- Para $x = 0$, temos $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$; portanto, um ponto é $(0, -1)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = 3x - 1$; portanto, $x = \frac{1}{3}$ e o outro ponto é $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

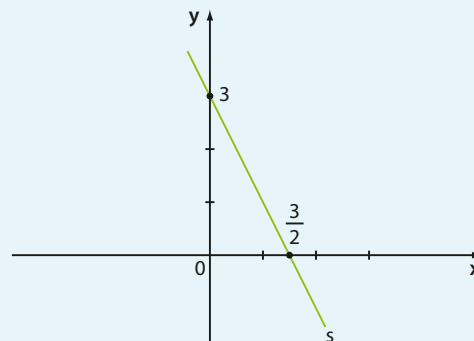
Marcamos os pontos $(0, -1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ no plano cartesiano e ligamos os dois com a reta **r**.

x	y
0	−1
$\frac{1}{3}$	0

A lei $y = 3x - 1$ é também chamada **equação da reta r**.

2 Construa o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = -2x + 3$.

Solução:

- Para $x = 0$, temos $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$; portanto, um ponto é $(0, 3)$.
- Para $y = 0$, temos $0 = -2x + 3$; portanto, $x = \frac{3}{2}$ e o outro ponto é $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

x	y
0	3
$\frac{3}{2}$	0

A lei $y = -2x + 3$ é também chamada **equação da reta s**.

3 Obtenha a equação da reta que passa pelos pontos $P(-1, 3)$ e $Q(1, 1)$.

Solução:

A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ tem equação $y = a \cdot x + b$. Precisamos determinar os valores de **a** e **b**.

Como $(-1, 3)$ pertence à reta, temos:

$$3 = a \cdot (-1) + b, \text{ ou seja, } -a + b = 3$$

Como $(1, 1)$ pertence à reta, temos:

$$1 = a \cdot 1 + b, \text{ ou seja, } a + b = 1$$

Assim, **a** e **b** satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

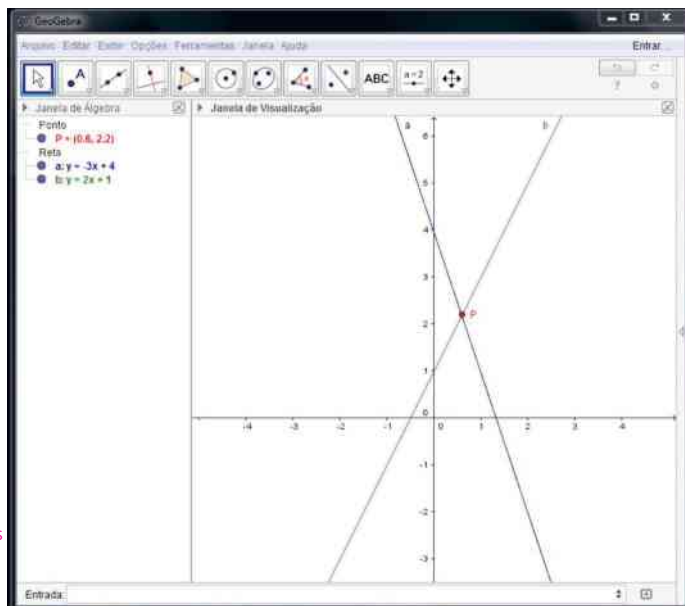
cuja solução é $a = -1$ e $b = 2$. Portanto, a equação procurada é $y = -x + 2$.

Interseção de retas

O ponto $P(x_0, y_0)$ de interseção de duas retas concorrentes pertence, naturalmente, a cada uma das retas. Por esse motivo, suas coordenadas devem satisfazer, simultaneamente, às leis das funções afim que representam tais retas.

No gráfico ao lado podemos ver as retas **a** e **b** que representam as funções $y = -3x + 4$ e $y = 2x + 1$, respectivamente. O gráfico foi feito em um *software* livre de Matemática chamado GeoGebra.

GEOGEBRA

Professor, o uso de *softwares* livres (aqueles que podem ser baixados gratuitamente da internet) de Matemática, como o GeoGebra, o Winplot e o Graphmatica, é um importante aliado no processo de ensino e aprendizagem em Matemática. No estudo das funções, neste volume, esses *softwares* podem ajudar o estudante a compreender melhor o traçado de algumas curvas (como a parábola), as propriedades de gráficos, translações etc. Não deixe de ler algumas sugestões nas Orientações Didáticas e incentive os estudantes a usá-los.
Para obter as retas **a** e **b** mostradas na ilustração, basta digitar, separadamente, cada uma das leis que as definem, em "entrada", disponível logo abaixo do plano cartesiano, ao "abrir" a janela da álgebra no GeoGebra.

Assim, a solução do sistema formado pelas duas leis $\begin{cases} y = -3x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ fornece as coordenadas (x_0, y_0) de **P**.

Igualando, temos:

$$-3x + 4 = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Substituindo esse valor de **x** em qualquer uma das equações, obtemos $y = \frac{11}{5} = 2{,}2$. Assim, $P\left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

PENSE NISTO:

É possível que um sistema formado pelas leis de duas funções afins não tenha solução? Qual é a interpretação geométrica nesse caso?

Sim. Se o sistema não tem solução, as duas retas não se intersectam, isto é, são retas paralelas. Veja, por exemplo, o item **c** do exercício 14, ou as retas a: $y = 2x$ e b: $y = 2x + 3$.

Função constante

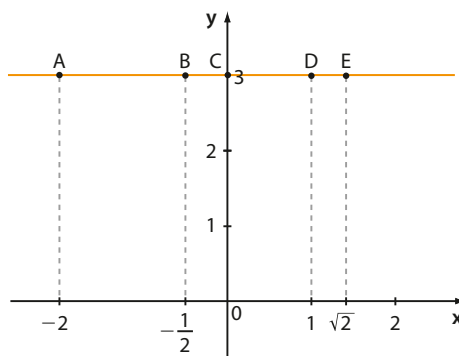
Vimos que a função afim **f** é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $y = ax + b$, com $a \neq 0$.

Se em $y = ax + b$ temos $a = 0$, a lei não define uma função afim, mas sim outro tipo de função denominada **função constante**.

Portanto, chama-se função constante uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela lei $y = 0x + b$, ou seja, $y = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 4

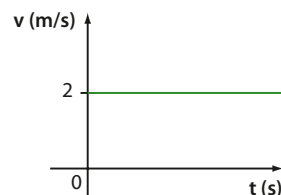
Vamos construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = 3$ para todo **x** real.

x	y	Ponto
-2	3	A
$-\frac{1}{2}$	3	B
0	3	C
1	3	D
$\sqrt{2}$	3	E

O gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

EXEMPLO 5

Uma pessoa caminha com velocidade escalar **v** constante de 2 m/s, descrevendo um movimento uniforme.

O gráfico da função que relaciona **v** com o tempo **t**, em segundos, é representado ao lado.

Trata-se da função constante definida, para $x \geq 0$, por $y = 2$.

EXERCÍCIOS

1 Um técnico em informática cobra R$ 45,00 a visita e um adicional de R$ 80,00 por hora de trabalho, com valor proporcional no fracionamento da hora.

a) Quanto o técnico receberia por um serviço de 2,5 h?

b) Dispondo-se de R$ 400,00, seria possível contratar esse técnico para um serviço de 4 horas?

c) Qual é a lei da função que representa o valor **v**, em reais, de um serviço de **x** horas feito pelo técnico? Esboce o gráfico dessa função.

2 A um mês de uma competição, um atleta de 75 kg é submetido a um treinamento específico para aumento de massa muscular, em que se anunciam ganhos de 180 gramas por dia. Supondo que isso realmente ocorra, faça o que se pede.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

a) Determine a massa do atleta após uma semana de treinamento.

b) Encontre a lei que relaciona a massa do atleta (**m**), em quilogramas, em função do número de dias de treinamento (**n**).

c) É possível que o atleta atinja ao menos 80 kg em um mês de treinamento?

3 Um hotel oferece a seus hóspedes duas opções para uso da rede *wi-fi* no acesso à internet:

1ª) Pagamento de uma taxa fixa de R$ 18,00 por dia com acesso ilimitado.

2ª) Cobrança de R$ 2,50 por hora de acesso, com valor proporcional no fracionamento da hora (minuto).

a) Escreva, para cada opção oferecida, a lei da função que relaciona o preço **p**, em reais, pago por esse serviço, em função do tempo **t** (com $0 < t < 24$), em horas de acesso.

b) Se escolher a 1ª opção, quanto pagará a mais um cliente que usou a rede por 5 horas em certo dia, na comparação com a 2ª opção?

c) Por quanto tempo de uso diário da rede *wi-fi* seria indiferente a escolha de qualquer um dos planos?

4 Uma caixa-d'água, de volume 21 m³, inicialmente vazia, começa a receber água de uma fonte à razão de 15 litros por minuto. Lembre-se de que 1 m³ equivale a 1 000 litros.

a) Quantos litros de água haverá na caixa após meia hora?

b) Após **x** minutos de funcionamento da fonte, qual será o volume (**y**) de água na caixa, em litros?

c) Após **x** minutos de funcionamento da fonte, qual será o volume (**y**) de água (em litros) necessário para preencher completamente a caixa?

d) Em quanto tempo a caixa estará cheia?

5 Faça os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

a) $y = x + 1$

b) $y = -2x + 4$

c) $y = 3x + 2$

d) $y = -x - 2$

e) $y = \frac{5}{2}$

f) $y = -1$

6 Construa o gráfico de cada uma das funções afim, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas pelas leis:

a) $y = 2x$

b) $y = -3x$

c) $y = \frac{1}{2}x$

d) $y = -x$

Após construir os quatro gráficos, é possível identificar uma propriedade comum a todos. Qual é essa propriedade?

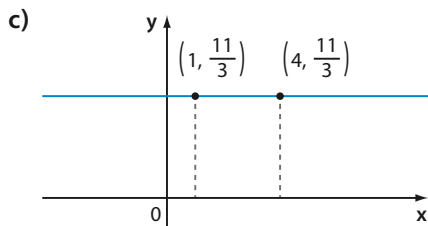
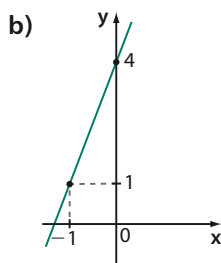
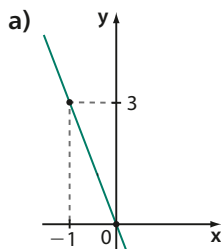
7 Uma reta passa pelos pontos $(-1, 5)$ e $(2, -4)$. Qual é a lei da função representada por essa reta?

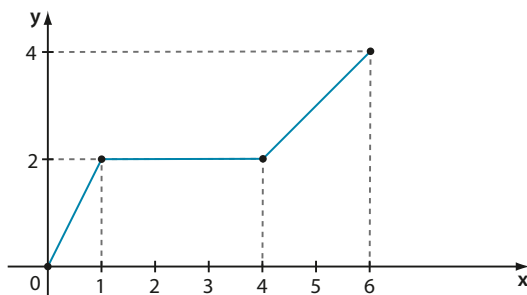
8 Qual é a equação da reta que passa pelos pontos $(-4, 2)$ e $(2, 5)$?

9 Obtenha, em cada caso, a lei da função cujo gráfico é mostrado a seguir.

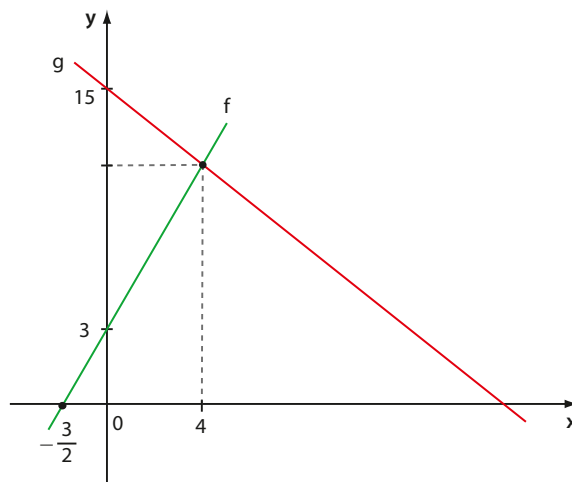
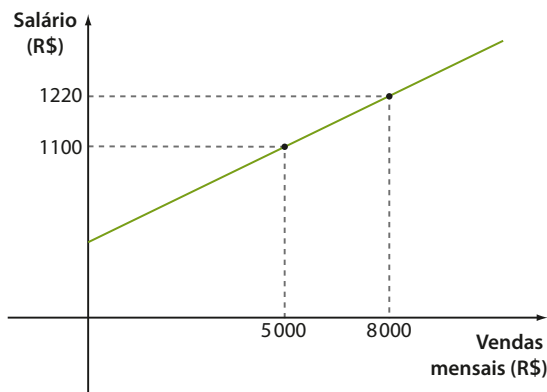
a)

b)

c)

10 Em uma corrida de táxi é cobrado um valor fixo, conhecido como bandeirada, acrescido de outro valor que depende do número de quilômetros rodados. Sabendo que a corrida de 10 km custou R$ 48,80 e outra de 25 km custou R$ 111,80, determine o valor cobrado por uma corrida de 18 km.

11 Considere uma função **f**, cujo domínio é $[0, 6]$, representada no gráfico a seguir.

Calcule:

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **b)** $f(3)$ **c)** $f\left(\frac{11}{2}\right)$

12 Na figura estão representados os gráficos de duas funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = ax + b$. Calcule o valor de $g(8)$.

13 Um vendedor recebe um salário fixo e mais uma parte variável, correspondente à comissão sobre o total vendido em um mês. O gráfico seguinte informa algumas possibilidades de salário (**y**) em função das vendas (**x**).

a) Encontre a lei da função cujo gráfico é essa reta.

b) Qual é a parte fixa do salário?

c) Alguém da loja disse ao vendedor que, se ele conseguisse dobrar as vendas, seu salário também dobraria. Isso é verdade? Explique.

14 Em cada caso, determine o ponto de interseção das retas **r** e **s** que representam as funções **f** e **g** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por:

a) $f(x) = 3x$ e $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = 2x - 6$

c) $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x - 4$

Grandezas diretamente proporcionais

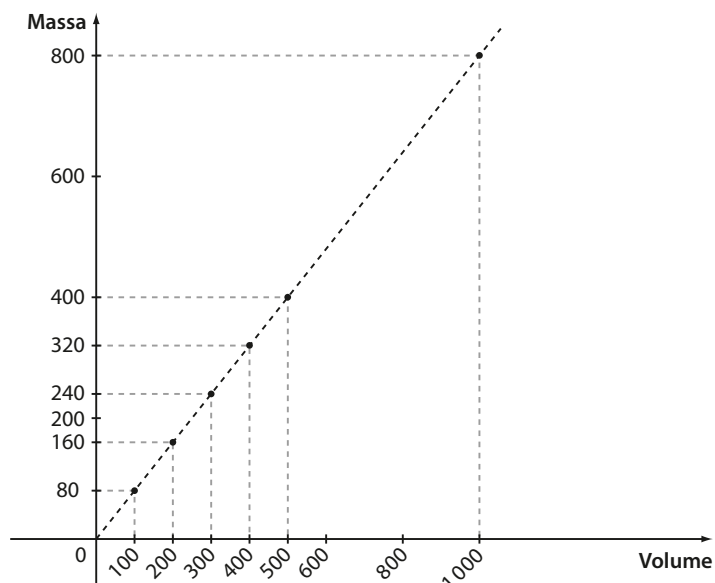
Um técnico, tendo à sua disposição uma balança e alguns recipientes de vidro, mediu a massa de alguns volumes diferentes de azeite de oliva e montou a seguinte tabela:

Experiência nº	Volume (em mililitros)	Massa (em gramas)
1	100	80
2	200	160
3	300	240
4	400	320
5	500	400
6	1 000	800
7	2 000	1 600

SÉRGIO DOTTA JR./THE NEXT

Técnico pesando azeite em um laboratório.

Podemos observar que, para cada volume, existe em correspondência uma única massa, ou seja, a massa é função do volume.

Com os resultados obtidos, o técnico construiu o gráfico abaixo.

Ele notou, então, que havia vários pontos alinhados determinando uma reta, a qual passa pela origem do sistema cartesiano, ou seja, tinha obtido o gráfico de uma **função linear**.

Ao observar os pares de valores da tabela, o técnico percebeu que, em todas as experiências, a razão entre a massa e o volume era 0,8:

$$\frac{80}{100} = 0{,}8 \qquad \frac{160}{200} = 0{,}8 \qquad \ldots \qquad \frac{400}{500} = 0{,}8 \quad \ldots$$

Ele ainda constatou que:

- quando o volume dobrava, a massa também dobrava;
- quando o volume triplicava, a massa também triplicava;
- se o volume era multiplicado por 10, a massa também era multiplicada por 10; e assim por diante.

O técnico concluiu, então, que o volume e a massa de certa substância são **grandezas diretamente proporcionais**. Para uma dada substância, o quociente da massa (**m**) pelo correspondente volume (**V**) é chamado **densidade**. A densidade do azeite é 0,8 g/mL.

Se ele quisesse determinar a massa correspondente a 140 mL de azeite, poderia simplesmente fazer:

$$\frac{m}{V} = 0{,}8 \Rightarrow \frac{m}{140} = 0{,}8 \Rightarrow m = 112$$

Assim, a massa é igual a 112 g.

Outra alternativa seria estabelecer a relação:

$$\begin{cases} 100 \text{ mL} — 80 \text{ g} \\ 140 \text{ mL} — x \end{cases} \Rightarrow 100 \cdot x = 140 \cdot 80 \Rightarrow x = 112 \text{ g}$$

Neste capítulo há outros exemplos de grandezas proporcionais, como o exemplo 3 na página 71 ou o exercício 4 da página 75. Também há exemplos no capítulo 3, como os exemplos 1 e 2 da página 39 e os exercícios 1, 2 e 3 da página 41.

Esse procedimento é comumente chamado **regra de três simples**.

De modo geral, quando uma grandeza **y** é função de uma grandeza **x** e para cada par de valores (x, y) se observa que $\frac{y}{x} = k$ (com $x \neq 0$) é constante, as duas grandezas são ditas diretamente proporcionais. A função $y = f(x)$ é uma função linear, e seu gráfico é uma reta que passa pela origem.

No final deste capítulo, você terá oportunidade de revisar também o conceito de grandezas inversamente proporcionais.

PENSE NISTO:

Dê outros exemplos de grandezas diretamente proporcionais.

EXERCÍCIOS

15 Em cada tabela seguinte, **y** é diretamente proporcional a **x**. Encontre os valores desconhecidos.

a)

x	1,2	1,5	2,1	0,85	c
y	2,4	3	a	b	4

b)

x	3	6	15	60
y	2	4	a	b

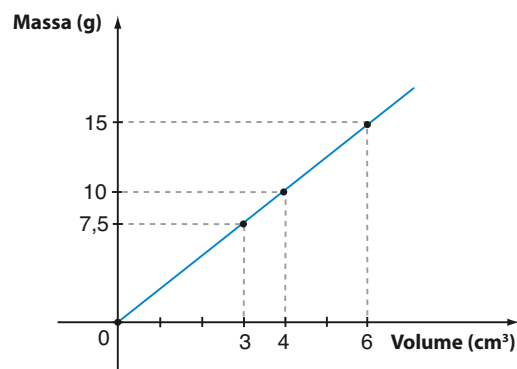
16 No seu primeiro mês de atividade, uma pequena empresa lucrou R$ 5 400,00. Paulo e Roberto, seus sócios, investiram R$ 15 000,00 e R$ 12 000,00, respectivamente. Como deve ser dividido o lucro entre Paulo e Roberto, uma vez que ele é diretamente proporcional ao valor investido?

17 Em um quadrado, a medida do lado e o perímetro são diretamente proporcionais? E a medida do lado e a área?

18 Considere todos os retângulos cujo comprimento mede 3 metros e a largura **x** metros, sendo $x > 0$.

a) O perímetro de cada retângulo é diretamente proporcional a **x**?

b) A área de cada retângulo é diretamente proporcional a **x**?

19 No gráfico está representada a relação entre a massa e o volume de certo óleo combustível:

a) As grandezas massa e volume são diretamente proporcionais?

b) Qual é a densidade do óleo?

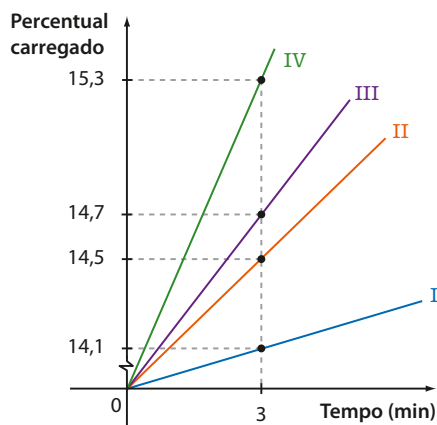
c) Qual é a lei que relaciona a massa (**m**) em função do volume (**V**)?

20 Em um restaurante cobra-se R$ 3,25 por 100 g de comida.

a) Qual é o preço pago por alguém que se servir de 300 g de comida? E por quem se servir do dobro?

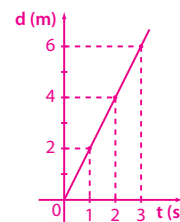
b) Qual é a lei da função que relaciona o valor pago (**y**), em reais, e o número de quilogramas consumidos (**x**)? Esboce seu gráfico.

c) Raul almoçou nesse restaurante e pagou R$ 17,55 pela comida. De quantos gramas ele se serviu?

21 Uma empresa pretende lançar um modelo novo de *smartphone* no mercado. Para isso, selecionou alguns modelos para teste. O gráfico seguinte mostra os resultados de um teste realizado em quatro modelos (I, II, III e IV) e relaciona o percentual do aparelho carregado e o tempo gasto no carregamento.

Sabe-se que a empresa pretende que o novo modelo de *smartphone* lançado não leve mais que 20 minutos para carregar a bateria. Supondo linear a relação entre o percentual e o tempo, determine qual(is) modelo(s) deve(m) ser descartado(s) nesse teste.

PENSE NISTO:

No exemplo 5 da página 75, está esboçado o gráfico de v × t. No caderno, esboce o gráfico de d × t, sendo **d** a distância percorrida, em metros, e **t** o tempo gasto para percorrê-la, em segundos.

A cada segundo a pessoa percorre 2 m.
A função que representa **d** em função de **t** é d = 2 · t (**d** em metros e **t** em segundos), cujo gráfico está representado ao lado. Note que **d** e **t** são grandezas diretamente proporcionais.

Raiz de uma equação do 1º grau

Chama-se **raiz** ou **zero da função polinomial do 1º grau**, dada por f(x) = ax + b, com a ≠ 0, o número real **x** tal que f(x) = 0.

Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

OBSERVAÇÕES

- O ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ pertence ao eixo das abscissas. Desse modo, a raiz de uma função do 1º grau corresponde à abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo Ox.
- A raiz da função **f** dada por f(x) = ax + b é a solução da equação do 1º grau ax + b = 0, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

EXEMPLO 6

- Obtenção do zero da função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 2x - 5$:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

- Cálculo da raiz da função g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei $g(x) = 3x + 6$:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

- A reta que representa a função h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(x) = -2x + 10$, intersecta o eixo Ox no ponto (5, 0), pois $h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$.

EXERCÍCIOS

22 Determine a raiz de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas seguintes leis:

a) $y = 3x - 1$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = -\frac{3x - 5}{2}$

d) $y = 4x$

e) $y = \frac{2x}{5} - \frac{1}{3}$

f) $y = -x$

23 Seja **f** uma função real definida pela lei $f(x) = ax - 3$. Se -2 é raiz da função, qual é o valor de f(3)?

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações do 1º grau:

a) $12x + 5 = 2x + 8$

b) $5(3 - x) + 2(x + 1) = -x + 5$

c) $5x + 20(1 - x) = 5$

d) $-x + 4(2 - x) = -2x - (10 + 3x)$

e) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x}{2} + \frac{4}{3}$

f) $\frac{6x}{5} - \frac{x + 3}{2} = \frac{x}{3} - 1$

25 Em um triângulo ABC, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ excede a medida de $A\hat{B}C$ em 10°, e a medida do ângulo $A\hat{C}B$, adicionado de 30°, é igual ao dobro da medida de $B\hat{A}C$. Quais são as medidas dos ângulos desse triângulo?

26 Carlos é 4 anos mais velho que seu irmão André. Há 5 anos, a soma de suas idades era 84 anos.

a) Qual é a idade atual de cada um?

b) Há quantos anos a idade de Carlos era o dobro da idade de André?

27 André, Bruno e Carlos instalaram um novo *software* em 53 computadores da empresa em que trabalham. André fez a instalação em 3 equipamentos a menos do que Bruno e este, 2 a menos do que Carlos. Determine o número de computadores em que cada um deles instalou o novo *software*.

28 Paulo e Joana recebem a mesma quantia por hora de trabalho. Após Paulo ter trabalhado 4 horas e Joana 3 horas e 20 minutos, Paulo tinha a receber R$ 15,00 a mais que Joana. Quanto recebeu cada um?

29 Considere a equação do 1º grau, na incógnita **x** e $U = \mathbb{R}$:

$$(a - 2) \cdot x - 5 = 0, \text{ sendo } a \in \mathbb{R}.$$

a) Resolva essa equação para $a = 4$, $a = -3$ e $a = 0$.

b) É verdade que, para todo $a \in \mathbb{R}$, a equação apresenta uma única solução real? Explique.

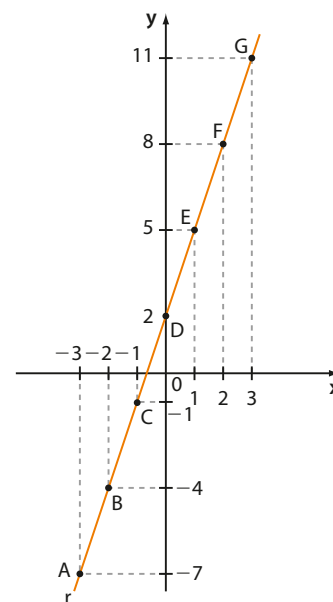
30 Em um jogo de vôlei, foram vendidos ingressos para apenas dois setores: arquibancada e numerada. O ingresso para numerada era R$ 30,00 mais caro que o da arquibancada. Sabendo que o público pagante foi de 3 200 pessoas, das quais 70% estavam na arquibancada, e a renda do jogo foi de R$ 140 800,00, determine o preço do ingresso para a numerada.

Taxa média de variação da função afim

Observemos inicialmente dois exemplos.

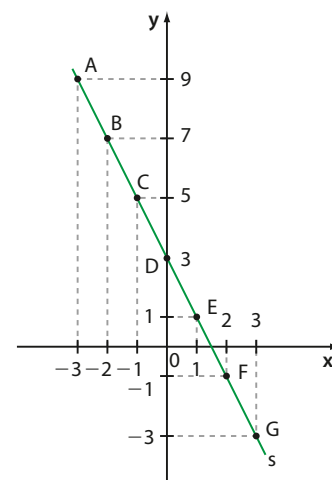
EXEMPLO 7

Seja **f** a função afim dada por $y = 3x + 2$. No gráfico ao lado, destacamos alguns pontos da reta **r**, que é o gráfico de **f**. Vamos calcular a taxa média de variação dessa função nos seguintes intervalos:

Intervalo	Δx	Δy	Taxa de variação: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
de A a B	$-2 - (-3) = 1$	$-4 - (-7) = 3$	$\frac{3}{1} = 3$
de B a C	$-1 - (-2) = 1$	$-1 - (-4) = 3$	$\frac{3}{1} = 3$
de E a F	$2 - 1 = 1$	$8 - 5 = 3$	$\frac{3}{1} = 3$
de D a G	$3 - 0 = 3$	$11 - 2 = 9$	$\frac{9}{3} = 3$
de B a E	$1 - (-2) = 3$	$5 - (-4) = 9$	$\frac{9}{3} = 3$
de A a F	$2 - (-3) = 5$	$8 - (-7) = 15$	$\frac{15}{5} = 3$

Observe que, independentemente do "ponto de partida" e do intervalo considerado, a taxa de variação da função é constante (igual a 3).

EXEMPLO 8

Seja **f** a função afim dada por $y = -2x + 3$. No gráfico ao lado, destacamos alguns pontos da reta **s**, que é o gráfico de **f**. Vamos calcular a taxa média de variação dessa função nos seguintes intervalos:

Intervalo	Δx	Δy	Taxa de variação: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
de A a B	$-2 - (-3) = 1$	$7 - 9 = -2$	$\frac{-2}{1} = -2$
de B a C	$-1 - (-2) = 1$	$5 - 7 = -2$	$\frac{-2}{1} = -2$
de E a F	$2 - 1 = 1$	$-1 - 1 = -2$	$\frac{-2}{1} = -2$
de B a E	$1 - (-2) = 3$	$1 - 7 = -6$	$\frac{-6}{3} = -2$
de C a G	$3 - (-1) = 4$	$-3 - 5 = -8$	$\frac{-8}{4} = -2$
de A a G	$3 - (-3) = 6$	$-3 - 9 = -12$	$\frac{-12}{6} = -2$

Observe que, independentemente do "ponto de partida" e do intervalo considerado, a taxa de variação da função é constante (igual a −2).

Em uma função afim, a taxa média de variação é constante, isto é, independe do "ponto inicial" e do "ponto final" considerados. Observe os exemplos anteriores.

Propriedade:

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função afim dada por $f(x) = ax + b$.

A taxa média de variação de **f**, quando **x** varia de $\mathbf{x_1}$ a $\mathbf{x_2}$, com $x_1 \neq x_2$, é igual ao coeficiente **a**.

Demonstração:

Se $f(x) = ax + b$, temos:

$$f(x_1) = ax_1 + b \quad \text{e} \quad f(x_2) = ax_2 + b$$

A taxa média de variação de **f**, para **x** variando de $\mathbf{x_1}$ até $\mathbf{x_2}$ é:

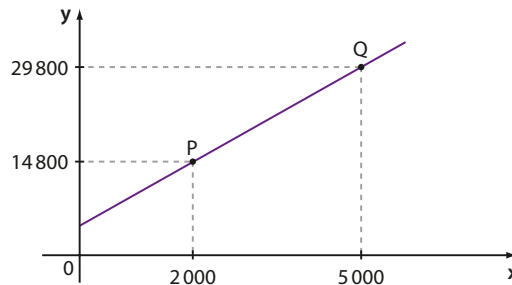
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 - a \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Veja o exemplo a seguir.

OBSERVAÇÃO

Note nos exemplos 7 e 8 que, se $a > 0$, a taxa de variação de **f** é positiva e **f** é crescente; se $a < 0$, a taxa de variação de **f** é negativa e **f** é decrescente.

EXEMPLO 9

O gráfico a seguir mostra o custo total mensal (**y**), em reais, para se confeccionar **x** unidades de camisetas em uma pequena fábrica.

Vamos calcular o custo de confecção de 3 000 camisetas.

Considerando o intervalo de **P** a **Q**, a taxa média de variação, em reais/camiseta, dessa função é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{29\,800 - 14\,800}{5\,000 - 2\,000} = \frac{15\,000}{3\,000} = 5$$

Como se trata de uma função afim, sabemos que essa taxa é constante. Isso significa que, a cada camiseta produzida, o custo aumenta em 5 reais.

Assim, considerando um aumento de 1 000 unidades, a partir da produção de 2 000 camisetas ($3000 - 2000 = 1000$), o aumento no custo é de 5 000 reais ($1000 \cdot 5$), o que elevaria os gastos a 19 800 reais ($14\,800 + 5\,000$).

Para obter a lei da função que relaciona **y** e **x**, podemos utilizar a taxa média de variação da função.

Como vimos, na lei $y = ax + b$, temos $a = 5$, isto é, $y = 5x + b$.

Como o ponto $P(2\,000, 14\,800)$ pertence à reta, temos:

$$x = 2\,000 \text{ e } y = 14\,800$$

$$14\,800 = 5 \cdot 2000 + b \Rightarrow b = 4\,800 \text{ (custo fixo da fábrica)}$$

Daí, a lei é: $y = 5x + 4\,800$.

Professor, se achar necessário, antecipe algumas discussões que envolvem esse exemplo e a seção *Troque ideias* da página 91.

Aplicações

Movimento uniforme e movimento uniformemente variado

Vamos imaginar que você esteja na estrada em um automóvel no qual o velocímetro se mantém sempre na mesma posição (durante um determinado intervalo de tempo) indicando, por exemplo, 80 km/h.

Nas aulas de Física você já deve ter aprendido que se trata de um **movimento uniforme**: se considerarmos intervalos de tempo iguais, o automóvel sofre variações de espaço iguais (no exemplo, o automóvel percorre 40 km a cada meia hora ou 20 km a cada 15 minutos e assim por diante).

Decorre daí que a função horária dos espaços, no movimento uniforme, é:

$$s(t) = s_0 + v \cdot t \quad (*)$$

- $s(t)$ representa o espaço correspondente ao tempo **t**, com $t \geqslant 0$; observe que **s** e **t** são as grandezas relacionadas;
- as constantes $\mathbf{s_0}$ e **v** representam, respectivamente, o espaço inicial (correspondente a $t = 0$) e a velocidade escalar (velocidade do móvel em cada instante considerado).

Observe que (*) representa a lei de uma função do 1º grau: $y = ax + b$, com **x** e **y** representados por **t** e **s**, respectivamente. A taxa média de variação dessa função é constante e igual ao coeficiente de **x**, que vale **a**. Desse modo, em (*), **v** representa a taxa média de variação dos espaços, considerando o intervalo de $\mathbf{t_1}$ a $\mathbf{t_2}$:

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v$$

Note que **v** representa também a velocidade escalar média, como vimos no capítulo anterior.

Veja os exemplos a seguir.

Na função horária $s(t) = 5 + 10t$, com **t** em segundos e **s** em metros, o coeficiente de **t**, que é igual a 10, representa a velocidade escalar do móvel, isto é, $v = 10$ m/s. Como $v > 0$, o movimento é progressivo ("**s** cresce com **t**").

Já na lei $s(t) = 40 - 20t$, com **t** em segundos e **s** em metros, temos que $v = -20$ m/s e o movimento é retrógrado ("**s** decresce com **t**").

Já no **movimento uniformemente variado**, a velocidade escalar de um móvel sofre variações iguais em intervalos de tempo iguais, isto é, varia de modo uniforme no decorrer do tempo. A função que representa a velocidade (**v**) em um instante (**t**), $t \geqslant 0$, é:

$$v(t) = v_0 + \alpha \cdot t$$

sendo $\mathbf{v_0}$ e α constantes (para cada movimento) que representam, respectivamente, a velocidade inicial do móvel (correspondente a $t = 0$) e a aceleração escalar.

A taxa média de variação da velocidade no intervalo de $\mathbf{t_1}$ a $\mathbf{t_2}$ é constante e igual ao coeficiente de **t**, que vale:

$$\alpha = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Observe que α (aceleração escalar) representa também a aceleração escalar média, como vimos no capítulo 3.

Fonte de pesquisa: HALLIDAY, D.; RESNICK, R. e WALKER, J. *Fundamentos de Física 1:* Mecânica. 9ª ed. São Paulo: LTC, 2012.

EXERCÍCIOS

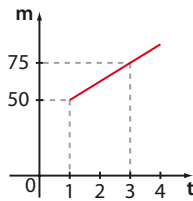
31 Determine a taxa média de variação das seguintes funções do 1º grau:

a) $f(x) = 4x + \frac{1}{2}$

b) $g(x) = -3x$

c) $h(x) = x + 2$

d) $i(x) = 4 - x$

32 O gráfico ao lado mostra a evolução da massa (**m**) de um mamífero, em quilogramas, nos primeiros meses de vida.

a) Com quantos quilogramas esse mamífero nasceu?

b) Qual era a sua massa com 2 meses de vida?

c) Mantida essa tendência até o 5º mês, qual seria a massa do mamífero com 4,5 meses de vida?

33 Em 31/12/2009 uma represa continha 500 milhões de metros cúbicos de água. Devido à seca, a quantidade de água armazenada nessa represa vem decrescendo, ano a ano, de forma linear, chegando, em 31/12/2017, a 250 milhões de metros cúbicos de água.

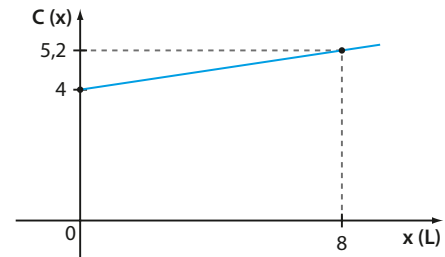
Se esse comportamento se mantiver nos anos seguintes, determine:

a) quantos metros cúbicos de água a represa terá em 31/12/2021.

b) quantos metros cúbicos de água a represa terá em 30/6/2022.

c) em que data (mês e ano) a represa ficaria vazia.

34 A valorização anual do preço (em reais) de um quadro é constante. Seu preço atual é R$ 4500,00. Há quatro anos, o quadro custava R$ 3300,00. Qual será o seu preço daqui a cinco anos?

35 O custo **C**, em milhares de reais, de produção de **x** litros de certa substância é dado por uma função afim, com $x \geq 0$, cujo gráfico está representado abaixo.

a) O que o ponto (0, 4) pertencente à reta indica?

b) Qual é o custo de produção de 1 litro dessa substância?

c) O custo de R$ 7000,00 corresponde à produção de quantos litros dessa substância?

36 Em uma cidade, verificou-se que, em um dia de verão, a temperatura variou linearmente com o tempo, no período das 8 às 16 horas. Sabendo que às 11 h 30 min a temperatura era de 29,5 °C e às 14 h ela atingiu a marca de 33 °C, determine:

a) a temperatura às 9 h 30 min e às 15 h.

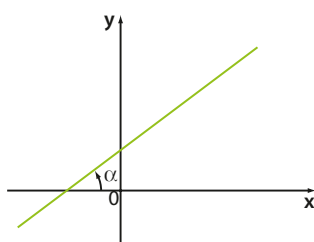
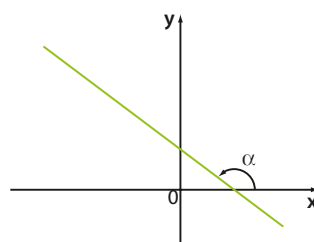
b) a lei da função que representa a temperatura **y** (em °C) de acordo com o tempo (**t**), em horas, transcorrido a partir das 8 h; $t \in [0, 8]$.

Função afim crescente e decrescente

O coeficiente angular

Já vimos que o gráfico da função afim $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = ax + b$, $a \neq 0$, é uma reta.

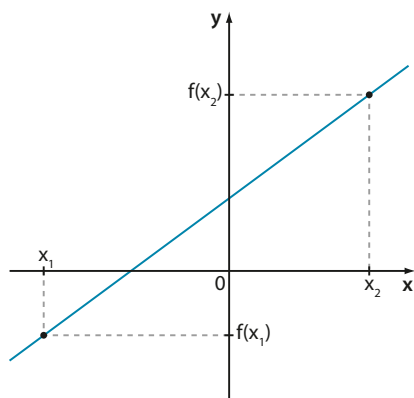
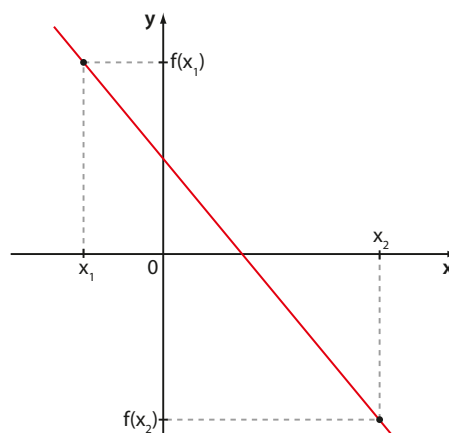
O coeficiente de **x**, indicado por **a**, é chamado **coeficiente angular** ou **declividade** da reta e está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox.

Observe o ângulo α que a reta forma com o eixo **x**, convencionado tal como mostram os dois casos a seguir.

α é agudo ($0 < \alpha < 90°$)

α é obtuso ($90° < \alpha < 180°$)

O que ocorreria se $\alpha = 90°$?

Teríamos uma reta vertical, que não representa o gráfico de uma função.

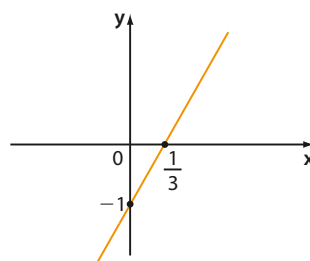
Considerando a função afim definida por $f(x) = ax + b$, temos duas possibilidades.

- Para $a > 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ e, daí, $ax_1 + b < ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) < f(x_2)$, e a função é dita **crescente**.

- Para $a < 0$, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$ e, daí, $ax_1 + b > ax_2 + b$; portanto, $f(x_1) > f(x_2)$, e a função é dita **decrescente**.

EXEMPLO 10

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = 3x - 1$. Observe a tabela e o gráfico de **f**.

x aumenta →

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−10	−7	−4	−1	2	5	8

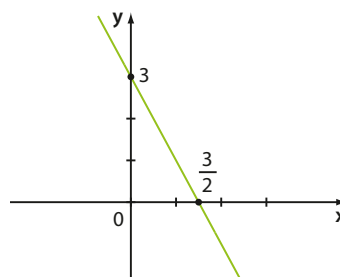
y aumenta →

Note que $a = 3 > 0$; lembre-se de que **a** representa também a taxa média de variação de **f**. A função é crescente.

EXEMPLO 11

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y = -2x + 3$. Observe a tabela e o gráfico de **f**.

x aumenta →

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	7	5	3	1	−1	−3

y diminui →

Note que $a = -2 < 0$; lembre-se de que **a** representa também a taxa média de variação de **f**. A função é decrescente.

Em resumo, as funções **f**, definidas por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, são crescentes, e aquelas com $a < 0$ são decrescentes.

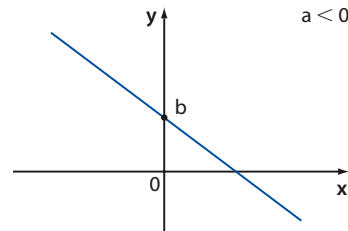
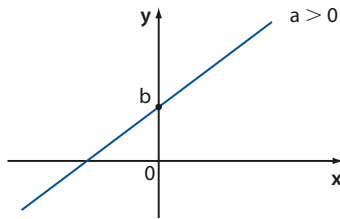
Se $a = 0$, a função dada por $y = b$ é constante.

O coeficiente linear

O termo constante **b** é chamado **coeficiente linear** da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$.

O ponto (0, b) pertence ao eixo das ordenadas. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta intersecta o eixo Oy.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

37 Para cada uma das funções afim dadas pelas leis seguintes, identifique o coeficiente angular (**a**) e o coeficiente linear (**b**). Classifique a função em crescente ou decrescente.

a) $y = 3x - 2$

b) $y = -x + 3$

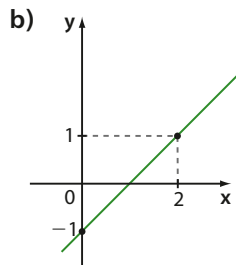
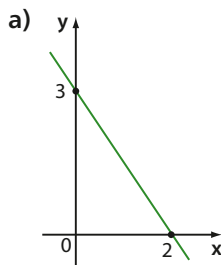
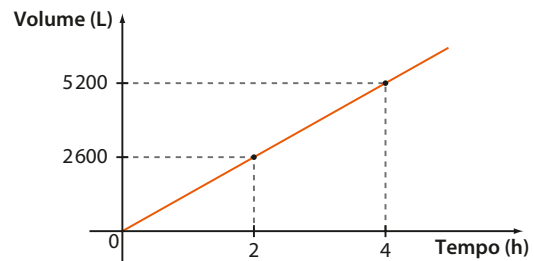
c) $y = \dfrac{5 - 2x}{3}$

d) $y = 9x$

e) $y = (x + 3)^2 - (x + 1)^2$

38 Determine os valores dos coeficientes angulares e lineares (**a** e **b**, respectivamente) das retas seguintes.

a)

b)

39 No gráfico seguinte está representado o volume de petróleo, em litros, existente em um reservatório de 26 m³ inicialmente vazio, em função do tempo, em horas, de abastecimento do reservatório.

a) Determine a taxa média de variação do volume em relação ao tempo.

b) Determine os coeficientes angular e linear dessa reta.

c) Qual é a equação dessa reta?

d) Em quanto tempo o reservatório estará cheio?

Sinal

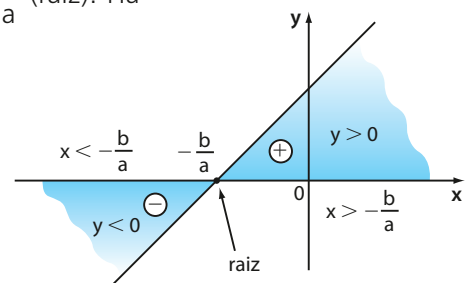
Já vimos que estudar o sinal de uma função **f** qualquer, definida por $y = f(x)$, é determinar os valores de **x** para os quais **y** é positivo ou **y** é negativo.

Consideremos uma função afim dada por $y = f(x) = ax + b$ e estudemos seu sinal. Já vimos que essa função se anula ($y = 0$) para $x = -\dfrac{b}{a}$ (raiz). Há dois casos possíveis:

- $a > 0$ (a função é crescente)

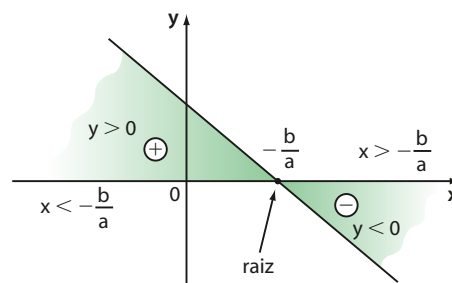
$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < -\dfrac{b}{a}$

Conclusão: **y** é positivo para valores de **x** maiores que a raiz; **y** é negativo para valores de **x** menores que a raiz.

- $a < 0$ (a função é decrescente)

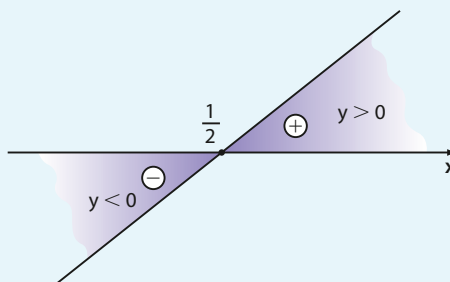
$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < -\dfrac{b}{a}$

$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > -\dfrac{b}{a}$

Conclusão: **y** é positivo para valores de **x** menores que a raiz; **y** é negativo para valores de **x** maiores que a raiz.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

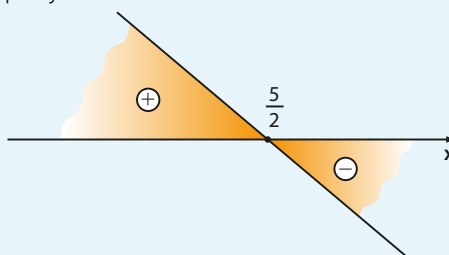
4 Estude o sinal da função afim definida por $y = 2x - 1$.

Solução:

Essa função polinomial do 1º grau apresenta $a = 2 > 0$ e raiz $x = \dfrac{1}{2}$. A função é crescente e a reta intersecta o eixo Ox no ponto $\dfrac{1}{2}$.

Sinal
$y > 0$ se $x > \dfrac{1}{2}$
$y < 0$ se $x < \dfrac{1}{2}$

5 Estude o sinal da função afim dada por $y = -2x + 5$.

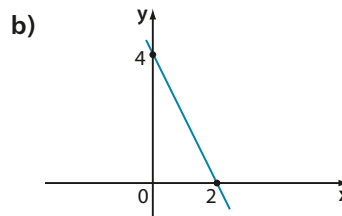
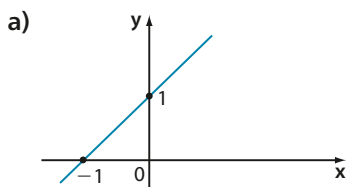
Solução:

Essa função do 1º grau apresenta $a = -2 < 0$ e raiz $x = \dfrac{5}{2}$. A função é decrescente e a reta intersecta o eixo Ox no ponto $\dfrac{5}{2}$.

Sinal
$y > 0$ se $x < \dfrac{5}{2}$
$y < 0$ se $x > \dfrac{5}{2}$

EXERCÍCIOS

40 Em cada caso, estude o sinal da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ representada no gráfico.

a)

b)

41 Estude o sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ seguintes:

a) $y = 4x + 1$

b) $y = -3x + 1$

c) $y = -7x$

d) $y = \dfrac{x - 3}{5}$

e) $y = \dfrac{x}{2}$

f) $y = 3 - x$

Inequações

No exemplo 2 da página 70, estabelecemos que o salário do corretor é dado por $s(x) = 700 + 0{,}02 \cdot x$, em que **x** é o total de vendas do mês. Qual deve ser o total de vendas em um mês para que o salário do corretor ultrapasse R$ 4000,00?

Devemos ter:

$$s(x) > 4000$$
$$700 + 0{,}02 \cdot x > 4000$$
$$0{,}02 \cdot x > 3300$$
$$x > 165000$$

Assim, as vendas precisam superar R$ 165000,00.

Acabamos de resolver uma inequação do 1º grau. Vamos, a seguir, relembrar como se resolvem outras inequações do 1º grau e também relacionar a resolução de inequações ao estudo do sinal da função afim.

EXEMPLO 12

Podemos resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $2x + 3 > 0$ de dois diferentes modos.

1º modo:

Deixamos no 1º membro apenas o termo que contém a incógnita **x**: $2x > -3$

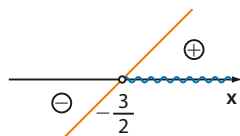
Dividimos os dois membros pelo coeficiente de **x**: $\frac{2x}{2} > -\frac{3}{2}$, isto é, $x > -\frac{3}{2}$

2º modo:

O primeiro membro da inequação pode ser associado à função $y = 2x + 3$; assim, é preciso determinar **x** tal que $y > 0$. Temos:

Raiz: $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

A função é crescente, pois $a = 2 > 0$.

⊕ ⊖ $-\frac{3}{2}$ x

Assim, para que $y > 0$, devemos considerar $x > -\frac{3}{2}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{3}{2}\right\}$$

EXEMPLO 13

Para resolver a inequação $-3x + 12 \leqslant 0$, considerando $U = \mathbb{R}$, podemos proceder de dois modos.

1º modo:

$$-3x + 12 \leqslant 0 \Rightarrow -3x \leqslant -12$$

Ao dividirmos os dois membros pelo coeficiente de **x**, que é negativo (−3), é preciso lembrar que o sinal da desigualdade se inverte:

$$\frac{-3x}{-3} \geqslant \frac{-12}{-3}, \text{ isto é, } x \geqslant 4$$

2º modo:

Seja $y = -3x + 12$; é preciso determinar para que valores de **x** tem-se $y \leqslant 0$.

- raiz: $-3x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$
- $a = -3 < 0$

⊕ 4 ⊖ x

Assim, $y \leqslant 0$ se $x \geqslant 4$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$$

PENSE NISTO:

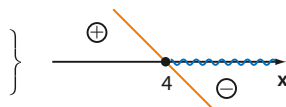
Observe como um estudante resolveu a inequação:

$-3x + 12 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 \leqslant 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{12}{3} \leqslant \frac{3x}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 \leqslant x$, isto é, $x \geqslant 4$.

Essa resolução está correta?

Sim. É importante lembrar que, em uma inequação, também podemos isolar a incógnita no 2º membro. Veja, nesse caso, que não há necessidade de inversão do sinal da desigualdade.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

6 Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $1 \leq 2x + 3 < x + 5$.

Solução:

De fato, são duas inequações simultâneas:

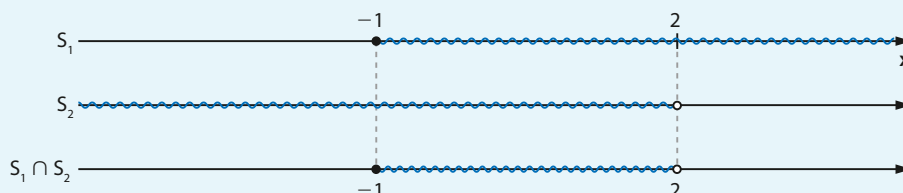
$$1 \leq 2x + 3 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad 2x + 3 < x + 5 \quad (2)$$

Vamos resolver (1): $1 \leq 2x + 3$

$$1 \leq 2x + 3 \Rightarrow -2x \leq 3 - 1 \Rightarrow -2x \leq 2 \Rightarrow x \geq -1$$

Vamos resolver (2): $2x + 3 < x + 5$

$$2x + 3 < x + 5 \Rightarrow 2x - x < 5 - 3 \Rightarrow x < 2$$

Como as condições (1) e (2) devem ser satisfeitas simultaneamente, procuremos agora a interseção das duas soluções:

Portanto, $-1 \leq x < 2$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\}$.

EXERCÍCIOS

42 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações seguintes, estudando o sinal das funções envolvidas:

a) $2x - 1 \geq 0$

b) $-4x + 3 < 0$

c) $-2x \leq 0$

d) $3x + 6 > 0$

e) $x - 3 \leq -x + 5$

f) $3(x - 1) + 4x \leq -10$

g) $-2(x - 1) - 5(1 - x) > 0$

43 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $\dfrac{x - 1}{3} - \dfrac{x - 2}{2} \leq 2$

b) $\dfrac{2(3 - x)}{5} + \dfrac{x}{2} \geq \dfrac{1}{4} + \dfrac{2(x - 1)}{3}$

c) $\dfrac{3x - 1}{4} - \dfrac{x - 3}{2} \geq \dfrac{x + 7}{4}$

d) $(x - 3)^2 - (4 - x)^2 \leq \dfrac{x}{2}$

e) $\dfrac{4x - 3}{5} - \dfrac{2 + x}{3} < \dfrac{3x}{5} + 1 - \dfrac{2x}{15}$

44 A diferença entre o dobro de um número e a sua metade é menor que 6. Quais os números inteiros positivos que são soluções desse problema?

45 Para animar a festa de 15 anos de sua filha, Marcelo consultou duas bandas que ofereceram as seguintes condições:

- banda **A**: R$ 800,00 fixos, acrescidos de R$ 250,00 por hora (ou fração de hora) de trabalho.
- banda **B**: R$ 650,00 fixos, acrescidos de R$ 280,00 por hora (ou fração de hora) de trabalho.

a) Se Marcelo estima que a festa não vai durar mais que 2,5 horas, que empresa ele deverá contratar pensando exclusivamente no critério financeiro?

b) Acima de quantas horas de duração da festa é mais econômico optar pela banda **A**?

46 Leia a tirinha a seguir.

ADÃO ITURRUSGARAI

Suponha que Aline tenha se comprometido a fazer depósitos mensais de R$ 40,00 para cobrir o "rombo" na sua conta corrente, sendo o primeiro depósito daqui a um mês, e que o banco não mais cobrará juros sobre o saldo devedor a partir da data em que fez o acordo com Aline. Considerando a referida data, responda:

a) Após **n** meses, qual será o saldo da conta de Aline?

b) Qual é o número mínimo inteiro de meses necessários para que o saldo devedor de Aline seja menor que R$ 200,00?

c) Qual é o número mínimo inteiro de meses necessários para Aline "sair do vermelho", isto é, para que seu saldo fique positivo?

47 A produção de soja em uma região atingiu a safra de 50 toneladas em janeiro de 2017. A partir daí, a produção tem recuado à taxa de 90 kg ao mês. Mantido esse ritmo, a partir de qual data (mês e ano) a produção mensal estará abaixo de 40 toneladas?

48 Resolva as seguintes inequações simultâneas, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $-1 < 2x \leqslant 4$

b) $3 < x - 1 < 5$

c) $4 > -x > -1$

d) $3 \leqslant x + 1 \leqslant -x + 6$

e) $2x \leqslant -x + 9 \leqslant 5x + 21$

49 Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre locação de automóveis e organizou as informações como a seguir:

Opções	Diária	Preço adicional por quilômetro rodado
Locadora 1	R$ 100,00	R$ 0,30
Locadora 2	R$ 60,00	R$ 0,40
Locadora 3	R$ 150,00	km livre

a) Qual é a lei que define o preço em reais (**y**) da locação em função do número de quilômetros rodados (**x**) em cada uma das situações apresentadas?

b) Para maior economia, a partir de qual número inteiro de quilômetros deve o turista preferir a locadora 1 à locadora 2?

c) Para maior economia, a partir de qual número inteiro de quilômetros ele deve optar pela locadora 3?

TROQUE IDEIAS

Funções custo, receita e lucro

Um empreendedor abriu uma pequena doçaria em uma galeria comercial na qual produz e vende brigadeiros.

G. EVANGELISTA/OPÇÃO BRASIL IMAGENS

Nos primeiros meses do negócio, ele observou que, mensalmente, há uma despesa ou custo fixo (**C_F**) de R$ 2 700,00 e um custo variável (**C_V**), que depende da quantidade de brigadeiros preparados. Ele estima que o custo unitário (por unidade) de produção do brigadeiro seja de R$ 1,40. Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) A que pode se referir o custo (ou despesa) fixa de um empreendimento?

b) Seja **x** a quantidade de brigadeiros produzidos em um determinado mês. Obtenha a lei que define o custo total (**C**), sendo $C = C_F + C_V$.

O dono do negócio decidiu fixar o preço de venda do brigadeiro em R$ 3,20. Neste momento, vamos admitir que o preço de venda independe de outros fatores e, dessa forma, será mantido fixo. Vamos também supor que toda quantidade de brigadeiro produzida na doçaria seja vendida.

c) Qual é a lei da função que representa a arrecadação bruta (sem levar em conta as despesas) dessa doçaria? Em modelos matemáticos de Economia costuma-se designar a arrecadação bruta por **receita** (**R**).

Assim, escreva **R** em função de **x**.

d) Represente, no caderno, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções custo (**C**) e receita (**R**) em função de **x**.

e) As grandezas custo (**C**) e número de brigadeiros (**x**) comercializados são diretamente proporcionais? E as grandezas receita (**R**) e número de brigadeiros (**x**)?

f) Como você pode determinar o ponto de interseção das duas retas obtidas? Sob a perspectiva econômica, qual é a interpretação desse ponto? Esse ponto é conhecido como **ponto crítico** ou de **nivelamento**.

Uma vez determinadas as funções receita (**R**) e custo total (**C**), é possível definirmos uma nova função que expressa o **faturamento líquido** ou **lucro** (**L**) da doçaria, dada pela diferença entre **R** e **C**.

g) Escreva a lei que define **L** em função de **x** e esboce seu gráfico. Para quais valores de **x** o lucro é negativo (isto é, a doçaria fica no prejuízo), o lucro é nulo e o lucro é positivo?

Indique, no gráfico construído no item *d*, os intervalos encontrados.

DESAFIO

(Enem-MEC) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m³. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m³, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 8 **e)** 9

UM POUCO **MAIS** SOBRE

Grandezas inversamente proporcionais

Em uma experiência, pretende-se medir o tempo necessário para se encher de água um tanque inicialmente vazio. Para isso, são feitas várias simulações que diferem entre si pela vazão da fonte que abastece o tanque. Em cada simulação, no entanto, a vazão não se alterou do início ao fim da experiência. Os resultados são mostrados na tabela ao lado.

Simulação	Vazão (L/min)	Tempo (min)
1	2	60
2	4	30
3	6	20
4	1	120
5	10	12
6	0,5	240

Observando os pares de valores, é possível notar algumas regularidades:

1ª) O produto (vazão da fonte) · (tempo) é o mesmo em todas as simulações:

$$2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = ... = 0{,}5 \cdot 240$$

O valor constante obtido para o produto representa a capacidade do tanque (120 L).

2ª) Dobrando-se a vazão da fonte, o tempo se reduz à metade; triplicando-se a vazão da fonte, o tempo se reduz à terça parte; reduzindo-se a vazão à metade, o tempo dobra; ...

As duas regularidades listadas acima caracterizam **grandezas inversamente proporcionais**.

Se **x** e **y** são duas grandezas que se relacionam de modo que para cada par de valores (x, y) se observa que $x \cdot y = k$ (**k** é constante), as duas grandezas são ditas **inversamente proporcionais**.

Representação gráfica

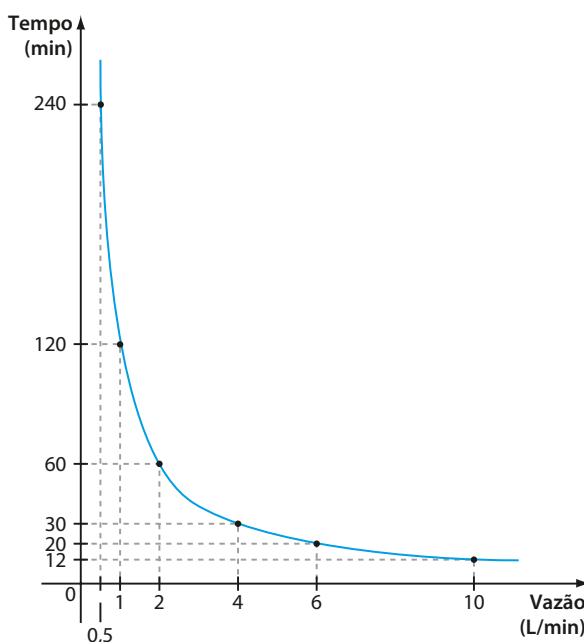
Com relação à experiência anterior, vamos construir um gráfico da vazão em função do tempo (observe, neste caso, que o gráfico está contido no 1º quadrante, pois as duas grandezas só assumem valores positivos).

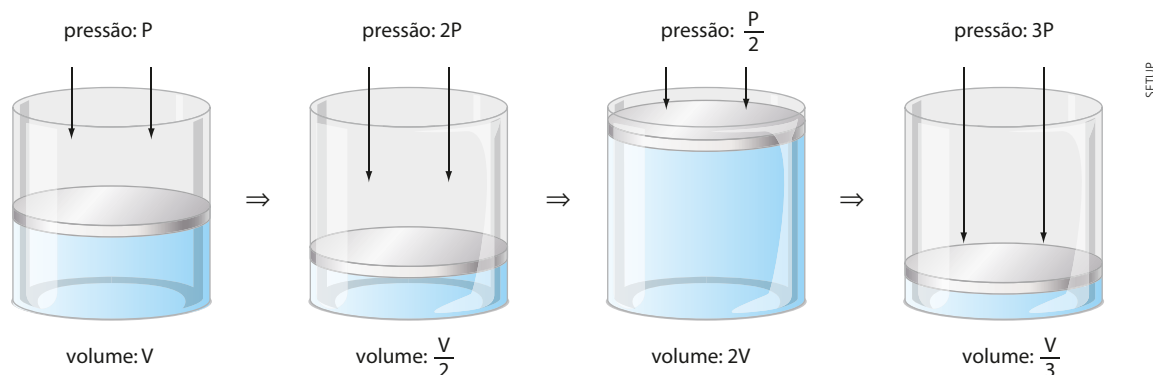
A curva obtida é chamada **hipérbole**.

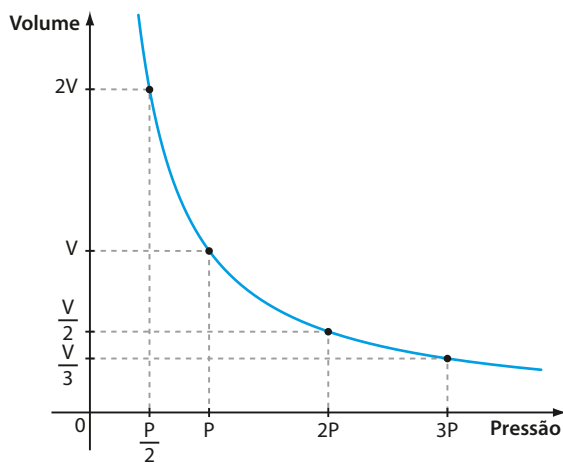
Veja como podemos determinar o tempo **t** necessário para encher o tanque se a vazão da fonte é de 13 L/min.

Uma maneira é usar a definição de grandezas inversamente proporcionais: o produto (vazão · tempo) é constante e igual a 120.

Daí $13 \cdot t = 120 \Rightarrow t = \frac{120}{13} \simeq 9{,}23$.

Para encher o tanque são necessários aproximadamente 9,23 min, ou seja, 9 minutos e 14 segundos.

Vejamos outro exemplo.

Considere que uma certa massa de gás é submetida a uma transformação na qual a temperatura é mantida constante. As grandezas que variam durante essa transformação são a pressão e o volume: o volume ocupado por essa massa de gás varia de acordo com a pressão a que ele foi submetido. A sequência de figuras abaixo ilustra a relação entre o volume e a pressão.

Pressão	P	2P	$\frac{P}{2}$	3P	...
Volume	V	$\frac{V}{2}$	2V	$\frac{V}{3}$	...

Observe que, para cada par de valores da tabela, o produto (pressão) · (volume) é constante, isto é, $P \cdot V = k$. Assim, nessas condições, pressão e volume são grandezas inversamente proporcionais. Veja o gráfico de $V \times P$.

PENSE NISTO:

Sejam **x**, **y** e **z** três grandezas tais que **x** é diretamente proporcional a **y** e inversamente proporcional a **z**. Sabendo que, quando $x = 24$, temos $y = 9$ e $z = 6$, determine o valor de **z** quando $x = 36$ e $y = 3$.

Podemos escrever: $\frac{x \cdot z}{y} = k$, **k** é constante.

Daí, $\frac{24 \cdot 6}{9} = k \Rightarrow k = 16$

Então, $\frac{36 \cdot z}{3} = 16 \Rightarrow z = \frac{4}{3}$

CAPÍTULO 5

Função quadrática

Introdução

Vejamos duas situações que envolvem a função quadrática.

Estádio de futebol, São Paulo (SP), 2015.

Situação 1

Um campeonato de futebol vai ser disputado por 10 clubes pelo sistema em que todos jogam contra todos em dois turnos. Quantos jogos serão realizados no campeonato?

Contamos o número de jogos que cada clube fará "em casa", ou seja, no seu campo: 9 jogos. Como são 10 clubes, o total de jogos será $10 \cdot 9 = 90$.

Se o campeonato fosse disputado por 20 clubes (como é o Campeonato Brasileiro de Futebol), poderíamos calcular quantos jogos seriam realizados usando o mesmo raciocínio:

$$20 \cdot 19 = 380$$

Enfim, para cada número (**x**) de clubes, é possível calcular o número (**y**) de jogos do campeonato. O valor de **y** é função de **x**.

Nesse caso, a regra que permite calcular **y** a partir de **x** é a seguinte:

$$y = x \cdot (x - 1), \text{ ou seja, } y = x^2 - x$$

Esse é um exemplo de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.

Situação 2

Um clube construiu um campo de 100 m de comprimento por 70 m de largura e, por medida de segurança, decidiu cercá-lo, deixando entre o campo e a cerca uma pista com 3 m de largura. Qual é a área do terreno limitado pela cerca?

A área da região cercada é:

$$(100 + 2 \cdot 3) \cdot (70 + 2 \cdot 3) = 106 \cdot 76 = 8\,056$$

Logo, a área do terreno limitado pela cerca é 8 056 m^2.

Se a medida da largura da pista fosse 4 m, teríamos:

$$(100 + 2 \cdot 4) \cdot (70 + 2 \cdot 4) = 108 \cdot 78 = 8\,424$$

Nessas condições, a área da região cercada seria: 8 424 m^2.

Enfim, a cada medida **x** de largura escolhida para a pista há uma área **A** da região cercada. A área da região cercada é função de **x**. Procuremos a lei que expressa **A** em função de **x**:

$$A(x) = (100 + 2x) \cdot (70 + 2x)$$

$$A(x) = 7\,000 + 200x + 140x + 4x^2$$

$$A(x) = 4x^2 + 340x + 7\,000$$

Esse é outro exemplo de **função polinominal do 2º grau** ou **função quadrática**.

Chama-se **função quadrática**, ou **função polinomial do 2º grau**, qualquer função **f** de ℝ em ℝ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são números reais e $a \neq 0$.

Veja os exemplos a seguir.

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, sendo $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$.
- $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, sendo $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$.
- $f(x) = x^2 - 1$, sendo $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$.
- $f(x) = -x^2 + 2x$, sendo $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$.
- $f(x) = -4x^2$, sendo $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$.

Porque, se $a = 0$, a lei se escreve como $f(x) = bx + c$, que não é de segundo grau.

PENSE NISTO:

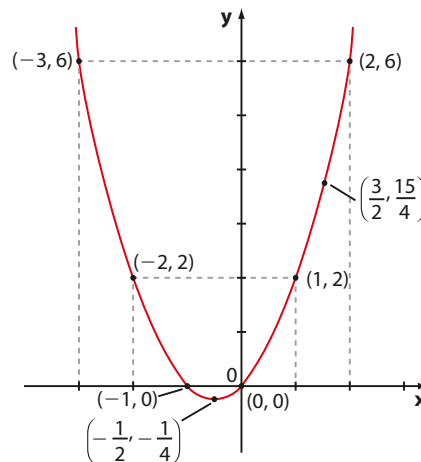
Por que é colocada a restrição $a \neq 0$?

Gráfico

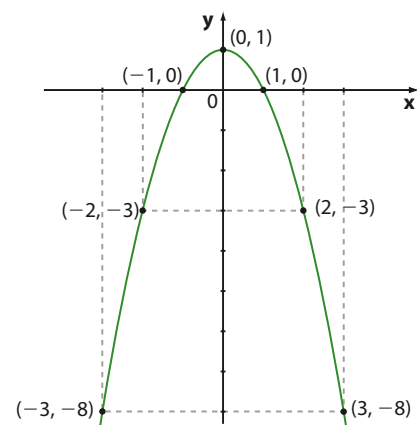
Vamos construir os gráficos de algumas funções polinomiais do 2º grau. Veja os exemplos.

EXEMPLO 1

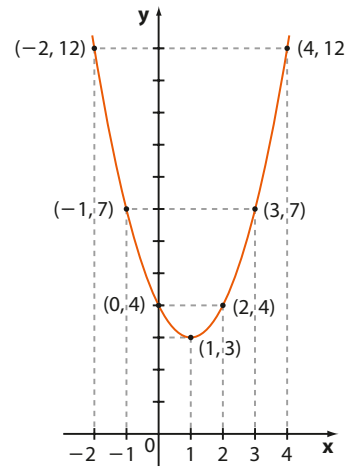
Para construir o gráfico da função f: ℝ → ℝ dada pela lei $f(x) = x^2 + x$, atribuímos a **x** alguns valores (observe que o domínio de **f** é ℝ), calculamos o valor correspondente de **y** para cada valor de **x** e, em seguida, ligamos os pontos obtidos:

x	$y = x^2 + x$
−3	6
−2	2
−1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$
2	6

EXEMPLO 2

Consideremos f: ℝ → ℝ dada por $y = -x^2 + 1$.
Repetindo o procedimento usado no exemplo anterior, temos:

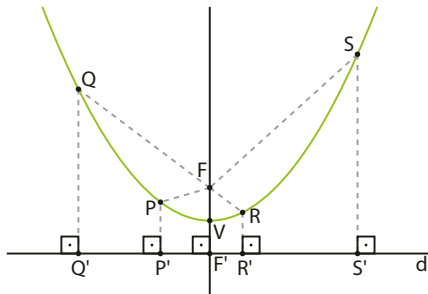
x	$y = -x^2 + 1$
−3	−8
−2	−3
−1	0
0	1
1	0
2	−3
3	−8

EXEMPLO 3

Seja f: ℝ → ℝ dada por $f(x) = x^2 - 2x + 4$:

x	$y = x^2 - 2x + 4$
−2	12
−1	7
0	4
1	3
2	4
3	7
4	12

Em cada um dos três exemplos anteriores, a curva obtida é chamada **parábola**. É possível mostrar que o gráfico de qualquer função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola.
Isso será feito no volume 3 desta coleção.

Sejam um ponto **F** (foco) e uma reta **d** (diretriz) pertencentes a um mesmo plano, com $F \notin d$. **Parábola** é o conjunto dos pontos desse plano que estão à mesma distância de **F** e **d**.

Professor, se julgar necessário comente que a parábola é um tipo de curva que pertence ao grupo de cônicas, que serão estudadas no volume 3.

1º caso

Os pontos **Q**, **P**, **V**, **R** e **S** são alguns pontos da parábola. Assim:

QF = QQ'; PF = PP'; VF = VF'; RF = RR'; SF = SS'

Porque, como **V** pertence à parábola, a distância de **V** a **F** é igual à distância de **V** à diretriz, isto é, VF = VF' e **V** é ponto médio de $\overline{FF'}$.

Por que **V** é o ponto médio de $\overline{FF'}$?

Observe o ponto **Q**, por exemplo. A distância de **Q** à diretriz (**d**) é igual à distância de **Q** a **Q'**, sendo **Q'** a interseção de **d** com a reta perpendicular a **d** por **Q**. Da mesma forma definimos as distâncias de **P**, **V**, **R** e **S** à diretriz.

Temos ainda:

- a reta perpendicular à diretriz traçada pelo foco **F** é chamada **eixo de simetria da parábola**;
- o ponto **V** é o ponto da parábola mais próximo da diretriz e recebe o nome de **vértice da parábola**.

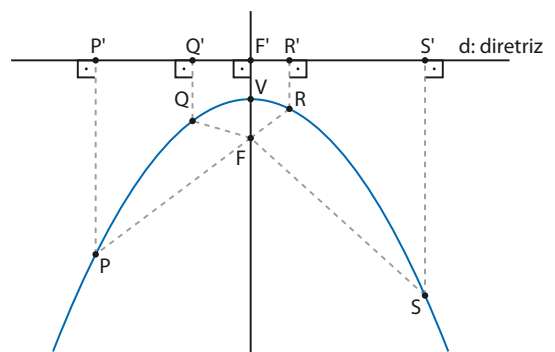
Com esse formato, dizemos que a parábola tem a concavidade ("abertura") voltada para cima.

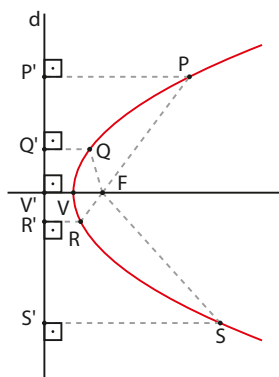
2º caso

Pode ocorrer também que o ponto **F** (foco) esteja abaixo da reta **d** (estamos considerando **d** horizontal, isto é, paralela ao eixo das abscissas). Observe o formato da parábola obtida:

P, **Q**, **V**, **R** e **S** são alguns pontos da parábola:

PF = PP'; QF = QQ'; VF = VF'; RF = RR'; SF = SS'; ...

Com esse formato, dizemos que a parábola tem a concavidade ("abertura") voltada para baixo.

PENSE NISTO:

Se a reta **d** (diretriz) for vertical, isto é, paralela ao eixo das ordenadas, como é mostrado abaixo, a parábola pode representar o gráfico de uma função quadrática?

Não; observe que existem valores reais de **x** que possuem duas imagens distintas em ℝ e valores reais de **x** que não têm imagens correspondentes em ℝ, o que contraria a definição de função.

OBSERVAÇÃO

Ao construir o gráfico de uma função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$, notamos sempre que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima, como no 1º caso; veja os exemplos 1 e 3.
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo, como no 2º caso; veja o exemplo 2.

EXERCÍCIOS

É interessante que os estudantes façam também a construção dos gráficos com auxílio do GeoGebra para familiarizar-se com o traçado da parábola. No GeoGebra, para indicar x^2 deve-se digitar: "x^2".

1 Esboce o gráfico de cada uma das funções de ℝ em ℝ dadas pelas leis seguintes:

a) $y = x^2$ **b)** $y = 2x^2$ **c)** $y = -x^2$ **d)** $y = -2x^2$

2 Construa o gráfico de cada uma das funções de ℝ em ℝ dadas pelas seguintes leis:

a) $y = x^2 - 2x$ **b)** $y = -x^2 + 3x$

3 Faça o gráfico de cada uma das funções de ℝ em ℝ dadas pelas leis seguintes:

a) $y = x^2 - 4x + 5$ **b)** $y = -x^2 + 2x - 1$ **c)** $y = x^2 - 2x + 1$

Raízes de uma equação do 2º grau

Chamam-se **raízes** ou **zeros da função polinomial do 2º grau**, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, os números reais **x** tais que $f(x) = 0$.

Em outras palavras, as raízes da função $y = ax^2 + bx + c$ são as soluções (se existirem) da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Vamos deduzir a fórmula que permite obter as raízes de uma função quadrática. Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Essa é a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau.

PENSE NISTO:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ é um trinômio quadrado perfeito?

Sim, desenvolvendo o produto notável $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, temos: $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}$, isto é, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$.

EXEMPLO 4

Vamos obter os zeros da função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
Temos $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

As raízes são 2 e 3.

EXEMPLO 5

Vamos calcular as raízes reais da função dada pela lei $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.
Temos $a = 4$, $b = -4$ e $c = 1$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$$

As raízes são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, ou seja, a função admite duas raízes iguais a $\frac{1}{2}$, ou ainda, a função admite uma raiz real dupla igual a $\frac{1}{2}$.

EXEMPLO 6

Vamos calcular os zeros reais da função dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$.
Temos $a = 2$, $b = 3$ e $c = 4$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4} \notin \mathbb{R}$$

Portanto, essa função não tem zeros reais.

Quantidade de raízes

As raízes de uma função quadrática são os valores de **x** para os quais $y = ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, são as abscissas dos pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.

Retomando os exemplos 4, 5 e 6, temos:

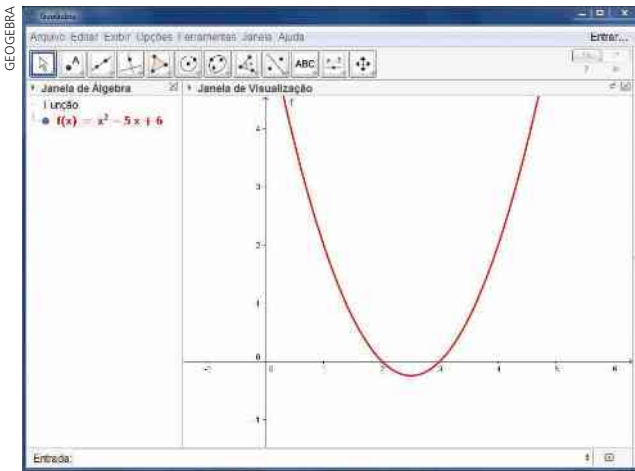
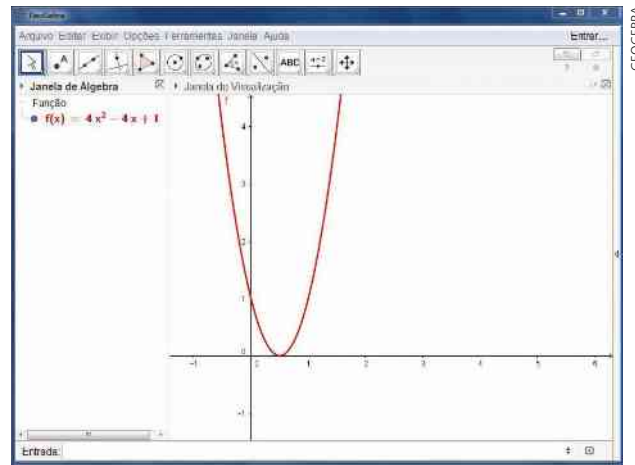
- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = x^2 - 5x + 6$ intersecta o eixo **x** nos pontos (3, 0) e (2, 0);
- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$ tangencia o eixo **x** no ponto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$;
- o gráfico da função **f** tal que $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ não intersecta o eixo Ox.

OBSERVAÇÃO

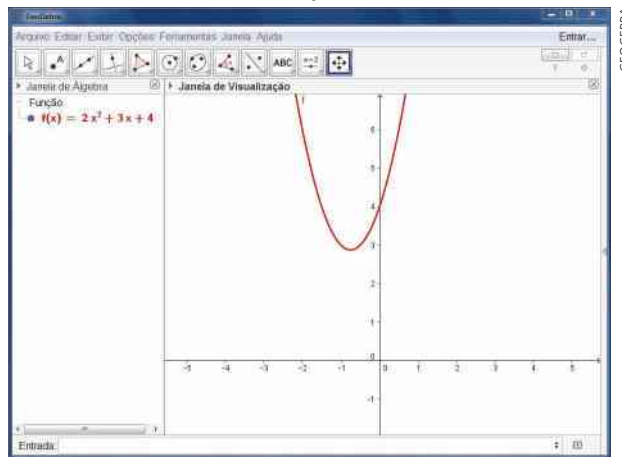
A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado **discriminante**:

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há duas raízes reais iguais (ou uma raiz dupla);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

Observe como são os três respectivos gráficos, traçados no GeoGebra:

Exemplo 4

GEOGEBRA

Exemplo 5

GEOGEBRA

Exemplo 6

GEOGEBRA

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Determine as condições sobre o parâmetro real **m** na função dada por $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ a fim de que:

a) não existam raízes reais;

b) haja uma raiz dupla;

c) existam duas raízes reais e distintas.

Solução:

Na lei $y = 3x^2 - 2x + (m - 1)$ as variáveis **x** e **y** se relacionam, e **m** é um parâmetro que pode assumir qualquer valor real.

Calculando o discriminante (Δ), temos:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m - 1) = 4 - 12m + 12 = 16 - 12m$$

Devemos ter:

a) $\Delta < 0 \Rightarrow 16 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{4}{3}$

b) $\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 12m = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$

c) $\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 12m > 0 \Rightarrow m < \frac{4}{3}$

EXERCÍCIOS

4 Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas pelas seguintes leis:

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$
b) $y = 4x - x^2$
c) $y = -x^2 + 2x + 15$
d) $y = 9x^2 - 1$
e) $y = -x^2 + 6x - 9$
f) $y = 3x^2$
g) $y = x^2 - 5x + 9$
h) $y = -x^2 + 2$
i) $y = x^2 - x - 6$
j) $y = (x + 3) \cdot (x - 5)$

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$
b) $(3x - 1)^2 + (x - 2)^2 = 25$
c) $2 \cdot (x + 3)^2 - 5 \cdot (x + 3) + 2 = 0$
d) $x + \frac{1}{x} = 3$
e) $(x - 1) \cdot (x + 3) = 5$

6 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir:

a) $(-x^2 + 1) \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0$
b) $(x - 1) \cdot (x - 2) = (x - 1) \cdot (2x + 3)$
c) $(x + 5)^2 = (2x - 3)^2$
d) $x^3 + 10x^2 + 21x = 0$
e) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

7 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (2x + 1) \cdot (x - 3)$. Determine o(s) elemento(s) do domínio cuja imagem é -5.

8 Em um retângulo, a medida de um dos lados excede a medida do outro em 4 cm. Sabendo que a área desse retângulo é 621 cm², determine seu perímetro.

9 Um grupo de professores programou uma viagem de confraternização que custaria, no total, R$ 6400,00 — valor que dividiriam igualmente entre si. Alguns dias antes da partida, seis professores desistiram da viagem e, assim, cada professor participante pagou R$ 240,00 a mais. Quantos foram à viagem?

10 Economistas estimam que os valores médios, em reais, das ações de duas empresas **A** e **B** sejam dados, respectivamente, por $v_A(t) = 4{,}20 + \frac{1}{4}t$ e $v_B(t) = \frac{1}{16}t^2 - \frac{1}{8}t + 3{,}20$, em que **t** é o tempo, em anos, contado a partir da data desta previsão.

a) Qual é o valor atual das ações de cada uma das empresas?
b) Daqui a 4 anos qual ação estará mais valorizada?
c) Daqui a quantos anos as ações das duas empresas terão o mesmo valor? Qual será esse valor?

11 Certo mês, um vendedor de sucos naturais arrecadou uma média diária de R$ 180,00, vendendo cada copo de suco pelo mesmo preço. No mês seguinte, aumentou o preço em R$ 0,50 e vendeu uma média de 18 unidades a menos por dia, mas a arrecadação média diária foi a mesma. Determine:

a) o preço do copo de suco no primeiro mês;
b) o número de copos por dia vendidos no primeiro mês;
c) o número de copos por dia vendidos no segundo mês.

12 Determine os valores reais de **p** a fim de que a função quadrática **f** dada por $f(x) = x^2 - 2x + p$ admita duas raízes reais e iguais.

13 Estabeleça os valores reais de **m** para os quais a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5x^2 - 4x + m$, admita duas raízes reais e distintas.

14 Encontre, em função de **m**, $m \in \mathbb{R}$, a quantidade de raízes da função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada pela lei $y = x^2 - 4x + (m + 3)$.

15 Qual é o menor número inteiro **p** para o qual a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 4x^2 + 3x + (p + 2)$, não admite raízes reais?

Soma e produto das raízes

Sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1 \cdot x_2$.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2a)^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

A soma das raízes procuradas é $-\frac{b}{a} = 6$ e o produto é $\frac{c}{a} = 8$. Logo, as raízes são 2 e 4 (pois $2 + 4 = 6$ e $2 \cdot 4 = 8$).

Lembre-se de que utilizar as fórmulas da soma e do produto das raízes junto com o cálculo mental é um bom recurso para resolver equações do 2º grau, principalmente nos casos em que a equação tem raízes inteiras.

EXEMPLO 7

A soma das raízes da equação $3x^2 + 2x - 5 = 0$ é $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$, e o produto dessas raízes é $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{3}$.

PENSE NISTO:

Utilizando essas fórmulas, resolva mentalmente a equação $x^2 - 6x + 8 = 0$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2 Determine $k \in \mathbb{R}$, a fim de que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$, de incógnita **x**, seja igual ao quádruplo da outra.

Solução:

Utilizando as fórmulas da soma e do produto, temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5 \quad (1) \qquad \text{e} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = k + 3 \quad (2)$$

Do enunciado, temos $x_1 = 4x_2$. (3)

Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 4$$

De (2), temos:

$$1 \cdot 4 = k + 3 \Rightarrow k = 1$$

Forma fatorada

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial do 2º grau dada por $y = ax^2 + bx + c$, com raízes $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, então **f** pode ser escrita na forma $y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, que é a chamada **forma fatorada** da função do 2º grau (lembre-se de que fatorar uma expressão algébrica significa escrevê-la sob a forma de multiplicação).

Vamos mostrar esta propriedade:

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Lembrando que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, podemos escrever:

$$y = a \cdot \left[x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2\right]$$

$$y = a \cdot \left[\underbrace{x^2 - x_1x}\ \underbrace{- x_2x + x_1x_2}\right]$$

$$y = a \cdot \left[x \cdot (x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)\right]$$

$$y = a \cdot \left[(x - x_1) \cdot (x - x_2)\right] = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

EXEMPLO 8

As raízes da função $y = x^2 - 2x - 3$ são -1 e 3. A forma fatorada dessa função é:

$$y = 1 \cdot [x - (-1)] \cdot (x - 3) = (x + 1) \cdot (x - 3)$$

EXERCÍCIOS

16 Calcule a soma e o produto das raízes reais das seguintes equações do 2º grau:

a) $3x^2 - x - 5 = 0$

b) $-x^2 + 6x - 5 = 0$

c) $2x^2 - 7 = 0$

d) $x(x - 3) = 2$

e) $(x - 4) \cdot (x + 5) = 0$

17 Sejam $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ as raízes da equação do 2º grau $2x^2 - 6x + 3 = 0$. Determine o valor de:

a) $r_1 + r_2$

b) $r_1 \cdot r_2$

c) $(r_1 + 3) \cdot (r_2 + 3)$

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$

e) $r_1^2 + r_2^2$

18 A diferença entre as raízes da equação $x^2 + 11x + p = 0$ (com $p \in \mathbb{R}$) é igual a 5. Com base nesse dado:

a) determine as raízes;

b) encontre o valor de **p**.

19 Uma das raízes da equação $x^2 - 25x + 2p = 0$ (com $p \in \mathbb{R}$) excede a outra em 3 unidades. Encontre as raízes da equação e o valor de **p**.

20 As raízes reais da equação $x^2 + 2mx + 48 = 0$ (com $m \in \mathbb{R}$) são negativas e uma é o triplo da outra. Qual é o valor de **m**?

21 Resolva mentalmente as equações do 2º grau usando soma e produto.

a) $x^2 - 2x - 3 = 0$

b) $x^2 + 6x + 5 = 0$

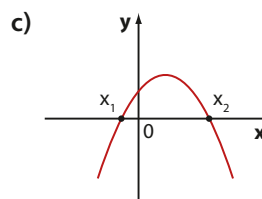
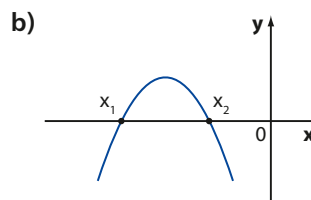
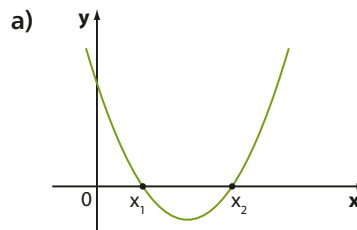
c) $x^2 + 4x - 5 = 0$

d) $x^2 + 2x - 35 = 0$

22 Em cada item, está representado o gráfico de uma função quadrática **f**.
Determine, para cada caso, o sinal da soma (**S**) e do produto (**P**) das raízes de **f**:

a)

b)

c)

23 Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $x^2 + mx + (m^2 - m - 12) = 0$ tenha uma raiz nula e a outra positiva.

24 Em cada caso, obtenha a forma fatorada de **f**, sendo:

a) $f(x) = x^2 - 8x$

b) $f(x) = x^2 - 7x + 10$

c) $f(x) = -2x^2 + 10x$

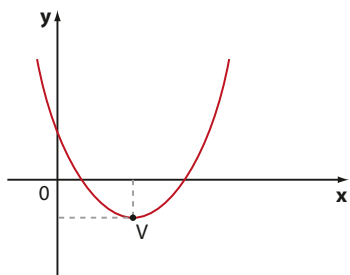
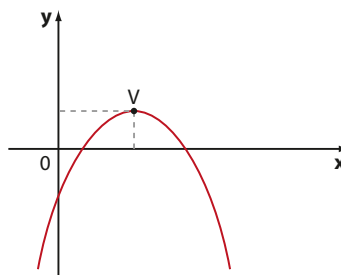
d) $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

e) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Coordenadas do vértice da parábola

Vamos obter as coordenadas do ponto **V**, chamado **vértice da parábola**.

Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo **V**; se $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo **V**.

- Se $a > 0$

- Se $a < 0$

Vamos retomar a fórmula que define a função quadrática e escrevê-la de outra forma:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Essa última forma é denominada **forma canônica** da função quadrática.

Observando a forma canônica, podemos notar que **a**, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes. Apenas **x** é variável. Daí:

- se $a > 0$, então o valor mínimo de **y** é estabelecido quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre se $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, se $x = -\frac{b}{2a}$; nessa situação, o valor mínimo de **y** é:

$$y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$$

- se $a < 0$, por meio de raciocínio semelhante, concluímos que o valor máximo de **y** ocorre se $x = -\frac{b}{2a}$; nessa situação, o valor máximo de **y** é:

$$y = a\left(0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Concluindo, em ambos os casos as coordenadas de **V** são:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

EXEMPLO 9

Vamos obter as coordenadas do vértice da parábola que representa a função dada por

$$y = x^2 - 12x + 30.$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2} = 6 \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a} =$$

$$= -\frac{144 - 120}{4} = -\frac{24}{4} = -6$$

Observe que, como $a = 1 > 0$, o vértice $(6, -6)$ representa um ponto de mínimo da função.

Basta substituir **x** por 6 na lei da função para obter $y = 6^2 - 12 \cdot 6 + 30 = -6$.

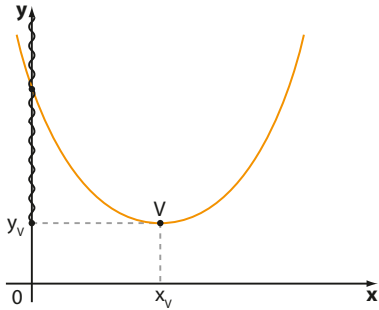
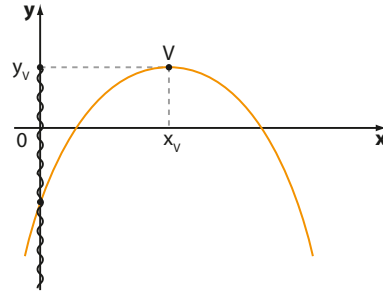
PENSE NISTO:

Depois de encontrarmos $x_V = 6$, como seria possível obter $\mathbf{y}_V$ sem usar a fórmula $-\frac{\Delta}{4a}$?

O conjunto imagem

O conjunto imagem Im da função definida por $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que **y** pode assumir. Há duas possibilidades:

- Se $a > 0$

$$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

- Se $a < 0$

EXEMPLO 10

Vamos determinar o conjunto imagem da função quadrática dada por $y = -3x^2 + 5x - 2$.
O vértice **V** dessa parábola tem coordenadas:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{6} \quad \text{e} \quad y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25 - 24}{-12} = \frac{1}{12}$$

Como $a < 0$, a função admite ponto de máximo.

O valor máximo que essa função assume é $y_V = \frac{1}{12}$.

Nesse caso, o conjunto imagem dessa função é $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{1}{12}\right\}$.

EXERCÍCIOS

25 Obtenha o vértice de cada uma das parábolas representativas das funções quadráticas:

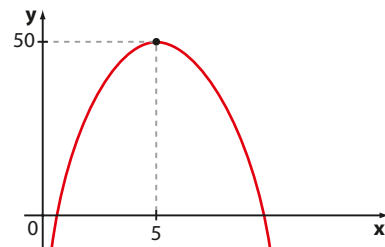
a) $y = x^2 - 6x + 4$
b) $y = -2x^2 - x + 3$
c) $y = x^2 - 9$

26 Qual é o valor mínimo (ou máximo) assumido por cada uma das funções quadráticas dadas pelas leis abaixo?

a) $y = -2x^2 + 60x$
b) $y = x^2 - 4x + 8$
c) $y = -x^2 + 2x - 5$
d) $y = 3x^2 + 2$

27 Qual é o conjunto imagem de cada uma das funções quadráticas dadas pelas leis abaixo?

a) $y = x^2 - 2$
b) $y = 5 - x^2$
c) $y = (x + 1)(2 - x)$
d) $y = x(x + 3)$

28 O gráfico seguinte representa a função quadrática dada por $y = -3x^2 + bx + c$. Quais são os valores de **b** e **c**?

29 Uma bola, lançada verticalmente para cima, a partir do solo, tem sua altura **h** (em metros) expressa em função do tempo **t** (em segundos), decorrido após o lançamento, pela lei:

$$h(t) = 40t - 5t^2$$

Determine:

a) a altura em que a bola se encontra 1 s após o lançamento;

b) o(s) instante(s) em que a bola se encontra a 75 m do solo;

c) a altura máxima atingida pela bola;

d) o instante em que a bola retorna ao solo.

30 Estima-se que, para um exportador, o valor v(x), em milhares de reais, do quilograma de certo minério seja dado pela lei: $v(x) = 0,6x^2 - 2,4x + 6$, sendo **x** o número de anos contados a partir de 2010 $(x = 0)$, com $0 \leqslant x \leqslant 10$.

a) Entre que anos o valor do quilograma desse produto diminuiu?

b) Qual é o valor mínimo atingido pelo quilograma do produto?

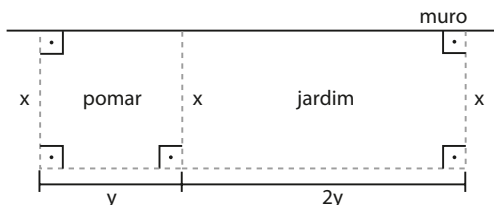
c) Em que ano o preço do quilograma do produto será máximo? Qual será esse valor?

31 A lei que expressa o número (**y**) de milhares de *downloads* de um aplicativo baixado em *smartphones*, em função do número (**x**) de semanas transcorridas desde o instante em que esse aplicativo ficou disponível para ser baixado, é: $y = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + c \cdot x$, em que **c** é uma constante real.

Sabendo que, ao completar uma semana do início da contagem, já haviam sido registrados 700 *downloads*, determine:

a) após quantas semanas, no mínimo não foram registrados mais *downloads* desse aplicativo;

b) após quantas semanas do início o número de *downloads* foi máximo e qual foi esse número.

32 Um fazendeiro possui 150 metros de um rolo de tela para cercar um jardim retangular e um pomar, aproveitando, como um dos lados, parte de um muro, conforme indica a figura seguinte:

a) Para cercar com a tela a maior área possível, quais devem ser os valores de **x** e **y**?

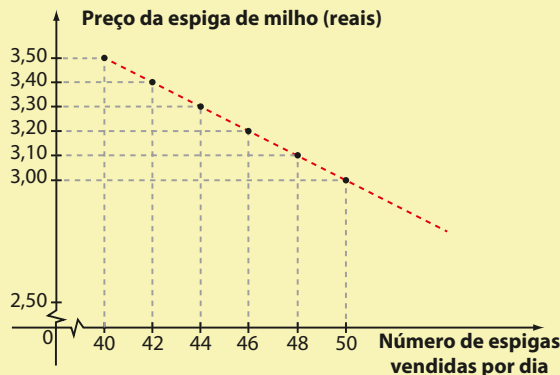
b) Qual seria a resposta, caso não fosse possível aproveitar a parte do muro indicada, sendo necessário cercá-la com a tela? Nesse caso, em que percentual ficaria reduzida a área máxima da superfície limitada pelo jardim e pelo pomar reunidos?

33 Entre todos os retângulos de perímetro 20 cm, determine aquele cuja área é máxima. Qual é essa área?

34 Considere todos os pares ordenados (x, y), com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, tais que $x - y = 2$.
Quais os valores de **x** e **y** de modo que a soma dos quadrados de **x** e de **y** seja a menor possível? Qual é o valor encontrado para essa soma?

TROQUE **IDEIAS**

A receita máxima

Ana vende milho verde em uma praia do litoral brasileiro. Durante o primeiro mês de uma temporada de verão, Ana observou que, quando o preço da espiga de milho é fixado em R$ 3,50, são vendidas 40 unidades por dia. Procurando aumentar sua arrecadação, Ana fez algumas reduções no preço da espiga que acarretaram um aumento nas vendas. Nessa relação entre preço e número de espigas vendidas, ela pôde verificar que, para cada R$ 0,10 de desconto, o número de espigas vendidas por dia aumentava em duas unidades, como mostra o gráfico ao lado (o desconto máximo praticado foi de R$ 1,50 e podem ser oferecidos descontos segundo múltiplos de R$ 0,05).

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Considerando linear a relação entre o preço (**y**) e o número (**x**) de espigas de milho vendidas, encontre a lei da função representada pelo gráfico.

b) Copie no caderno e complete a tabela seguinte, que relaciona o preço da espiga de milho, o número de unidades vendidas por dia e a receita (arrecadação) gerada.

Preço da espiga (R$)	Número de espigas vendidas por dia	Receita diária (R$)
3,50		
3,40		
3,30		
3,00		
2,90		
2,80		
2,50		

c) Ao analisar a tabela, Ana ficou interessada em saber qual o preço a ser cobrado pela espiga que proporcionaria a maior receita possível, isto é, a receita máxima. Use seus conhecimentos para resolver esse problema. Ao final, você deverá determinar:

i) o preço a ser cobrado pela unidade de espiga;

ii) a quantidade de espigas vendidas por esse preço;

iii) a receita gerada nessas condições.

Esboço da parábola

Muitas vezes, é interessante fazer um esboço do gráfico da parábola sem montar toda a tabela de pares (x, y) que satisfazem a lei da função quadrática. Esse esboço reúne elementos da parábola como vértice, interseções com o eixo **x** (se houver), que fornecem os zeros reais da função, e interseção com o eixo **y**. Esses elementos nos permitem analisar aspectos importantes das funções que as representam, como o sinal, os intervalos de crescimento e decrescimento, o ponto de máximo (ou de mínimo) etc.

Acompanhe, no roteiro abaixo, os passos para fazer o esboço da parábola:

- O sinal do coeficiente **a** define a concavidade da parábola.
- As raízes (ou zeros) definem os pontos em que a parábola intersecta o eixo Ox.
- O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$) ou o de máximo (se $a < 0$).
- A reta que passa por **V** e é paralela ao eixo Oy é o eixo de simetria da parábola. Veja um pouco mais sobre o eixo de simetria da parábola na página 114.
- Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então $(0, c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo Oy.

Veja os exemplos a seguir.

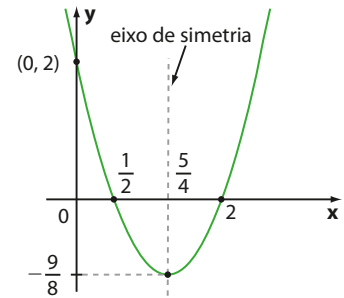
EXEMPLO 11

Façamos o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = 2x^2 - 5x + 2$.

Características:

- concavidade voltada para cima, pois $a = 2 > 0$
- raízes: $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 2$
- vértice: $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{9}{8}\right)$
- interseção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, 2)$

Note que $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq -\dfrac{9}{8}\right\}$.

Observe que **f** é crescente se $x > \dfrac{5}{4}$ e decrescente se $x < \dfrac{5}{4}$.

A abscissa do vértice é a média aritmética das raízes da função

PENSE NISTO:

Se a função quadrática tem duas raízes reais e distintas, qual é a relação existente entre elas e a abscissa do vértice?

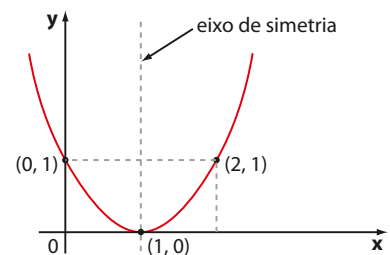
EXEMPLO 12

Vamos fazer o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = x^2 - 2x + 1$.

Características:

- concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$
- raízes $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (raiz dupla)
- vértice: $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = (1, 0)$
- interseção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, 1)$

Note que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

Observe que **f** é crescente se $x > 1$ e decrescente se $x < 1$.

PENSE NISTO:

Se a função quadrática tem uma raiz real dupla, qual é a relação existente entre essa raiz e a abscissa do vértice?

A raiz dupla coincide com a abscissa do vértice.

EXEMPLO 13

Vamos fazer o esboço do gráfico da função quadrática dada por $y = -x^2 - x - 3$.

Características:

- concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$
- zeros: $-x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \nexists x$ real, pois $\Delta < 0$
- vértice: $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$
- interseção com o eixo Oy: $(0, c) = (0, -3)$

Como temos apenas dois pontos, é recomendável obter mais alguns, por exemplo:

$$x = 1 \Rightarrow y = -5; (1, -5)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -3; (-1, -3) \text{ etc.}$$

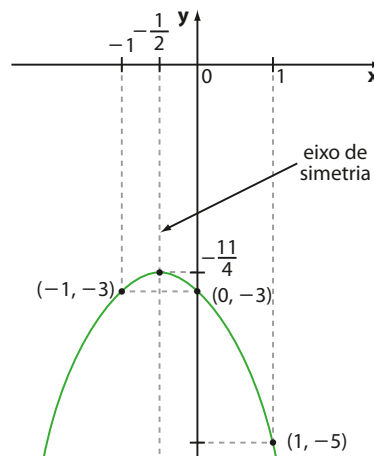
Note que $Im = \left\{y \in R \mid y \leq -\frac{11}{4}\right\}$.

$x = -2$
Não é necessário substituir **y** por -5 para resolver a equação e encontrar outro valor.
Considerando a simetria da parábola e a abscissa do vértice $x_V = -\frac{1}{2}$, temos que:

$f\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)$,

isto é, $f(1) = f(-2) = -5$.

PENSE NISTO:

Na parábola desse exemplo, qual é o outro valor de **x** correspondente a $y = -5$?

EXEMPLO 14

Vamos determinar a lei da função quadrática cujo esboço do gráfico está representado ao lado.

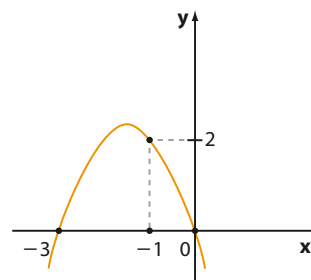
As raízes da função quadrática são -3 e 0; então sua lei, na forma fatorada, é:

$$y = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 0)$$

Para $x = -1$, temos $y = 2$, então:

$$2 = a(-1 + 3) \cdot (-1 - 0) \Rightarrow 2 = -2a \Rightarrow a = -1$$

Daí:

$$y = -1(x + 3) \cdot x \Rightarrow y = -x^2 - 3x$$

EXERCÍCIOS

35 Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis seguintes, com domínio em $\mathbb{R}$, destacando o conjunto imagem.

a) $y = x^2 - 6x + 8$

b) $y = -2x^2 + 4x$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

d) $y = (x - 3) \cdot (x + 2)$

36 Esboce o gráfico de cada uma das funções dadas pelas leis a seguir, com domínio real, e forneça também o conjunto imagem:

a) $y = -x^2 + \frac{1}{4}$

b) $y = x^2 + 2x + 5$

c) $y = -3x^2$

37 Faça o esboço do gráfico de cada função quadrática definida pela lei dada, destacando os intervalos em que a função é crescente ou decrescente:

a) $y = 4x^2 - 2x$

b) $y = -2x^2 + 4x - 5$

c) $y = -x^2 - 2x - 1$

d) $y = -x^2 + 2x + 8$

38 Um biólogo desejava comparar a ação de dois fertilizantes. Para isso, duas plantas **A** e **B** da mesma espécie, que nasceram no mesmo dia, foram desde o início tratadas com fertilizantes diferentes.

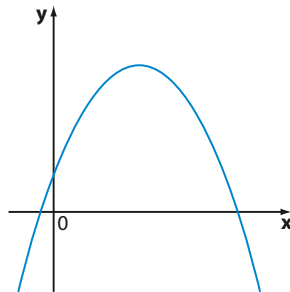
Durante vários dias ele acompanhou o crescimento dessas plantas, medindo, dia a dia, suas alturas. Ele observou que a planta **A** cresceu linearmente, à taxa de 2,5 cm por dia; e a altura da planta **B** pode ser modelada pela função dada por $y = \frac{20x - x^2}{6}$, em que **y** é a altura medida em centímetros e **x** o tempo medido em dias.

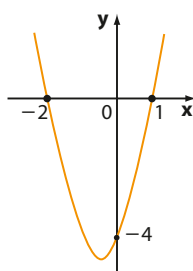
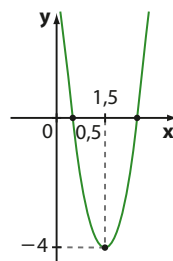
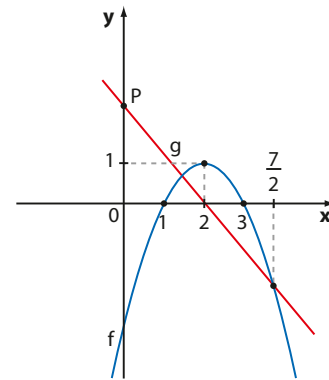
a) Obtenha a diferença entre as alturas dessas plantas com 2 dias de vida.

b) Qual é a lei da função que representa a altura (**y**) da planta **A** em função de **x** (número de dias)?

c) Determine o dia em que as duas plantas atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

d) Calcule a taxa média de variação do crescimento das plantas **A** e **B** do 1º ao 4º dia.

39 A parábola seguinte representa a função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determine o sinal dos coeficientes **a**, **b** e **c**.

40 Determine a lei da função que cada gráfico a seguir representa:

a)

b)

41 A figura a seguir mostra os gráficos de duas funções, **f** e **g**.

a) Usando a forma fatorada, obtenha a lei que define **f**.

b) Qual é a lei que define **g**?

c) Qual é a ordenada do ponto **P**?

42 Determine, em cada caso, a lei que define a função quadrática:

a) de raízes 4 e −2 e cujo vértice da parábola correspondente é o ponto (1, 9);

b) de raiz dupla igual a $\sqrt{3}$ e cujo gráfico intersecta o eixo Oy em (0, 3);

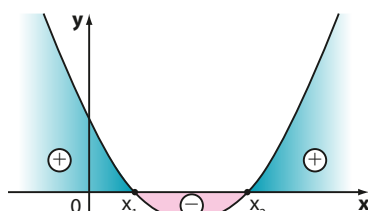
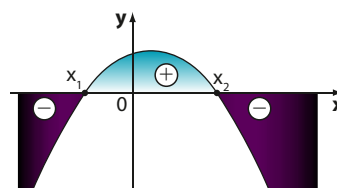
c) cujo gráfico contém os pontos (−1, −4), (1, 2) e (2, −1).

Sinal

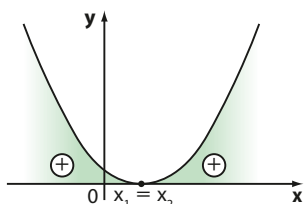
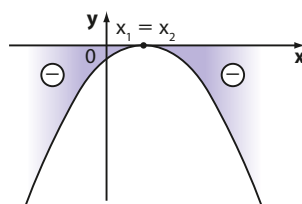
Consideremos uma função quadrática dada por $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ e determinemos os valores de **x** para os quais **y** é negativo e os valores de **x** para os quais **y** é positivo.

Conforme o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podem ocorrer os seguintes casos:

$\Delta > 0$

Nesse caso, a função quadrática admite duas raízes reais distintas ($x_1 \neq x_2$). A parábola intersecta o eixo Ox em dois pontos, e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:

$a > 0$
$y > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

$a < 0$
$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

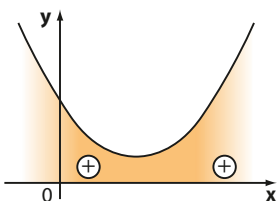
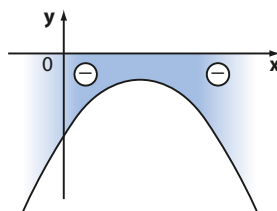
$\Delta = 0$

Nesse caso a função quadrática admite duas raízes reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo Ox, isto é, intersecta o eixo em um único ponto, e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:

$a > 0$
$y > 0, \forall x \neq x_1$
$\nexists x$ tal que $y < 0$

$a < 0$
$y < 0, \forall x \neq x_1$
$\nexists x$ tal que $y > 0$

$\Delta < 0$

Nesse caso, a função quadrática não admite raízes reais. A parábola não intersecta o eixo Ox e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:

$a > 0$
$y > 0, \forall x$
$\nexists x$ tal que $y < 0$

$a < 0$
$y < 0, \forall x$
$\nexists x$ tal que $y > 0$

EXEMPLO 15

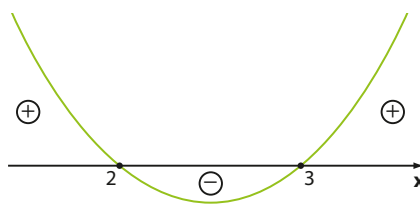
Vamos estudar o sinal de $y = x^2 - 5x + 6$.

Temos:

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ parábola com concavidade voltada para cima

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0 \Rightarrow$ dois zeros reais distintos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3$$

Assim: $y > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$
$y < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

EXEMPLO 16

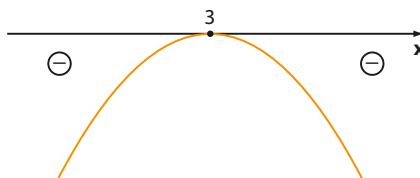
Vamos estudar o sinal de $y = -x^2 + 6x - 9$.

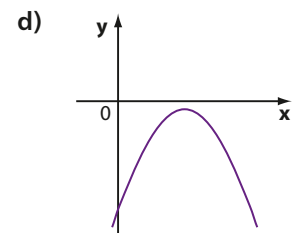
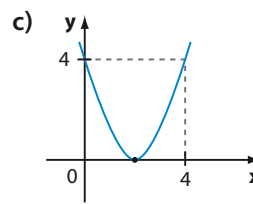
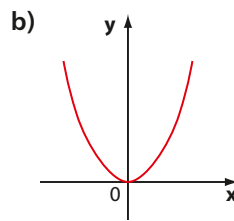
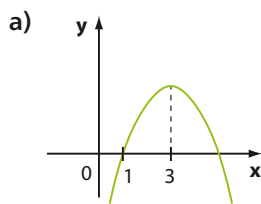
Temos:

$a = -1 < 0 \Rightarrow$ parábola com concavidade voltada para baixo

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0 \Rightarrow$ dois zeros reais iguais

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = 3$$

Assim: $y < 0, \forall x \neq 3$
$\nexists x$ tal que $y > 0$

EXERCÍCIOS

43 Faça o estudo do sinal de cada função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujo gráfico está representado a seguir.

a)
b)
c)
d)
44 Faça o estudo de sinal de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas pelas seguintes leis:

a) $y = -3x^2 - 8x + 3$

b) $y = 4x^2 + x - 5$

c) $y = 9x^2 - 6x + 1$

d) $y = 2 - x^2$

e) $y = -x^2 + 2x - 1$

f) $y = 3x^2 - x + 4$

g) $y = 3x^2$

h) $y = 4x^2 + 8x$

Inequações

Vamos retomar a situação 1 da introdução deste capítulo.

Vimos que a lei que expressa o número (**y**) de jogos do campeonato em função do número (**x**) de clubes é:

$$y = x^2 - x$$

Suponhamos que a Confederação Brasileira de Futebol (CBF), ao organizar um campeonato, perceba que só há datas disponíveis para a realização de no máximo 150 jogos. Quantos clubes poderão participar?

Para responder a essa questão, temos de resolver a **inequação**:

$$x^2 - x \leqslant 150$$

que equivale a $x^2 - x - 150 \leqslant 0$.

Esse é um exemplo de uma inequação do 2º grau, conteúdo que passaremos a estudar agora.

O processo de resolução de uma inequação do 2º grau está baseado no estudo do sinal da função do 2º grau envolvida na desigualdade. É importante observar a analogia entre o processo que será apresentado e um dos processos usados para resolver inequações do 1º grau, como vimos no capítulo anterior.

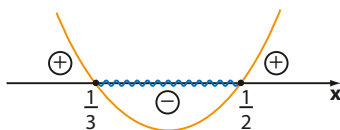
Acompanhe os exemplos seguintes:

EXEMPLO **17**

Para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $6x^2 - 5x + 1 \leqslant 0$, fazemos o seguinte:

Chamamos de **y** a função quadrática no 1º membro: $y = 6x^2 - 5x + 1$. Depois, estudamos o sinal de **y**:

$a = 6 > 0$, $\Delta = 1 > 0$, raízes: $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

Sinal
$y > 0 \Leftrightarrow \left(x < \frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{1}{2}\right)$
$y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$

A inequação pergunta: "para que valores de **x** temos $y \leqslant 0$?".

Temos: $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

EXEMPLO 18

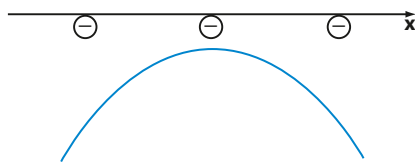
Para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $x^2 + x \geqslant 2x^2 + 1$, vamos escrever todos os termos da inequação em um dos membros, por exemplo, o 1º membro:

$$x^2 + x - 2x^2 - 1 \geqslant 0$$
$$-x^2 + x - 1 \geqslant 0$$

Agora, estudamos o sinal de $y = -x^2 + x - 1$.

Temos:

$a = -1 \Rightarrow$ parábola com concavidade voltada para baixo

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \Rightarrow$ não há zeros reais

Concluindo, $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A inequação pergunta: "para que valores de **x** temos $y \geqslant 0$?".

Dessa forma, $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y \geqslant 0$, ou seja, $S = \varnothing$.

EXEMPLO 19

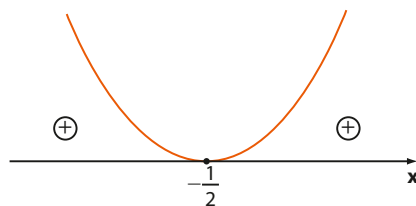
Vamos resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $2x^2 + 3x + 1 > -x(1 + 2x)$.

Temos:

$$2x^2 + 3x + 1 + x(1 + 2x) > 0$$
$$4x^2 + 4x + 1 > 0$$

Vamos estudar o sinal de $y = 4x^2 + 4x + 1$.

$a = 4 > 0,\ \Delta = 0,$ raiz: $-\frac{1}{2}$

Sinal
$y > 0, \forall x \neq -\frac{1}{2}$
$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$

A inequação pergunta: "para que valores de **x** temos $y > 0$?".

Portanto, $x \neq -\frac{1}{2}$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq -\frac{1}{2}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

EXEMPLO 20

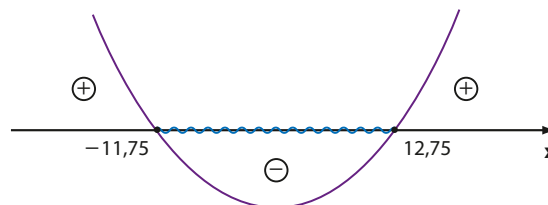
Vamos retomar a situação descrita na página 111; é preciso resolver a inequação $x^2 - x - 150 \leqslant 0$.

As raízes de $y = x^2 - x - 150$ são $\frac{1 \pm \sqrt{601}}{2}$; considerando $\sqrt{601} \simeq 24,5$, obtemos como raízes 12,75 e −11,75 e o sinal de **y** é dado ao lado.

Como devemos ter $y \leqslant 0$, segue que $-11,75 \leqslant x \leqslant 12,75$.

Mas, neste problema, **x** é o número de times e, deste modo, só pode assumir valores inteiros positivos.

O maior inteiro nestas condições é $x = 12$ (12 clubes).

Nesse caso, haveria $12 \cdot 11 = 132$ jogos no campeonato.

EXERCÍCIOS

45 Resolva, em ℝ, as seguintes inequações:

a) $x^2 - 11x - 42 < 0$

b) $3x^2 + 5x - 2 > 0$

c) $-x^2 + 4x + 5 \geqslant 0$

d) $-4x^2 + 12x - 9 < 0$

e) $3x^2 + x + 5 > 0$

f) $9x^2 - 24x + 16 \leqslant 0$

46 Determine, em ℝ, o conjunto solução das seguintes inequações:

a) $-x^2 + 10x - 25 > 0$

b) $x^2 - 8x + 15 \leqslant 0$

c) $-x^2 - 2x > 15$

d) $x^2 + 2x < 35$

e) $-x^2 - 4x - 3 \leqslant 0$

f) $x^2 - 3x < 1$

47 Resolva, em ℝ, as inequações:

a) $x \cdot (x - 3) \geqslant 0$

b) $x^2 < 16$

c) $9x^2 \geqslant 3x$

d) $-4x^2 < 9$

e) $\left(\sqrt{3}\right)^2 > x^2$

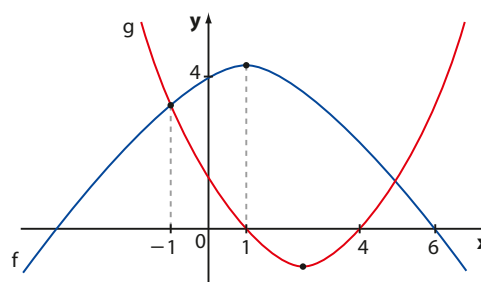
f) $x \cdot (x + 3) < x \cdot (2 - x)$

48 Na fabricação de certo produto, o lucro mensal de uma empresa, em milhares de reais, é dado por $L(x) = -\frac{3x^2}{4} + 90x - 1\,500$, sendo **x** o número de milhares de peças vendidas no mês. Determine:

a) o lucro mensal máximo na venda dessas peças;

b) para que valores de **x** a empresa tem prejuízo, isto é, $L < 0$;

c) em que intervalo deve variar o número de peças vendidas a fim de que o lucro supere 1 milhão de reais. Use $\sqrt{600} \simeq 24,5$.

49 Na figura a seguir tem-se os gráficos das funções quadráticas **f** e **g**.

Determine:

a) as raízes de **f**;

b) o vértice de cada uma das parábolas que representam essas funções;

c) o conjunto solução da inequação $g(x) < 0$;

d) o conjunto solução da inequação $f(x) \geqslant 0$.

50 Todos os pontos do gráfico da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx^2 - 2x + m$ estão localizados abaixo do eixo das abscissas. Determine os possíveis valores reais de **m**.

DESAFIO

(Enem-MEC) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas y = f(x), da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função y = f(x) a ser utilizada pelo professor é:

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

UM POUCO MAIS SOBRE — Eixo de simetria da parábola

Consideremos a parábola que representa a função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Seu vértice **V** tem abscissa $x_V = -\frac{b}{2a}$.

Consideremos a reta **e** que passa por **V** e é perpendicular ao eixo Ox. Vamos demonstrar que essa reta é o eixo de simetria da parábola.

Tomando um ponto **A** da parábola à distância **r** da reta **e** (conforme mostra a figura ao lado), as coordenadas de **A** são $\left(-\frac{b}{2a} - r, y_A\right)$.

Tomando a função quadrática na forma canônica:

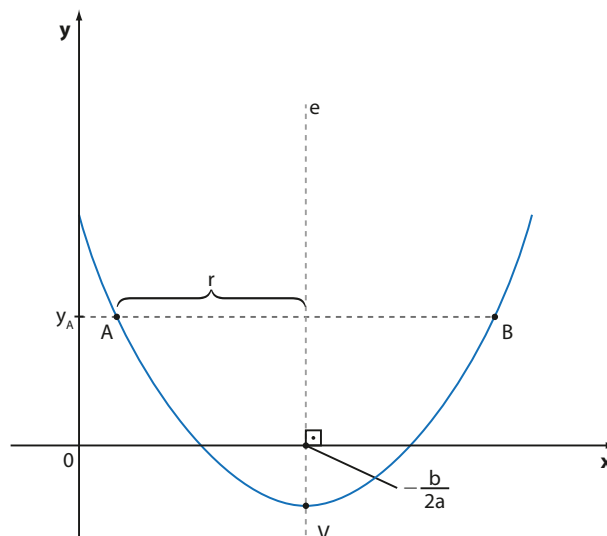
$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

e considerando que **A** pertence à parábola, temos:

$$y_A = f\left(-\frac{b}{2a} - r\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} - r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[(-r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[(r)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(-\frac{b}{2a} + r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = f\left(-\frac{b}{2a} + r\right)$$

Assim, provamos que o ponto **B** da parábola que tem ordenada igual à de **A** também está à distância **r** da reta **e**, pois $x_B = -\frac{b}{2a} + r$, ou seja, **A** e **B** são simétricos em relação à reta **e**.

Função definida por várias sentenças

Função definida por mais de uma sentença

Você sabe o que é o imposto de renda? Sabe como ele é calculado?

Todo mês, ao receber seu salário, muitos trabalhadores brasileiros do mercado formal de trabalho notam, em seu holerite, que há um desconto de parte desse salário, um tributo sobre o rendimento (imposto de renda) pago ao Governo Federal.

Em meados de 2015, o imposto de renda era calculado com base na seguinte tabela:

Tabela de incidência mensal
(a partir do mês de abril do ano calendário de 2015)

Rendimento mensal (em R$)	Alíquota (em %)	Parcela a deduzir (em R$)
Até 1 903,98	—	—
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36

Fonte: Receita Federal do Brasil. Disponível em: <idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#tabelas-para-atualiza-o-do-custo-de-bens-e-direitos>. Acesso em: 4 mar. 2016.

A tabela mostra a alíquota de imposto e a parcela a deduzir para cada faixa de rendimento mensal. Para se calcular o imposto de renda (IR), é necessário calcular uma porcentagem do salário e, do valor obtido, subtrair uma parcela. Acompanhe os exemplos:

- Um trabalhador com rendimentos mensais de R$ 1 500,00 fica isento do pagamento do imposto, isto é, IR = 0;
- Um trabalhador com rendimento de R$ 2 500,00 no mês tem seu IR assim calculado (veja a 2ª faixa de rendimento mensal da tabela):

  1º) $7{,}5\%$ de $2\,500 = \dfrac{7{,}5}{100} \cdot 2\,500 = 187{,}50$

  2º) $187{,}50 - 142{,}80 = 44{,}70$, isto é, IR = R$ 44,70

- Um trabalhador com salário mensal de R$ 4 000,00 tem seu IR assim calculado (veja a 4ª faixa de rendimento mensal da tabela):

  1º) $22{,}5\%$ de $4\,000 = \dfrac{22{,}5}{100} \cdot 4\,000 = 900$

  2º) $900 - 636{,}13 = 263{,}87$, isto é, IR = R$ 263,87

- Um trabalhador cujo salário mensal é R$ 8 000,00 tem seu IR assim calculado (veja a última faixa de rendimento mensal da tabela):

1º) $27{,}5\%$ de $8\,000 = \frac{27{,}5}{100} \cdot 8\,000 = 2\,200$

2º) $2\,200 - 869{,}36 = 1\,330{,}64$, isto é, IR = R$ 1 330,64

Em geral, se o salário do trabalhador é **x**, seu imposto de renda mensal **y** é assim calculado:

- Se $0 < x \leqslant 1\,903{,}98$, então $y = 0$
- Se $1\,903{,}99 \leqslant x \leqslant 2\,826{,}65$, então $y = 0{,}075 \cdot x - 142{,}80$
- Se $2\,826{,}66 \leqslant x \leqslant 3\,751{,}05$, então $y = 0{,}15 \cdot x - 354{,}80$
- Se $3\,751{,}06 \leqslant x \leqslant 4\,664{,}68$, então $y = 0{,}225 \cdot x - 636{,}13$
- Se $x > 4\,664{,}68$, então $y = 0{,}275 \cdot x - 869{,}36$

Podemos observar que **y** é função de **x** e essa relação é estabelecida por cinco sentenças. Usa-se uma sentença ou outra dependendo do intervalo em que o valor de **x** se enquadra. Esse é um exemplo de **função definida por mais de uma sentença.**

Veja o exemplo seguinte.

Veja a 2ª faixa, por exemplo. Se não existisse a parcela a deduzir, um trabalhador que ganhasse R$ 1 900,00 não pagaria IR, enquanto quem ganhasse R$ 1 910,00 pagaria 7,5% (o que daria aproximadamente 143,25 reais). Calculando 7,5% de 1 903,98 (limite de isenção), obtemos 142,80 reais, que é a parcela a deduzir. Desse modo, ao "cair" na 2ª faixa, paga-se, na verdade, 7,5% sobre o que exceder 1 903,98.

PENSE NISTO:

Como são obtidos os valores da "parcela a deduzir" na 3ª coluna da tabela do imposto de renda?

EXEMPLO 1

Considere agora o quadro a seguir, que apresenta parte da conta de água de uma residência que gastou 17 m³ de água. Além do valor a pagar, a conta mostra como calculá-lo em função do consumo de água (em m³). Existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de saneamento – Tarifa de água/m³

Faixa de consumo (em m³)	Tarifas (em reais)	Consumo	Valor (em reais)
até 10	6,00	tarifa mínima	6,00
de 11 a 20	0,93 por m³	7	6,51
de 21 a 50	2,33 por m³		
acima de 50	2,98 por m³		
		Total	12,51

Observe que, à medida que o consumo aumenta, o valor do metro cúbico de água fica mais caro. É uma forma de privilegiar famílias cujo consumo é menor com tarifas mais baixas, estimulando-as a diminuir o consumo de água e alertando a população da necessidade do consumo mais consciente da água.

Veja qual seria o valor da conta se o consumo dobrasse, isto é, se passasse a 34 m³ de água:

$$\underbrace{6{,}00}_{\text{primeiros } 10\text{ m}^3} + \underbrace{0{,}93 \cdot 10}_{\text{de } 11\text{ m}^3 \text{ a } 20\text{ m}^3} + \underbrace{2{,}33 \cdot 14}_{\text{de } 21\text{ m}^3 \text{ a } 34\text{ m}^3} = 6{,}00 + 9{,}30 + 32{,}62 = 47{,}92$$

PENSE NISTO:

Nesse exemplo, o valor da conta e o número de m³ consumidos são grandezas diretamente proporcionais?

Não; dobrando-se o consumo, o valor da conta não dobra. É oportuno revisar o conceito de grandezas diretamente proporcionais e função linear.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 Seja f: ℝ → ℝ uma função definida pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Calcule f(−3), $f(-\sqrt{2})$, f(0), f(2) e f(1000).

Solução:

- $-3 < 0 \Rightarrow f(-3) = 1$
- $-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = 1$
- $0 \geqslant 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1 = 1$
- $2 \geqslant 0 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$
- $1\,000 \geqslant 0 \Rightarrow f(1\,000) = 1\,000 + 1 = 1\,001$

EXERCÍCIOS

1 Seja f: ℝ → ℝ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -1, \text{ se } x < 2 \end{cases}$.

Calcule:

a) f(0)

b) f(−1)

c) $f(\sqrt{3})$

d) $f(\sqrt{5})$

e) f(2)

2 Seja f: ℝ → ℝ definida pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 4x^2 - x + 5, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Qual é o valor de:

a) f(1)?

b) f(−1)?

c) f(3) + f(−3)?

3 Seja f: ℝ → ℝ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x < -2 \\ x + 3, \text{ se } -2 \leqslant x < 1 \\ x^2 - 5, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Calcule o valor de:

a) f(−3) + f(0)

b) $f(\sqrt{3}) - f(-1)$

c) f(−2) · f(2)

4 Seja f: ℝ → ℝ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 5, \text{ se } x < 1 \\ 2x - 3, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Determine os possíveis valores de **x** correspondentes a:

a) f(x) = 0

b) f(x) = −3

5 Uma operadora de celular oferece dois planos a seus clientes:

- Plano I: valor fixo mensal de R$ 80,00 para até 120 minutos de ligações locais. Caso o cliente exceda esse tempo, o custo do minuto adicional é de R$ 1,20.
- Plano II: não há mensalidade e cada ligação local custa R$ 0,80.

Para quantos minutos de ligações locais no mês é indiferente contratar qualquer um dos planos?

6 É comum observarmos em casas de fotocópias promoções do tipo:

- Até 100 cópias: R$ 0,10 por cópia.
- Acima de 100 cópias (de um mesmo original): R$ 0,07 por cópia excedente.

Determine:

a) o valor pago por 130 cópias de um mesmo original;

b) a lei que define a função preço **p** pago pela reprodução de **x** cópias de um mesmo original.

c) refaça os itens *a* e *b*, supondo que, acima de 100 cópias, seja cobrado R$ 0,07 por cópia (e não apenas para as excedentes).

7 Em um encarte de supermercado consta uma promoção de amaciante de roupas, a saber:

- preço da unidade: R$ 6,80
- acima de três unidades: R$ 1,40 de desconto por unidade

a) Qual será a despesa total na compra de 2, 3, 4 e 5 unidades desse amaciante?

b) Seja **x** (x ∈ ℕ) o número de amaciantes comprados e **y** o valor total (em reais) gasto. Qual é a lei da função que relaciona **x** e **y**?

8 No quadro seguinte estão representados os valores do metro cúbico (m^3) de água praticados em residências de certo município, de acordo com a faixa de consumo.

Faixa de consumo (m^3)	Tarifa (R$)
Até 20 m^3	1,20 por m^3
De 21 m^3 a 50 m^3	1,80 por m^3 excedente
Acima de 50 m^3	2,90 por m^3 excedente

a) Determine o valor da conta de água de duas residências, R_1 e R_2, cujos consumos foram 28 m^3 e 35 m^3, respectivamente.

b) Qual o consumo correspondente a uma conta de água no valor de R$ 112,80?

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor total (**v**), em reais, ao consumo de **x** metros cúbicos.

Gráfico

Vamos construir gráficos de algumas funções definidas por várias sentenças.

EXEMPLO 2

Para construir o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$, podemos construir o gráfico correspondente a cada sentença e reuni-los.

- 1º passo: construímos o gráfico da função constante dada por $f(x) = 1$, mas só consideramos a parte em que $x < 0$ (figura 1);
- 2º passo: construímos o gráfico da função afim dada por $f(x) = x + 1$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 0$ (figura 2);
- 3º passo: reunimos os dois gráficos em um só (figura 3).

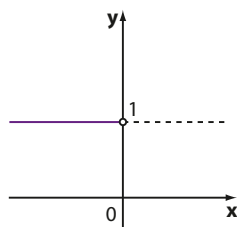



figura 1

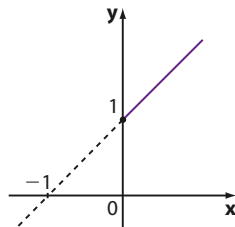



figura 2

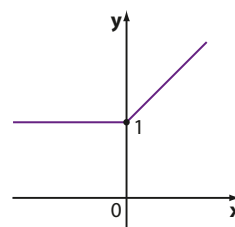



figura 3

Observe que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 1\}$.

EXEMPLO 3

Vamos construir o gráfico da função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x \leqslant 2. \\ 4 - x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

PENSE NISTO:

As retas dadas pelas equações $y = 1 - x$ e $y = 4 - x$ se intersectam?

Fazendo $1 - x = 4 - x$, obtemos $0 \cdot x = 3$. Assim, $\nexists x \in \mathbb{R}$ que satisfaz a equação, ou seja, essas retas são paralelas.

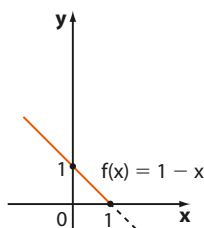
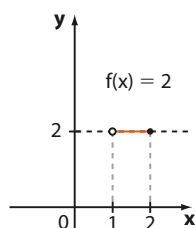
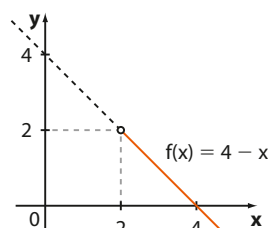



figura 1

figura 2

figura 3

figura 4

Note que $Im = \mathbb{R}_+$.

EXERCÍCIOS

9 Faça o gráfico das seguintes funções f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, destacando seu conjunto imagem.

a) $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 2, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \geqslant 3 \\ 4, \text{ se } x < 3 \end{cases}$

10 Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$ e forneça o conjunto imagem.

a) $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 2 \\ 3, \text{ se } x = 2 \\ 2, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ 4 - x, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

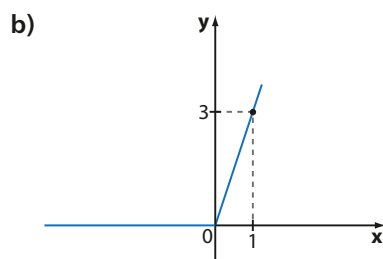
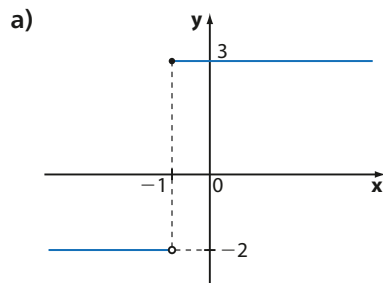
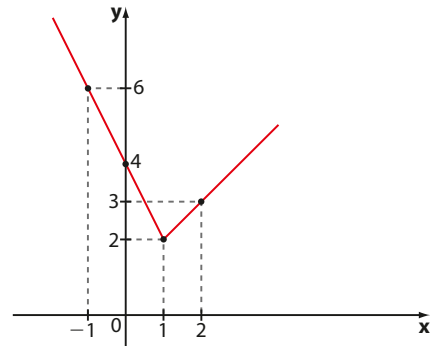
c) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x - 2; \text{ se } x \geqslant 2 \\ -x + 2; \text{ se } x < 2 \end{cases}$

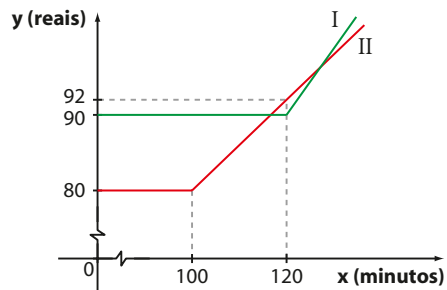
11 Forneça a lei de cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujos gráficos estão abaixo representados:

a)

b)

12 Seja f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função representada no gráfico abaixo:

a) Qual é a lei que define **f**?

b) Resolva a equação $f(x) = 5$. Verifique no gráfico as soluções encontradas.

c) Para que valores reais de **k** a equação $f(x) = k$ apresenta soluções?

13 Uma empresa de telefonia móvel oferece a seus clientes dois planos mensais. No plano Alfa, cobra R$ 80,00 para até 100 minutos de ligação para números de outras operadoras e R$ 0,60 por minuto excedente. No plano Beta, cobra R$ 90,00 por até 120 minutos de ligações para outras operadoras e R$ 0,80 por minuto excedente.
O gráfico seguinte mostra a relação entre o valor mensal pago e o número de minutos de ligações para outras operadoras, para os dois planos:

a) Associe os gráficos I e II aos respectivos planos.

b) Determine o valor pago por um cliente **A** que usar 90 minutos mensais no plano Alfa e o valor pago por um cliente **B** que usar 140 minutos nesse mesmo plano, por mês.

c) Uma conta de R$ 154,00, no plano Beta, corresponde a quantos minutos de ligações?

d) Existem dois intervalos de tempo para os quais é mais vantajoso optar pelo plano Alfa. Localize-os no gráfico, determinando-os em seguida. (Considere nos cálculos um número inteiro de minutos.)

Módulo de um número real

O conceito de módulo de um número real é importante para a Matemática. Ele é necessário, por exemplo, para definir $\sqrt{x^2}$. Se $x \geqslant 0$, $\sqrt{x^2} = x$, e, se $x \leqslant 0$, $\sqrt{x^2} = -x$. Veja os exemplos seguintes:

I) $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

II) $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

III) $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

IV) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

V) $\sqrt{0^2} = \sqrt{0} = 0$

Note que $x \geqslant 0$ em (I), (III) e (V), e $x < 0$ em (II) e (IV). Para definir $\sqrt{x^2}$, podemos usar o conceito de módulo de um número real, já apresentado no capítulo 2 e que será aprofundado agora.

O estudante deve perceber que o valor 0 pode ser incluído em qualquer uma das condições: $x > 0$ ou $x < 0$, pois o oposto de zero é zero.

Dado um número real **x**, chama-se **módulo** ou **valor absoluto de x**, e se indica por $|x|$, o número real não negativo tal que:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ \text{ou} \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

PENSE NISTO:

É possível definir

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x > 0 \\ \text{ou} \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases} ?$$

Isso significa que:

- o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;
- o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número;
- o módulo de um número real qualquer é sempre maior ou igual a zero.

Vejamos alguns exemplos:

- $|2| = 2$
- $|0| = 0$
- $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$
- $|\underbrace{3 - \pi}_{\text{negativo}}| = -(3 - \pi) = \pi - 3$
- $|-7| = 7$
- $\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$
- $|\underbrace{\sqrt{7} - \sqrt{2}}_{\text{positivo}}| = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

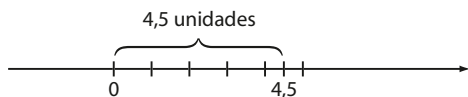
OBSERVAÇÃO

Com a definição de módulo de um número real, podemos escrever: $\sqrt{x^2} = |x|$. Assim, temos:

- $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$
- $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$
- $\sqrt{3^2} = |3| = 3$
- $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

Interpretação geométrica

O módulo de um número real **x** representa a distância, na reta real, entre **x** e 0 (origem). Veja estes exemplos:

- $|4{,}5| = 4{,}5$: distância entre 4,5 e 0

- $|-2| = 2$: distância entre -2 e 0

2 unidades

-2 0

- $|0| = 0$: nesse caso, **x** é a própria origem e, assim, a distância é nula.

Observe que, para todo número real **x**, a distância entre 0 e **x** é sempre expressa por um número real positivo ou nulo.

Propriedades

Vamos conhecer algumas propriedades do módulo de um número real.

I) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

Demonstração:

É imediata, pois: se $x > 0$, $|x| = x > 0$

se $x < 0$, $|x| = -x > 0$

e se $x = 0$, $|x| = 0$

II) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

Demonstração:

Se $x \geq 0$, $|x| = x$ e, então, $|x|^2 = |x| \cdot |x| = x \cdot x = x^2$

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e, então, $|x|^2 = |x| \cdot |x| = (-x) \cdot (-x) = x^2$

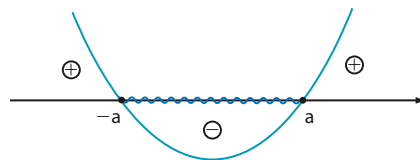
III) Seja $a \in \mathbb{R}_+$

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Demonstração:

$|x| \leq a \overset{a \geq 0}{\Longleftrightarrow} |x|^2 \leq a^2$

Pela propriedade II, temos: $x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \leq 0$.

Como **a** é fixo, podemos pensar nessa desigualdade como uma inequação do 2º grau, na incógnita **x**. Estudando o sinal de $y = x^2 - a^2$, temos:

Assim, como queremos $x^2 - a^2 \leq 0$, temos que $-a \leq x \leq a$, isto é, $|x| \leq a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \forall a \in \mathbb{R}_+$.

Exemplo:

$|x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Os números reais cuja distância à origem é menor ou igual a 2 estão entre -2 e 2 (incluindo -2 e 2):

PENSE NISTO:

Qual é a interpretação geométrica para esse exemplo?

IV) Seja $a \in \mathbb{R}_+$

$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

Demonstração:

$|x| \geq a \overset{a \geq 0}{\Longleftrightarrow} |x|^2 \geq a^2$

Pela propriedade II, temos:

$x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 \geq 0$

Resolvendo essa inequação do 2º grau na incógnita **x**, temos:

$x \leq -a$ ou $x \geq a$, isto é, $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ ou $x \geq a$

Exemplo:

$|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4$ ou $x > 4$

Os números reais cuja distância à origem é maior que 4 estão à esquerda de -4 ou à direita de 4:

PENSE NISTO:

Qual é a interpretação geométrica para esse exemplo?

EXERCÍCIOS

14 Calcule:

a) $|-9|$

b) $\left|\frac{5}{3}\right|$

c) $\left|-\frac{1}{2}\right|$

d) $|0|$

e) $|-\sqrt{2}|$

f) $|0,83|$

g) $\sqrt{8^2}$

h) $\sqrt{(-8)^2}$

i) $\sqrt{\left(-\frac{2}{9}\right)^2}$

15 Calcule:

a) $|-5-8|$

b) $|2 \cdot (-3)|$

c) $|0,3-0,1|$

d) $|0,1-0,3|$

e) $\left|\frac{3}{5}-1\right|$

f) $\left|-\frac{4}{3}+1\right|$

g) $-|-\sqrt{7}|$

h) $|4| \cdot |-2|$

i) $|4 \cdot (-2)|$

16 Calcule o valor das expressões:

a) $A = |3-\sqrt{5}| - |\sqrt{5}-3|$

b) $B = |-\sqrt{2}-1| + 2 \cdot |1-\sqrt{2}|$

c) $C = ||\sqrt{10}| - |-3||$

17 Para $x \in \mathbb{R}$, $x > 4$, calcule o valor de cada expressão seguinte:

a) $\frac{|x-4|}{4-x}$

b) $3 + \frac{|x-4|}{x-4}$

c) $\frac{|x|}{x} + \frac{|x-4|}{x-4}$

d) $\frac{|4-x|}{x-4}$

18 Seja $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. São verdadeiras as igualdades?

I) $|x| + |y| = |x+y|$

II) $|x| - |y| = |x-y|$

III) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

IV) $|x|^3 = x^3$

Prove a(s) que for(em) verdadeira(s); para a(s) falsa(s), dê um contraexemplo.

Função modular

Chama-se **função modular** a função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real **x** ao seu módulo (valor absoluto), isto é, **f** é definida pela lei $f(x) = |x|$.

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Sim, por exemplo: $f(3) = |3| = 3$ e $f(-3) = |-3| = 3$.

PENSE NISTO:

Considerando **f** a função modular, é possível que tenhamos $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ reais, com $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$?

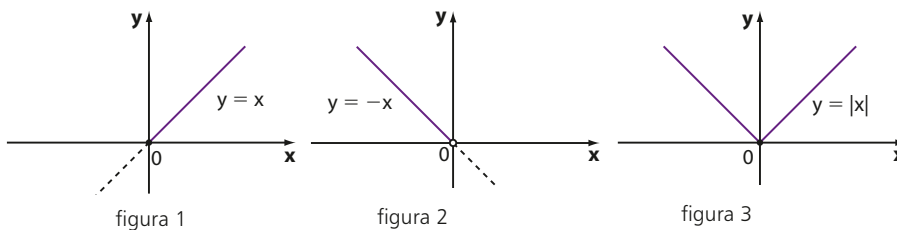
Gráfico

Para construir o gráfico da função modular, procedemos assim:

- 1º passo: construímos o gráfico da função $f(x) = x$, mas só consideramos a parte em que $x \geq 0$ (figura 1), que é a bissetriz do 1º quadrante.
- 2º passo: construímos o gráfico da função $f(x) = -x$, mas só consideramos a parte em que $x < 0$ (figura 2), que é a bissetriz do 2º quadrante.
- 3º passo: reunimos os dois gráficos anteriores (figura 3).

figura 1

figura 2

figura 3

Professor, no GeoGebra, para se obter |x| deve-se digitar: abs(x).

Observe que o conjunto imagem de **f** é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.

Outros gráficos

I) A partir do gráfico da função **f** dada por $y = |x|$, podemos construir o gráfico de outras funções definidas por uma lei do tipo $y = |x| + k$, em que $k \in \mathbb{R}$.

Vamos considerar, como exemplo, a função **g** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = |x| + 1$. Temos:

- Se $x \geqslant 0$, então $|x| = x$ e $g(x) = x + 1$ (figura 1).
- Se $x < 0$, então $|x| = -x$ e $g(x) = -x + 1$ (figura 2).

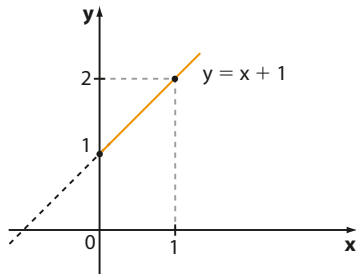



figura 1

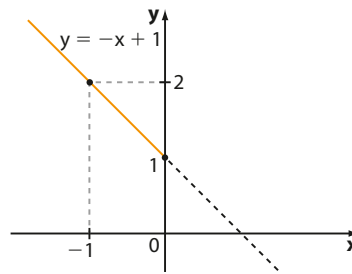



figura 2

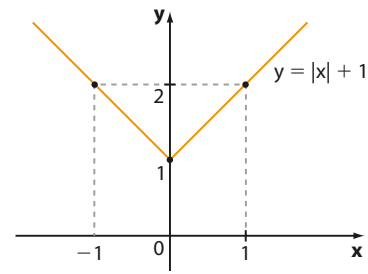
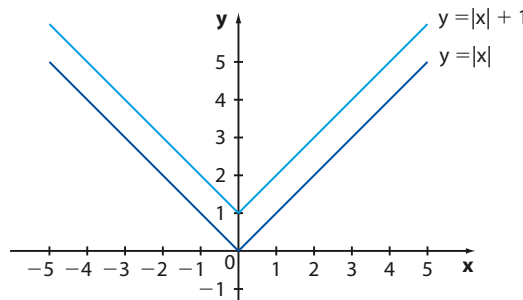



figura 3

Observe que o gráfico obtido para a função **g** definida por $y = |x| + 1$ (figura 3) corresponde ao gráfico da função modular ($y = |x|$), deslocado, verticalmente, uma unidade para cima. A esse deslocamento damos o nome de **translação vertical**. Acompanhe os dois gráficos feitos, em um mesmo plano.

PENSE NISTO:

É possível determinar o conjunto imagem da função real $y = |x| + 1$ sem construir seu gráfico?

Sim, como, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$, então $|x| + 1 \geqslant 1$. Isto é, $y \geqslant 1$ e $Im = [1, \infty[$. A análise do gráfico em azul-claro mostra que $Im = [1, +\infty[$. O *Pense nisto* sugere um método algébrico para se determinar o conjunto imagem.

II) A partir do gráfico da função dada por $y = |x|$, podemos construir o gráfico de outras funções definidas por uma lei do tipo $y = |x + k|$, em que $k \in \mathbb{R}$.

Consideremos, por exemplo, a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x - 2|$.

Como $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x - 2 \geqslant 0, \text{ isto é, } x \geqslant 2 \\ -x + 2, \text{ se } x - 2 < 0, \text{ isto é, } x < 2 \end{cases}$, procedemos assim:

- 1º passo: construímos o gráfico de $y = x - 2$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 2$ (figura 1).
- 2º passo: construímos o gráfico de $y = -x + 2$, mas só consideramos a parte em que $x < 2$ (figura 2).
- 3º passo: reunimos os dois gráficos anteriores (figura 3).

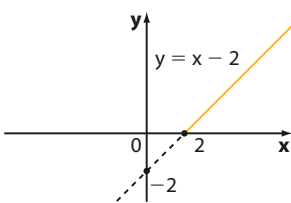
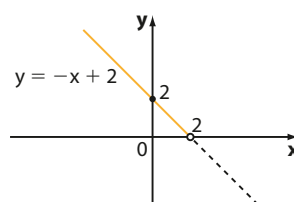
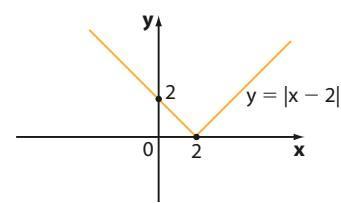
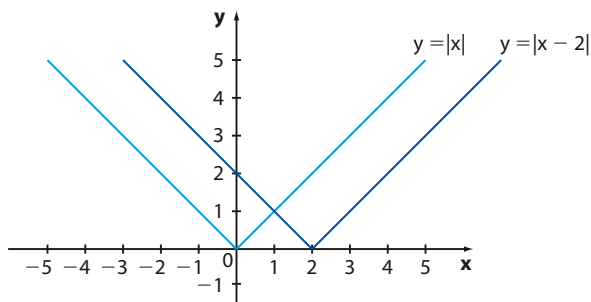
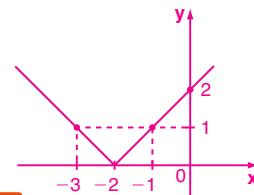



figura 1

figura 2

figura 3

Note que o gráfico obtido na figura 3 corresponde ao gráfico da função modular ($y = |x|$) transladado, na horizontal, duas unidades para a direita. Veja os dois gráficos construídos em um mesmo plano.

Pense nisto:
É preciso deslocar o gráfico em azul-claro ($y = |x|$) duas unidades para a esquerda:

PENSE NISTO:
Como você representaria o gráfico de $y = |x + 2|$?

EXERCÍCIOS

19 Construa o gráfico das seguintes funções definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dadas por:

a) $y = |x| + 2$
b) $y = |x| - 3$
c) $y = |x| + 5$
d) $y = |x| - \frac{1}{2}$

20 Construa os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

a) $y = |x - 1|$
b) $y = |x + 1|$
c) $y = |x + 3|$
d) $y = |x - 3|$

21 A partir do gráfico de $y = |x|$, represente a sequência de gráficos necessária para construir o gráfico da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 1{,}5| + 2$.

22 Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = |2x - 4| + 3$.

a) Qual é o valor de $f(0) + f(1)$?

b) Sem fazer o gráfico, é possível encontrar o conjunto imagem de **f**. Determine-o.

Equações modulares

Notemos uma propriedade do módulo dos números reais:

- $|x| = 2 \Rightarrow |x|^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2$ ou $x = -2$
- $|x| = \frac{3}{7} \Rightarrow |x|^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{49} \Rightarrow x = +\frac{3}{7}$ ou $x = -\frac{3}{7}$

De modo geral, sendo **k** um número real positivo, temos:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

Por exemplo: $|x| = 5 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 5$

Utilizando essa propriedade, vejamos como solucionar algumas equações modulares.

-5 e 5 são os dois números reais que distam 5 unidades da origem.

PENSE NISTO:
Qual é a interpretação geométrica para o exemplo ao lado?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

2 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|3x - 1| = 2$.

Solução:

Temos: $|3x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 3x - 1 = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$S = \left\{1, -\frac{1}{3}\right\}$

3 Resolva a equação $|2x + 3| = x + 2$, em $\mathbb{R}$.

Solução:

Para todo **x** real, sabemos que $|2x + 3| \geqslant 0$. Assim, para que a igualdade seja possível, devemos ter $x + 2 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant -2$ (*).

Supondo $x \geqslant -2$, temos:

$$|2x + 3| = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3 = x + 2 \Rightarrow x = -1 \\ \text{ou} \\ 2x + 3 = -x - 2 \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

- $x = -1$ satisfaz (*)
- $x = -\frac{5}{3}$ satisfaz (*)

$$S = \left\{-1, -\frac{5}{3}\right\}$$

$S = \varnothing$. O estudante deve notar que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|2x + 3| \geqslant 0$. Logo, não existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que $|2x + 3| = -2$.

PENSE NISTO:

Qual é o conjunto solução da equação $|2x + 3| = -2$?

EXERCÍCIOS

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $|x| = 4$

b) $|x| = \frac{3}{2}$

c) $|x| = 0$

d) $|x| = -2$

e) $|x| = -\frac{5}{3}$

f) $|x|^2 = 9$

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $|3x - 2| = 1$

b) $|x + 6| = 4$

c) $|x^2 - 2x - 5| = 3$

d) $|x^2 - 4| = 5$

e) $||2x - 1| - 3| = 2$

25 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $|-2x + 5| = x$

b) $|3x - 1| = x + 2$

c) $|10 - 2x| = 2x - 5$

d) $|3x - 4| = x^2$

e) $|2x - 1| = 2x - 1$

f) $|x - 3| = 3 - x$

g) $|x|^2 - 3|x| = 10$

26 Determine os valores reais de **p** a fim de que a equação $|4x - 5| = p - 3$ admita solução.

27 Um *site* de compras coletivas lançou uma promoção válida para os doze primeiros dias de um certo mês. A lei seguinte representa o número (**n**) de dezenas de cupons vendidos no dia **t**; com $t \in \{1, 2, ..., 12\}$:

$n(t) = 3 \cdot |18 - 2t| + 40$

a) Quantos cupons foram vendidos no dia 3? E no dia 10?

b) Em que dia foram vendidos 520 cupons?

c) Em que dia foi vendida a menor quantidade de cupons e qual foi essa quantidade?

28 Em um laboratório de Física foi feito um experimento cujo objetivo era medir, em centímetros, a deformação de uma mola elástica. Tal experimento foi executado por 5 duplas de alunos, cada uma das quais repetiu-o por duas vezes, em condições idênticas. No quadro seguinte encontram-se as duas medições obtidas pelas duplas, com exceção da 2ª medição feita pela dupla **E**.

Dupla	1ª medição (em cm)	2ª medição (em cm)
A	4,175	4,189
B	4,190	4,181
C	4,179	4,185
D	4,177	4,188
E	4,176	

O professor calculou, para cada dupla, o módulo **m** da diferença das medidas obtidas e considerou aceitável os casos em que **m** não superasse 0,01 cm.

a) Entre as duplas **A, B**, **C**, **D**, quais tiveram resultado considerado aceitável?

b) Determine o valor que não consta no quadro, sabendo que, para a dupla **E**, obteve-se $m = 0{,}012$.

Inequações modulares

A resolução de algumas inequações modulares tem por base a aplicação das seguintes propriedades do módulo de um número real, já estudadas neste capítulo.

Para $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, temos:

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ ou $x > a$

EXEMPLO 4

Vamos utilizar a propriedade para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $|x - 1| < 4$.

Devemos ter: $-4 < x - 1 < 4 \Rightarrow -3 < x < 5$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$$

EXEMPLO 5

Para resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação $|2x - 3| > 7$, devemos ter:

$$\begin{cases} 2x - 3 < -7 \Rightarrow 2x < -4 \Rightarrow x < -2 \\ \text{ou} \\ 2x - 3 > 7 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > 5 \end{cases}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$$

$S = \mathbb{R}$. O estudante deve perceber que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|2x - 3| \geq 0 > -7$.

PENSE NISTO:

Qual é, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação $|2x - 3| > -7$?

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

29 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $|x| > 6$

b) $|x| \leq 4$

c) $|x| < \frac{1}{2}$

d) $|x| \geq \sqrt{2}$

e) $|x| > -2$

f) $|x| \leq -2$

g) $|x| \leq 0$

h) $|x| \geq 0$

30 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $|x + 3| > 7$

b) $|2x - 1| \leq 3$

c) $|-x + 1| \geq 1$

d) $|5x - 3| < 12$

31 No ano passado, Neto participou de um curso de inglês em que, todo mês, era submetido a uma avaliação. Como Neto é fanático por Matemática, propôs uma lei para representar, mês a mês, seu desempenho nessas provas.

Na expressão $f(x) = 3 + \frac{|x - 6|}{2}$, f(x) representa a nota obtida por Neto no exame realizado no mês **x** ($x = 1$ corresponde a janeiro; $x = 2$, a fevereiro, e assim por diante).

a) Em que meses sua nota ficou acima de 5?

b) Em que mês Neto obteve seu pior desempenho? Qual foi essa nota?

32 Obtenha, em cada caso, o domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função, definida por:

a) $f(x) = \sqrt{|x| - 2}$

b) $g(x) = \sqrt{|x - 1|}$

DESAFIO

Os pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem a igualdade $|x| + |y| = 1$ determinam (ou limitam) uma região. Qual é a área dessa região?

Sugestão: Faça a análise em 4 casos.

Função exponencial

Professor, os resultados do último censo podem ser consultados no *Censo demográfico 2010: características da população e dos domicílios*, disponível em: <biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/93/cd_2010_caracteristicas_populacao_domicilios.pdf>, acesso em 4 mar. 2016.

Introdução

Os dados do último censo demográfico, ocorrido em 2010, indicaram que, naquele ano, a população brasileira era de 190 755 799 habitantes e estava crescendo à taxa aproximada de 1,2% ao ano. A taxa de crescimento populacional leva em consideração a natalidade, a mortalidade, as imigrações etc.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

O censo é realizado a partir da coleta de dados efetuada pelos recenseadores, que visitam cada domicílio.

Suponha que tal crescimento seja mantido para a década seguinte, isto é, de 2011 a 2020. Nessas condições, qual seria a população brasileira ao final de **x** anos (x = 1, 2, ..., 10), contados a partir de 2010?

Para facilitar os cálculos, vamos aproximar a população brasileira em 2010 para 191 milhões de habitantes.

- Passado 1 ano a partir de 2010 (em 2011), a população, em milhões, seria:

$$\underbrace{191}_{\text{população em 2010}} + \overbrace{1{,}2\% \cdot 191}^{\text{aumento}} = 191 + 0{,}012 \cdot 191 = 1{,}012 \cdot 191$$

$$1{,}2\% = \frac{1{,}2}{100} = 0{,}012$$

  Aproximadamente 193,29 milhões de habitantes.

- Passados 2 anos a partir de 2010 (em 2012), a população, em milhões, seria:

$$\underbrace{1{,}012 \cdot 191}_{\text{população em 2011}} + \underbrace{0{,}012 \cdot 1{,}012 \cdot 191}_{\text{aumento}} = 1{,}012 \cdot 191\,(1 + 0{,}012) = 1{,}012^2 \cdot 191$$

  Aproximadamente 195,61 milhões de habitantes.

- Passados 3 anos a partir de 2010 (em 2013), a população, em milhões, seria:

$$\underbrace{1{,}012^2 \cdot 191}_{\text{população em 2012}} + \underbrace{0{,}012 \cdot 1{,}012^2 \cdot 191}_{\text{aumento}} = 1{,}012^2 \cdot 191(1 + 0{,}012) = 1{,}012^3 \cdot 191$$

  Aproximadamente 197,96 milhões de habitantes.

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

- Passados **x** anos, contados a partir de 2010, (x = 1, 2, ..., 10), a população brasileira, em milhões de habitantes, seria:

$$1{,}012^x \cdot 191$$

A função que associa a população (**y**), em milhões de habitantes, ao número de anos (**x**), transcorridos a partir de 2010, é:

$$y = 1{,}012^x \cdot 191$$

que é um exemplo de **função exponencial**, a qual passaremos a estudar agora.

Inicialmente, vamos fazer uma revisão sobre potências, raízes e suas propriedades – assunto já estudado no Ensino Fundamental II.

Potência de expoente natural

Dados um número real **a** e um número natural **n**, com $n \geqslant 2$, chama-se **potência de base a** e **expoente n** o número $\mathbf{a^n}$ que é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{n}\text{ fatores}}$$

Dessa definição decorre que:

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a, \quad a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \quad \text{etc.}$$

Há dois casos especiais:

- Para $n = 1$, definimos $a^1 = a$, pois com um único fator não se define o produto.
- Para $n = 0$ e supondo $a \neq 0$, definimos $a^0 = 1$.

Vejamos alguns exemplos de potências:

- $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
- $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = 1\,296$
- $3^1 = 3$
- $\left(\frac{3}{10}\right)^0 = 1$
- $(3{,}2)^2 = 3{,}2 \cdot 3{,}2 = 10{,}24$
- $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- $(-8)^1 = -8$
- $7^0 = 1$
- $(1{,}5)^3 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}375$

As calculadoras científicas auxiliam no cálculo de potências, que pode ser bastante trabalhoso.

Observe a tecla y^x, em que **y** representa a base da potência, e **x**, seu expoente.

- Para calcular $1{,}3^5$, pressionamos:

1 · 3 → y^x → 5 → = → 3.71293

Obtemos 3,71293.

- Para calcular $2{,}3^8$, pressionamos:

2 · 3 → y^x → 8 → = → 783.1098528

Obtemos o valor aproximado 783,1098528.

Cabe ressaltar que existem muitos modelos de calculadora e, em alguns casos, uma ou outra das operações anteriores poderá ser invertida.

Em alguns modelos, a tecla y^x é substituída pela tecla ^.

Propriedades

Sendo **a** e **b** números reais e **m** e **n** naturais, valem as seguintes propriedades:

I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0 \text{ e } m \geqslant n)$

III) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

IV) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

V) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Estas propriedades podem ser usadas para simplificar expressões. Veja o exemplo a seguir.

EXEMPLO 1

Supondo $a \cdot b \neq 0$, simplifiquemos a expressão:

$$y = \frac{(a^2b^3)^5}{(a^2)^3b^7}$$

Aplicando as propriedades estudadas, temos:

$$y = \frac{a^{10}b^{15}}{a^6b^7} = a^{10-6}b^{15-7} = a^4b^8$$

OBSERVAÇÃO

Na definição de potência com expoente natural, foi estabelecido que $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $a^0 = 1$. Isso garante a validade das propriedades apresentadas. Veja:

- Façamos $m = 0$, de acordo com a primeira propriedade:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$$

Para que ocorra igualdade, devemos ter $a^0 = 1$.

- Façamos $m = n$, de acordo com a segunda propriedade:

Por um lado, $\dfrac{a^n}{a^n} = 1$, que é o quociente de dois números iguais.

Por outro lado, aplicando a propriedade, temos:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Convenciona-se, então, $a^0 = 1$.

Potência de expoente inteiro negativo

Vamos definir as potências de expoente inteiro negativo de modo que as propriedades estudadas no item anterior continuem valendo.

Observe os exemplos seguintes:

- $2^3 \cdot 2^{-3} = 2^{3+(-3)} = 2^0 = 1$; assim, $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$
- $\dfrac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2}$

Por outro lado, temos: $\dfrac{7^3}{7^5} = \dfrac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7} = \dfrac{1}{7^2}$

Daí, $7^{-2} = \dfrac{1}{7^2}$

Os cálculos acima sugerem a definição a seguir.

PENSE NISTO:

Por que esta definição não vale para $a = 0$?

Se tivéssemos $a = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0^{-n} = \dfrac{1}{0^n} = \dfrac{1}{0}$, impossível de ocorrer.

Dados um número real **a**, não nulo, e um número **n** natural, chama-se **potência de base a** e **expoente −n** o número $\mathbf{a^{-n}}$, que é o inverso de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vejamos alguns exemplos:

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$
- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
- $1^{-8} = \frac{1}{1^8} = \frac{1}{1} = 1$
- $(0,4)^{-2} = \left(\frac{4}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4}$

Propriedades

As cinco propriedades enunciadas para potência de expoente natural são válidas para potência de expoente inteiro negativo, quaisquer que sejam os valores dos expoentes **m** e **n** inteiros.

EXERCÍCIOS

1 Calcule:

a) 5^3

b) $(-5)^3$

c) 5^{-3}

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

e) $\left(\frac{1}{50}\right)^{-2}$

f) $\left(-\frac{11}{7}\right)^0$

g) $\left(\frac{3}{2}\right)^1$

h) $\left(-\frac{1}{2}\right)^0$

i) $-(-2)^5$

j) -10^2

k) 10^{-3}

l) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$

2 Calcule:

a) $0,2^2$

b) $0,1^{-1}$

c) $3,4^1$

d) $(-4,17)^0$

e) $0,05^{-2}$

f) $1,25^{-1}$

g) $1,2^3$

h) $(-3,2)^2$

i) $0,6^3$

j) $0,08^{-1}$

k) $(-0,3)^{-1}$

l) $(-0,01)^{-2}$

3 Calcule o valor de cada uma das expressões:

a) $A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot (-2)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1$

b) $B = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

c) $C = -2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 1^{15} - (-2)^1$

d) $D = \left[\left(-\frac{5}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\right]^{-1}$

e) $E = [3^{-1} - (-3)^{-1}]^{-1}$

f) $F = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$

4 Escreva em uma única potência:

a) $\frac{11^3 \cdot (11^4)^2 \cdot 11}{11^6}$

b) $\frac{(2^4)^3 \cdot 2^7 \cdot 2^3}{(2^{11})^2}$

c) $\frac{10^{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-3}}{(0,01)^{-1}}$

d) $\frac{10 \cdot 10^{-5} \cdot (10^2)^{-3}}{(10^{-4})^3}$

e) $\frac{2^{3^2} \cdot 3^4}{3 \cdot (2^3)^2}$

5 Coloque em ordem crescente:

$A = (-2)^{-2} - 3 \cdot (0,5)^3$, $B = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ e

$C = \frac{-\frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$.

6 Escreva em uma única potência:

a) a metade de 2^{100};

b) o triplo de 3^{20};

c) a oitava parte de 4^{32};

d) o quadrado do quíntuplo de 25^{10}.

7 Sendo $a = \frac{2^{48} + 4^{22} - 2^{46}}{4^3 \cdot 8^6}$, obtenha o valor de $\frac{1}{26} \cdot a$.

TROQUE **IDEIAS**

Notação científica

Números muito pequenos ou muito grandes são frequentes em estudos científicos e medições de grandezas, permeando várias áreas do conhecimento, como Física, Química, Astronomia, Biologia, Meio Ambiente etc. Observe alguns exemplos:

I) A massa do planeta Terra é de 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kg.

II) A distância entre a Terra e a Lua é de 384 000 000 m.

III) A massa de um próton é de 0,00000000000000000000000001673 kg.

IV) Ano-luz é a distância percorrida pela luz em um ano, no vácuo, à velocidade aproximada de 300 000 km/s. Um ano-luz equivale a aproximadamente 9 460 530 000 000 km.

V) Quando o nível de ozônio no ar em certa região atinge 200 $\mu g/m^3$, inicia-se o estado de atenção na região. Isso significa que cada metro cúbico de ar contém 0,0002 g de ozônio (1 grama corresponde a 1 milhão de microgramas).

A leitura desses números é facilitada quando são escritos em **notação científica**. Basicamente, trata-se de escrevê-los como o produto de um número real **a** ($1 \leqslant a < 10$) e uma potência de base dez e expoente inteiro. Observe alguns exemplos:

- $62\,000\,000 = 6{,}2 \cdot 10\,000\,000 = 6{,}2 \cdot 10^7$
- $0{,}0000035 = \dfrac{3{,}5}{1\,000\,000} = \dfrac{3{,}5}{10^6} = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$
- $15\,670\,000\,000 = 1{,}567 \cdot 10^{10}$
- $0{,}0008 = \dfrac{8}{10\,000} = \dfrac{8}{10^4} = 8 \cdot 10^{-4}$

A vantagem de escrever um número em notação científica é a rapidez no reconhecimento da ordem de grandeza desses números.

- Faça o que se pede: Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Escreva os números presentes nos exemplos I, II, III, IV e V em notação científica.

b) Efetue as seguintes operações, escrevendo o resultado em notação científica:

i) $0{,}0000005 \cdot 42\,000\,000$

ii) $0{,}000000006 : 0{,}00015$

iii) $1\,300\,000\,000 \cdot 50\,000\,000\,000$

iv) $4\,500\,000 : 0{,}0009$

c) A distância média aproximada de Vênus ao Sol é de $1{,}082 \cdot 10^{11}$ m e a distância média aproximada da Terra ao Sol é de $149{,}6 \cdot 10^6$ km.

i) Qual planeta se encontra mais próximo do Sol?

ii) Qual é a diferença entre a maior e a menor distância em quilômetros? Escreva a resposta em notação científica.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

A Terra e a Lua vistas de um satélite orbitando a 35 000 km de altura.

Fontes de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 6ª ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012.; *Parâmetros físicos e astronômicos*. Disponível em: <astro.if.ufrgs.br/dados.htm>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Raiz n-ésima (enésima) aritmética

Dados um número real não negativo **a** e um número natural **n**, $n \geqslant 1$, chama-se **raiz enésima aritmética de a** o número real e não negativo **b** tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado **radical**, indica a raiz enésima aritmética de **a**. Nele, **a** é chamado **radicando**, e **n**, **índice**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geqslant 0 \text{ e } b^n = a$$

Vejamos alguns exemplos:

- $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$
- $\sqrt[6]{0} = 0$, pois $0^6 = 0$
- $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$
- $\sqrt[4]{16} = 2$, pois $2^4 = 16$

Da definição, decorre que para todo $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Propriedades

Sendo **a** e **b** reais não negativos, **m** inteiro e **n** e **p** naturais não nulos, valem as seguintes propriedades:

I) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

II) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

III) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

IV) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

V) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

A título de curiosidade, vamos apresentar a demonstração da segunda propriedade.

Seja $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} > 0$.

Temos: $x^n = \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow x^n = a \cdot b \xRightarrow{x > 0}$

$\xRightarrow{x > 0} x = \sqrt[n]{a \cdot b}$

Assim, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Simplifique:

a) $\sqrt{72} + 4\sqrt{8}$

b) $\left(2\sqrt{2}\right)^4$

Solução:

a) $\sqrt{72} + 4\sqrt{8} = \sqrt{3^2 \cdot 2^2 \cdot 2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} + 4 \cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$

b) $\left(2\sqrt{2}\right)^4 = 2^4 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^4 \cdot \sqrt{2^4} = 2^4 \cdot 2^2 = 2^6 = 64$

2 Racionalize o denominador das expressões:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$

No item *b* foi usado um produto notável. Identifique-o.

$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

Solução:

Os denominadores nos itens *a* e *b* são números irracionais. Devemos obter uma expressão equivalente com denominador racional. Façamos:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{4}{\sqrt{3}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \dfrac{4(\sqrt{3}+1)}{2} = 2(\sqrt{3}+1)$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

8 Calcule:

a) $\sqrt{169}$

b) $\sqrt[3]{512}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$

d) $\sqrt{0,25}$

e) $\sqrt[3]{0,125}$

f) $\sqrt[5]{100\,000}$

g) $\sqrt[3]{1+\sqrt{49}}$

9 Simplifique os radicais seguintes:

a) $\sqrt{18}$

b) $\sqrt{54}$

c) $\sqrt[3]{54}$

d) $\sqrt{288}$

e) $\sqrt[4]{240}$

f) $\sqrt[3]{10^{12}}$

10 Efetue:

a) $\sqrt{32} + \sqrt{50}$

b) $\sqrt{200} - 3\sqrt{72} + \sqrt{12}$

c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{1200} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{27}$

11 Racionalize o denominador das expressões seguintes:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$

f) $\dfrac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

12 Efetue:

a) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8}$

c) $\sqrt{48} : \sqrt{2}$

d) $(\sqrt{2})^{16}$

e) $(3\sqrt{2})^2$

f) $\sqrt{\sqrt{2^8}}$

g) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$

h) $(3 - \sqrt{2})^2$

i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

Potência de expoente racional

Para dar significado às potências de expoente racional (como, por exemplo, $3^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, ...) devemos lembrar que sua definição deve garantir a validade das propriedades operatórias já estudadas neste capítulo.

Observe os exemplos:

- $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$; assim, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$, ou seja, $3^{\frac{1}{2}}$ é a raiz quadrada aritmética de 3, isto é, $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$.
- $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$; assim, $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2$, ou seja, $2^{\frac{1}{3}}$ é a raiz cúbica aritmética de 2, isto é, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$.

Os exemplos anteriores ilustram a seguinte definição:

Para $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Acompanhe agora os cálculos seguintes:

- $8^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{3}{2}} = 8^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 8^{2 \cdot \frac{3}{2}} = 8^3$

  Assim, $\left(8^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 8^3$ e, portanto, a raiz quadrada aritmética de 8^3 é igual a $8^{\frac{3}{2}}$, ou seja, $\sqrt{8^3} = 8^{\frac{3}{2}}$.

- $4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}} = 4^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 4^2$

  Assim, $\left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4^2$ e, portanto, a raiz cúbica aritmética de 4^2 é igual a $4^{\frac{2}{3}}$, ou seja, $\sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$.

Essas considerações ilustram a seguinte definição:

Dados um número real positivo **a**, um número inteiro **m** e um número natural **n** ($n \geqslant 1$), chama-se **potência de base a** e **expoente $\frac{m}{n}$** a raiz enésima (n-ésima) aritmética de a^m.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Definição especial:

Sendo $\frac{m}{n} > 0$, define-se: $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Exemplos:

- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $1^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{1^7} = 1$
- $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
- $64^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$
- $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $0^{\frac{11}{3}} = 0$
- $100^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{100^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

Propriedades

Sendo **a** e **b** reais positivos e $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ racionais, valem as seguintes propriedades:

I) $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

II) $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{r}{s}}$

III) $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$

IV) $(a : b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}}$

V) $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 Calcule o valor de $y = 27^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$.

Solução:

Podemos resolver de duas formas:

a) Escrevendo as potências na forma de raízes: $y = \sqrt[3]{27^2} - \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[3]{729} - \sqrt[4]{4096} = 9 - 8 = 1$

b) Usando as propriedades das potências: $y = (3^3)^{\frac{2}{3}} - (2^4)^{\frac{3}{4}} = 3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$

EXERCÍCIOS

13 Calcule o valor de:

a) $27^{\frac{1}{3}}$

b) $256^{\frac{1}{2}}$

c) $32^{\frac{1}{5}}$

d) $64^{\frac{1}{3}}$

e) $576^{\frac{1}{2}}$

f) $0{,}25^{\frac{1}{2}}$

g) $\left(\frac{27}{1\,000}\right)^{\frac{1}{3}}$

h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{0{,}25}$

i) $0{,}5^{0{,}5}$

14 Calcule o valor de:

a) $8^{\frac{2}{3}}$

b) $144^{-\frac{1}{2}}$

c) $(0{,}2)^{\frac{1}{2}}$

d) $16^{\frac{5}{2}}$

e) $27^{\frac{2}{3}}$

f) $0{,}09^{-\frac{1}{2}}$

g) $16^{\frac{3}{4}}$

h) $8^{-\frac{1}{2}}$

i) $0{,}001^{-\frac{2}{3}}$

15 Qual é o valor de a^b, sendo $a = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ e $b = \dfrac{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 2^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$?

16 A área da superfície corporal (ASC) de uma pessoa, em metros quadrados, pode ser estimada pela fórmula de Mosteller:

$$ASC = \left(\frac{h \cdot m}{3\,600}\right)^{\frac{1}{2}}$$

em que **h** é a altura da pessoa em centímetros e **m** é a massa da pessoa em quilogramas.

a) Calcule a área da superfície corporal de um indivíduo de 1,69 m e 75 kg. Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$.

b) Juvenal tem ASC igual a 2 m² e massa 80 kg. Qual é a altura de Juvenal?

c) Considere dois amigos, Rui e Eli, ambos com 81 kg de massa. A altura de Rui é 21% maior do que a altura de Eli. A ASC de Rui é x% maior do que a ASC de Eli. Qual é o valor de **x**?

Potência de expoente irracional

Vamos agora dar significado às potências do tipo a^x, em que $a \in \mathbb{R}^*_+$, e o expoente **x** é um número irracional. Por exemplo: $2^{\sqrt{2}}$, $2^{\sqrt{5}}$, $10^{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{7}}$, $4^{-\sqrt{5}}$, ...

Seja a potência $2^{\sqrt{2}}$.

Como $\sqrt{2}$ é irracional, vamos considerar aproximações racionais para esse número por falta e por excesso e, com auxílio de uma calculadora científica, obter o valor das potências de expoentes racionais:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}41421356...$$

Por falta	Por excesso
$2^1 = 2$	$2^2 = 4$
$2^{1,4} \simeq 2{,}639$	$2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2{,}828$
$2^{1,41} \simeq 2{,}657$	$2^{1,42} \simeq 2{,}676$
$2^{1,414} \simeq 2{,}6647$	$2^{1,415} \simeq 2{,}6666$
$2^{1,4142} \simeq 2{,}6651$	$2^{1,4143} \simeq 2{,}6653$
⋮	⋮

Note que, à medida que os expoentes se aproximam de $\sqrt{2}$ por valores racionais, tanto por falta quanto por excesso, os valores das potências tendem a um mesmo valor, definido por $2^{\sqrt{2}}$, que é aproximadamente igual a 2,665.

Potência de expoente real

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Já estudamos os diferentes tipos de potências a^x com **x** racional ou irracional.

Em qualquer caso, $a^x > 0$, isto é, toda potência de base real positiva e expoente real é um número positivo.

Para essas potências, continuam válidas todas as propriedades apresentadas nos itens anteriores deste capítulo.

Função exponencial

Chama-se **função exponencial** qualquer função **f** de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que **a** é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.

São exemplos de funções exponenciais: $y = 10^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = 2^x$; $y = \left(\frac{5}{6}\right)^x$ etc.

Observe que, na definição acima, há restrições em relação à base **a**.

De fato:

- Se $a < 0$, nem sempre o número a^x é real, como, por exemplo, $(-3)^{\frac{1}{2}} \notin \mathbb{R}$.
- Se $a = 0$, temos:

$$\begin{cases} \text{se } x > 0,\ y = 0^x = 0 \text{ (função constante)} \\ \text{se } x < 0, \text{ não se define } 0^x \text{ (por exemplo, } 0^{-3}) \\ \text{se } x = 0, \text{ não se define } 0^0 \end{cases}$$

- Se $a = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, a função dada por $y = 1^x = 1$ é constante.

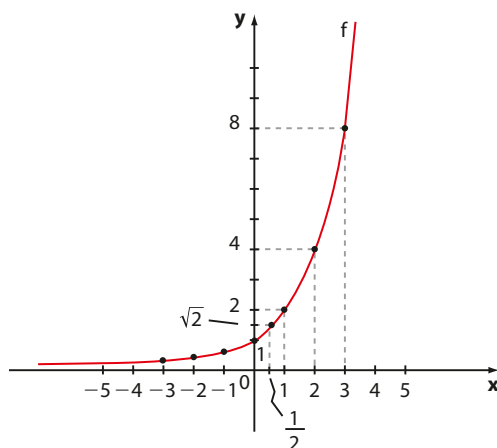
Gráfico

Vamos construir os gráficos de algumas funções exponenciais e, em seguida, observar algumas propriedades.

EXEMPLO 2

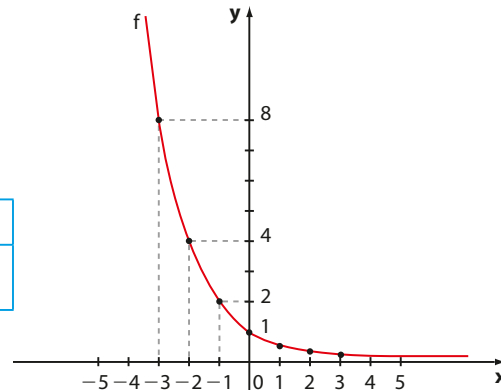
Vejamos como construir o gráfico da função **f**, cuja lei é $y = 2^x$.

Vamos usar o método de localizar alguns pontos do gráfico e ligá-los por meio de uma curva.

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2} \simeq 1{,}41$
1	2
2	4
3	8

Observe que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$ e, deste modo, $Im = \mathbb{R}_+^*$.

EXEMPLO 3

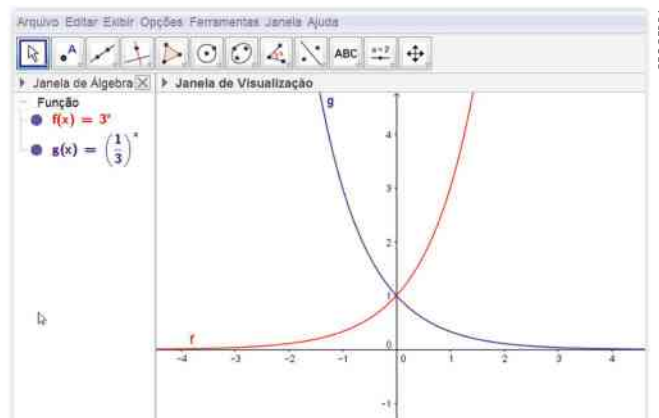
Vamos construir o gráfico da função **f**, cuja lei é $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Observe que $Im = \mathbb{R}_+^*$.

EXEMPLO 4

Observe ao lado os gráficos das funções **f** e **g** definidos por $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, traçados com o GeoGebra.

Note que, tanto para a função **f** como para a função **g**, tem-se $Im = \mathbb{R}_+^*$.

As curvas obtidas nos exemplos anteriores são chamadas **curvas exponenciais**.

Professor, lembre-se de que no GeoGebra deve-se digitar 3^x para obter 3^x.

O número e

Um importante número irracional em Matemática é o número e = 2,718281828459... . Para introduzi-lo, vamos considerar a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, definida em $\mathbb{R}^*$, e estudar os valores que ela assume quando **x** se aproxima de zero:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$	≃ 2,594	≃ 2,705	≃ 2,717	≃ 2,7182	≃ 2,7183

Na tabela, podemos notar que, à medida que **x** se aproxima de zero, os valores de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ficam mais próximos do número e ≃ 2,7183.

Considerando valores negativos de **x** cada vez mais próximos de zero (por exemplo, x = −0,1; x = −0,01; x = −0,001 etc.), a expressão também fica cada vez mais próxima de e ≃ 2,7183. Calcule você mesmo com o auxílio de uma calculadora científica.

Dizemos então que o limite de $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$, quando **x** tende a zero, é igual ao número **e**. Representamos esse fato por $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

PENSE NISTO:

Como você pode determinar a abscissa do ponto de interseção das duas curvas do exemplo 4 sem construir o gráfico de cada uma delas?

O objetivo é lembrar os estudantes que o ponto de interseção de duas curvas é obtido igualando-se as leis; temos $3^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, que é satisfeita para x = 0.

A descoberta do número **e** é atribuída a John Napier, em seu trabalho de invenção dos logaritmos, datado de 1614 (veja a seção *Um pouco de História* no capítulo seguinte). Nele, Napier introduziu, de forma não explícita, o que hoje conhecemos como número **e**. Um século depois, com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, o número **e** teve sua importância reconhecida. O símbolo **e** foi introduzido por Euler, em 1739.

Muitas calculadoras científicas possuem a tecla e^x colocada, em geral, como segunda função (veja a tecla 2ndF na imagem seguinte; em alguns modelos, a segunda função da tecla é acionada por meio da tecla Shift).

Neste modelo, o cálculo de e^x é feito através da segunda função da tecla ln (o significado de ℓn será apresentado no capítulo seguinte).

Deste modo, em geral, não é necessário substituir **e** por alguma aproximação racional, bastando "entrar com" o expoente **x** para se conhecer o resultado da potência e^x.

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

Você pode usar uma calculadora financeira ou científica para calcular o valor de e^x.

Veja:

- Para calcular e^2, pressionamos:

Obtemos o valor aproximado 7,389056.

- Para calcular e^{10}, pressionamos:

1 0 → 2ndF → e^x → 22026.46579

Obtemos o valor aproximado 22 026,46579.

Em alguns modelos de calculadora, a sequência das "operações" pode ser invertida. Veja o cálculo de e^{10}:

2ndF → e^x → 1 0 → 22026.46579

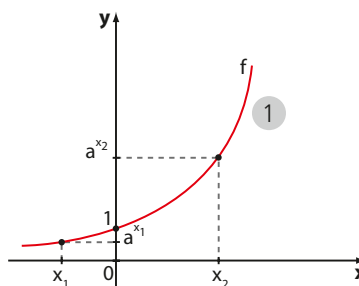
A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = e^x$ é a função exponencial de base **e**, cujo gráfico é dado ao lado.

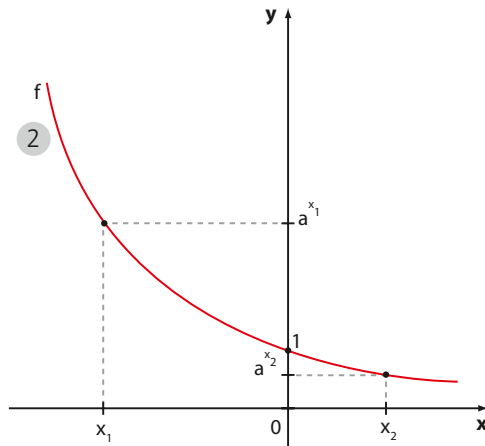
Propriedades

- Na função exponencial cuja lei é $y = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1$$

ou seja, o par ordenado (0, 1) satisfaz a lei $y = a^x$ para todo **a** (com $a > 0$ e $a \neq 1$). Isso quer dizer que o gráfico da função $y = a^x$ intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 1.

- Se $a > 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é crescente e seu gráfico está representado ao lado.

São crescentes, por exemplo, as funções definidas por: $y = 2^x$; $y = 3^x$; $y = e^x$; $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$; $y = 10^x$ etc.

- Se $0 < a < 1$, a função definida por $f(x) = a^x$ é decrescente e seu gráfico está representado abaixo:

São decrescentes, por exemplo, as funções definidas por: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$; $y = 0{,}2^x$ etc.

- Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

  $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, quaisquer que sejam os números reais $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$.

- Já vimos que para todo $a > 0$ e todo **x** real, temos $a^x > 0$; portanto, o gráfico da função definida por $y = a^x$ está sempre acima do eixo Ox.

  Se $a > 1$, então a^x aproxima-se de zero quando **x** assume valores negativos cada vez menores, como em (1).

  Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de zero quando **x** assume valores positivos cada vez maiores, como em (2).

  Tudo isso pode ser resumido dizendo-se que o conjunto imagem da função exponencial dada por $y = a^x$ é:

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$$

OBSERVAÇÃO

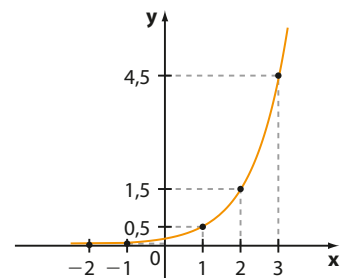
Existem outras funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujas leis apresentam a variável **x** no expoente de alguma potência (com base positiva e diferente de 1), como:

$$y = 3 \cdot 2^x; \quad y = \frac{1}{4} \cdot 10^x; \quad y = 2^{x-1} + 3; \quad y = \left(\frac{1}{5}\right)^x - 2; \quad y = 1{,}012^x \cdot 191$$

Essas funções têm como gráficos curvas exponenciais semelhantes às apresentadas nos exemplos anteriores e também serão tratadas como funções exponenciais.

Vamos construir, como exemplo, o gráfico de $y = \frac{1}{6} \cdot 3^x$.

Observe que a função é crescente, seu conjunto imagem é $\mathbb{R}_+^*$ e seu gráfico é análogo ao gráfico de $y = a^x$, quando $a > 1$.

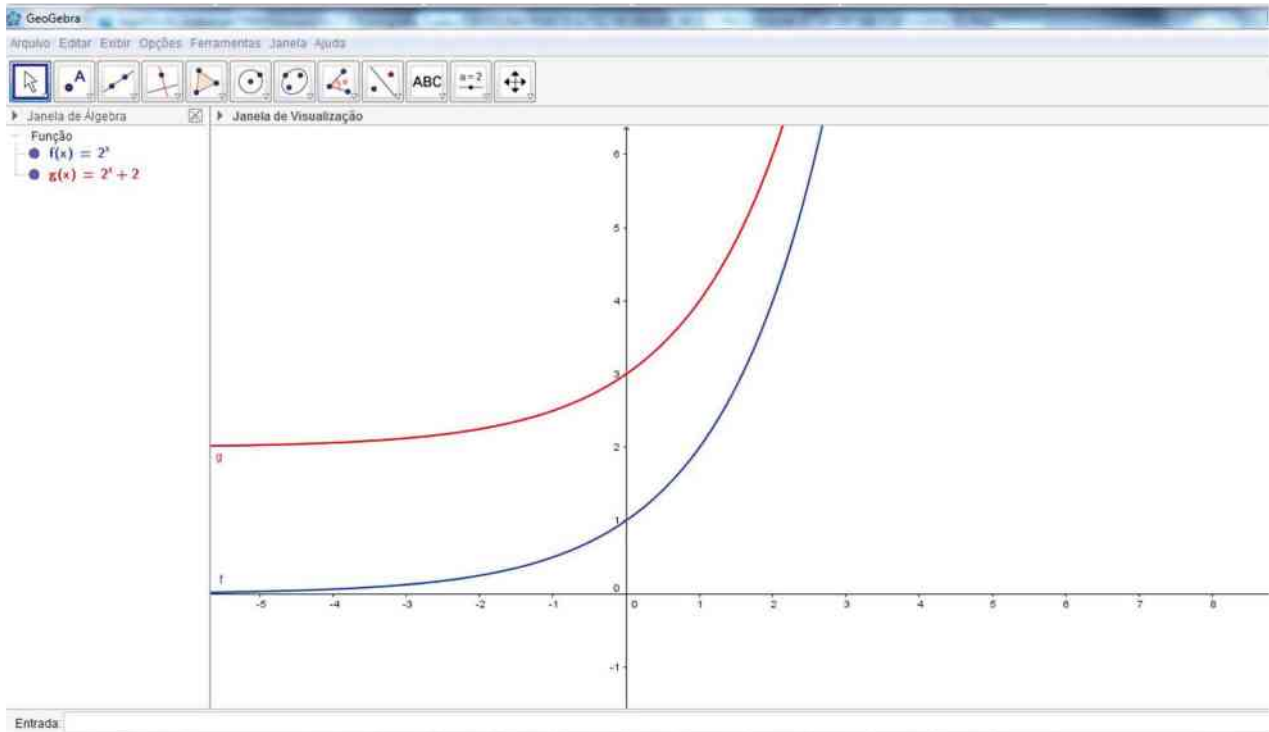
x	y
−3	≃ 0,006
−2	≃ 0,019
−1	0,0555...
0	0,166...
1	0,5
2	1,5
3	4,5

Gráficos com translação

Sejam **f** e **g** funções de ℝ em ℝ definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 2^x + 2$ respectivamente.

O gráfico de **g** pode ser obtido a partir do gráfico de **f** "deslocando-o" duas unidades para cima. Observe os dois gráficos construídos no mesmo plano cartesiano com o GeoGebra:

Não; $f(x) = g(x) \Rightarrow 2^x = 2^x + 2 \Rightarrow 0 = 2$; impossível.

Essas duas curvas podem se intersectar?

GEOGEBRA

Observe que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0 \Rightarrow 2^x + 2 > 0 + 2$, isto é, $g(x) > 2$. Desse modo, o conjunto imagem da função **g** é $Im =]2, +\infty[$.

Veja, no gráfico acima, que a curva correspondente à função **g** está contida na região em que $y > 2$.

De modo geral, o gráfico de $y = a^x + k$, sendo $0 < a \neq 1$ e **k** uma constante real, pode ser obtido a partir do gráfico de $y = a^x$, deslocando-o **k** unidades para cima ou $|k|$ unidades para baixo, conforme **k** seja positivo ou negativo, respectivamente.

Determine, em seu caderno, o conjunto imagem da função real $y = 2^x - 2$ sem construir o seu gráfico.

Basta lembrar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $2^x > 0$. Somando -2 aos dois membros, temos: $2^x - 2 > 0 - 2$, isto é, $y > -2$. $Im =]-2, +\infty[$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

17 Construa os gráficos das funções exponenciais definidas pelas leis seguintes, destacando seu conjunto imagem:

a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

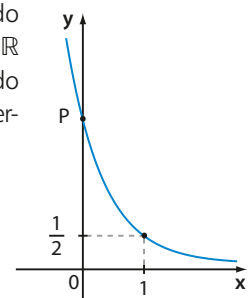
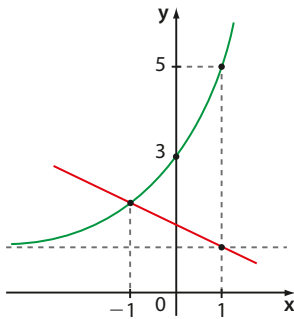
c) $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$

d) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$

18 Na figura está representado o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = m \cdot 6^{-x}$, sendo **m** uma constante real. Determine:

a) o valor de **m**;

b) $f(-1)$;

c) a ordenada de **P**.

19 No sistema de coordenadas seguinte estão representados os gráficos de duas funções, **f** e **g**. A lei que define **f** é $f(x) = a + b \cdot 2^x$ (**a** e **b** são constantes reais positivas) e **g** é uma função afim.

a) Determine os valores de **a** e **b**.
b) Determine o conjunto imagem de **f**.
c) Obtenha a lei que define a função **g**.
d) Determine as raízes de **f** e de **g**.

20 Faça o gráfico de cada uma das funções definidas de ℝ em ℝ pelas leis seguintes, destacando a raiz (se houver) e o respectivo conjunto imagem:

a) $f(x) = 2^x - 2$
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$
c) $f(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$
d) $f(x) = 3^x + 3$

21 Em um laboratório, constatou-se que uma colônia de certo tipo de bactéria triplicava a cada meia hora. No instante em que começaram as observações, o número de bactérias na amostra era estimado em dez mil.

a) Represente, em uma tabela, a população de bactérias (em milhares) nos seguintes instantes (a partir do início da contagem): 0,5 hora, 1 hora, 1,5 hora, 2 horas, 3 horas e 5 horas.
b) Obtenha a lei que relaciona o número (**n**) de milhares de bactérias, em função do tempo (**t**), em horas.

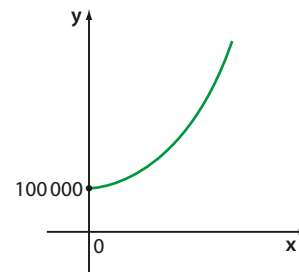
22 Grande parte dos brasileiros guarda suas reservas financeiras na caderneta de poupança. O rendimento líquido anual da caderneta de poupança gira em torno de 6%. Isso significa que, a cada ano, o saldo dessa poupança cresce 6% em relação ao saldo do ano anterior.

a) Álvaro aplicou hoje R$ 2 000,00 na poupança. Faça uma tabela para representar, ano a ano, o saldo dessa poupança nos próximos cinco anos.
b) Qual é a lei da função que relaciona o saldo (**s**), em reais, da poupança de Álvaro e o número de anos (**x**) transcorridos a partir de hoje ($x = 0$)?
c) É possível que em 10 anos o saldo dessa poupança dobre? Use $1{,}06^{10} \simeq 1{,}8$.

23 Uma moto foi adquirida por R$ 12 000,00. Seu proprietário leu, em uma revista especializada, que a cada ano a moto perde 10% do valor que tinha no ano anterior. Suponha que isso realmente aconteça.

a) Represente, em uma tabela, o valor da moto depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.
b) Qual o valor da moto após 7 anos da aquisição?
c) Determine a lei que relaciona o valor (**v**) da moto, em reais, em função do tempo (**t**), expresso em anos.

24 Os municípios **A** e **B** têm, hoje, praticamente o mesmo número de habitantes, estimado em 100 mil pessoas. Estudos demográficos indicam que o município **A** deva crescer à razão de 25 000 habitantes por ano e o município **B**, à taxa de 20% ao ano. Mantidas essas condições, classifique em seu caderno como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações seguintes, corrigindo as falsas:

a) Em dois anos, a população do município **B** será de 140 mil habitantes.
b) Em três anos, a população do município **A** será de mais de 180 mil habitantes.
c) Em quatro anos, o município **A** será mais populoso que o município **B**.
d) A lei da função que expressa a população (**y**) do município **A** daqui a **x** anos é $y = 25000\,x$.
e) O esboço do gráfico da função que expressa a população (**y**) do município **B** daqui a **x** anos é dado a seguir:

25 Em uma indústria alimentícia, verificou-se que, após **t** semanas de experiência e treinamento, um funcionário consegue empacotar **p** unidades de um determinado produto, a cada hora de trabalho. A lei que relaciona **p** e **t** é: $p(t) = 55 - 30 \cdot e^{-0,2t}$ (leia o texto da seção *Aplicações*, página 142).

a) Quantas unidades desse produto o funcionário consegue empacotar sem experiência alguma?
b) Qual é o acréscimo na produção, por hora, que o funcionário experimenta da 1ª para a 2ª semana de experiência? Use $e^{0,2} \simeq 1{,}2$.
c) Qual é o limite máximo teórico de unidades que um funcionário pode empacotar, por hora?

Aplicações

Mundo do trabalho e as curvas de aprendizagem

Em vários ramos da atividade humana relacionada ao mundo do trabalho, é possível verificar que, à medida que um trabalhador executa uma tarefa contínua e repetitivamente, sua eficiência de produção aumenta e o tempo de execução se reduz.

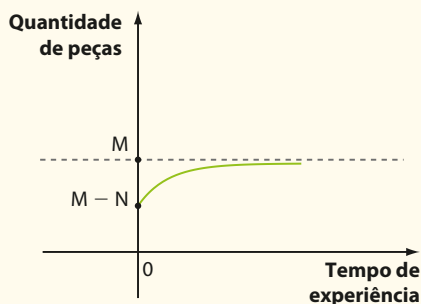
As **curvas de aprendizagem** são gráficos de funções que relacionam a eficiência de um trabalhador de acordo com seu tempo de experiência na execução de uma determinada tarefa.

Gerentes e diretores de várias indústrias e empresas utilizam as curvas de aprendizagem para estimar custos futuros e níveis de produção, além de programar tarefas produtivas, reduzindo perdas decorrentes da inabilidade do trabalhador verificada nos primeiros ciclos de produção.

Existem vários modelos matemáticos que podem representar essa dependência. Um deles é o modelo exponencial $f(t) = M - N \cdot e^{-k \cdot t}$, em que:

- $f(t)$ é a **eficiência do trabalhador** (vamos supor aqui que essa eficiência seja mensurada pela quantidade de peças ou materiais que ele produz);
- **t** é o tempo de experiência que ele possui na tarefa ($t \geqslant 0$), expresso em uma certa unidade de medida (dia, mês, semana etc.);
- **M**, **N** e **k** são constantes positivas que dependem da natureza da atividade envolvida;
- **e** é o número irracional, apresentado na página 137.

Observe que:

1) $f(0) = M - N \cdot e^0 = M - N$, que representa a quantidade de peças que o trabalhador é capaz de produzir sem experiência alguma.
2) Quando **t** é suficientemente grande, o termo e^{-kt} fica muito próximo de zero e $f(t)$ assume valores cada vez mais próximos de **M** (limite teórico máximo da produção).
3) O gráfico dessa função exponencial é:

Os custos e a produtividade de uma empresa estão relacionados à eficiência do trabalhador.

Note que, nesse modelo, a partir de certo tempo de experiência, a produtividade do trabalhador praticamente não se altera, tendendo à estabilização.

Fonte de pesquisa:
MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton. *Cálculo:* funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

Equação exponencial

Uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma de suas potências.

São exponenciais, por exemplo, as equações $4^x = 8$, $\left(\frac{1}{9}\right)^x = 81$ e $9^x - 3^x = 72$.

Um método usado para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação à potência de mesma base **a** (com $0 < a$ e $a \neq 1$) e, daí, aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quando isso é possível, a equação exponencial pode ser facilmente resolvida.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

4 Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^x = 64$

c) $0{,}5^{-2x-1} \cdot 4^{3x+1} = 8^{x-1}$

Solução:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 81 \Rightarrow (3^{-1})^x = 3^4 \Rightarrow 3^{-x} = 3^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{-4\}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^x = 64 \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^6 \Rightarrow \frac{x}{2} = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 12 \Rightarrow S = \{12\}$

c) $0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$(2^{-1})^{-2x-1} \cdot (2^2)^{3x+1} = (2^3)^{x-1}$; é preciso usar propriedades das potências:

$2^{2x+1} \cdot 2^{6x+2} = 2^{3x-3} \Rightarrow 2^{(2x+1)+(6x+2)} = 2^{3x-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{8x+3} = 2^{3x-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 8x + 3 = 3x - 3 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \Rightarrow S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$

5 Resolva, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação exponencial: $3^{x+1} - 3^x - 3^{x-1} = 45$

Solução:

Vamos usar as propriedades das potências. Podemos fazer: $3^x \cdot 3^1 - 3^x - \frac{3^x}{3} = 45$.

Colocando 3^x em evidência, temos:

$3^x \cdot \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{5}{3} = 45 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

EXERCÍCIOS

26 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $3^x = 81$

b) $2^x = 256$

c) $7^x = 7$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{32}\right)$

e) $5^{x+2} = 125$

f) $10^{3x} = 100\,000$

g) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{625}\right)$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$

i) $0{,}1^x = 0{,}01$

j) $3^x = -3$

k) $0{,}4^x = 0$

27 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $8^x = 16$

b) $27^x = 9$

c) $4^x = 32$

d) $25^x = 625$

e) $9^{x+1} = \sqrt[3]{3}$

f) $4^x = \frac{1}{2}$

g) $0{,}2^{x+1} = \sqrt{125}$

h) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8}$

28 Com a seca, estima-se que o nível de água (em metros) em um reservatório, daqui a **t** meses, seja $n(t) = 7{,}6 \cdot 4^{-0{,}2t}$. Qual é o tempo necessário para que o nível de água se reduza à oitava parte do nível atual?

29 Analistas do mercado imobiliário de um município estimam que o valor (**v**), em reais, de um apartamento nesse município seja dado pela lei $v(t) = 250\,000 \cdot (1{,}05)^t$, sendo **t** o número de anos ($t = 0, 1, 2, ...$) contados a partir da data de entrega do apartamento.

a) Qual o valor desse imóvel na data de entrega?

b) Qual é a valorização, em reais, desse apartamento, um ano após a entrega?

c) Qual será o valor desse imóvel 6 anos após a entrega? Use $1{,}05^3 \simeq 1{,}15$.

d) Depois de quantos anos da data da entrega o apartamento estará valendo 1,525 milhão de reais? Use as aproximações da tabela seguinte.

t	35	36	37	38	40
$1{,}05^t$	5,5	5,8	6,1	6,4	7,0

30 A lei que representa uma estimativa do número de pessoas (**N**) que serão infectadas por uma virose, em uma grande região metropolitana, no período de oito dias é $N(t) = a \cdot 2^{bt}$, em que N(t) é o número de infectados **t** dias após a divulgação dessa previsão e **a** e **b** são constantes reais positivas. Considerando que, no dia em que foi anunciada tal previsão, 3 000 pessoas já haviam sido diagnosticadas com a virose e que dois dias depois o número já aumentara para 24 000 pessoas, determine:

a) os valores de **a** e **b**;

b) o número de infectados pela virose 16 horas após a divulgação da previsão;

c) o número de infectados pela virose após 4 dias;

d) o menor número inteiro de dias transcorridos até que a quantidade de infectados pela virose atinja 3 milhões. Use $10^3 \simeq 2^{10}$.

31 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $10^x \cdot 10^{x+2} = 1\,000$

b) $2^{4x+1} \cdot 8^{-x+3} = \dfrac{1}{16}$

c) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3x} : 25^{2+x} = 5$

d) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x^2-1} \cdot 27^{1-x} = 3^{2x+7}$

32 Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações seguintes:

a) $2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-1} = 20$

b) $5^{x+3} - 5^{x+2} - 11 \cdot 5^x = 89$

c) $4^{x+1} + 4^{x+2} - 4^{x-1} - 4^{x-2} = 315$

d) $25^x - 23 \cdot 5^x = 50$

33 Resolva os sistemas seguintes:

a) $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2y} = 8 \\ \dfrac{1}{3} = 3^{x+y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \left(\sqrt{7}\right)^x = 49^{y-2x} \\ 2^{y-x} = 1\,024 \end{cases}$

34 As leis seguintes representam as estimativas de valores (em milhares de reais) de dois apartamentos **A** e **B** (adquiridos na mesma data), decorridos **t** anos da data da compra:

apartamento **A**: $v_A = 2^{t+1} + 120$

apartamento **B**: $v_B = 6 \cdot 2^{t-2} + 248$

a) Por quais valores foram adquiridos os apartamentos **A** e **B**, respectivamente?

b) Passados quatro anos da compra, qual deles estará valendo mais?

c) Qual é o tempo necessário (a partir da data de aquisição) para que ambos tenham iguais valores?

35 Na lei $n(t) = 15\,000 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{t+k}$, em que **k** é uma constante real, n(t) representa a população que um pequeno município terá daqui a **t** anos, contados a partir de hoje. Sabendo que a população atual do município é de 10 000 habitantes, determine:

a) o valor de **k**;

b) a população do município daqui a 3 anos.

36 A lei que permite estimar a depreciação de um equipamento industrial é $v(t) = 5\,000 \cdot 4^{-0{,}02t}$, em que v(t) é o valor (em reais) do equipamento **t** anos após sua aquisição.

a) Por qual valor esse equipamento foi adquirido?

b) Em quanto tempo ele passará a valer metade do valor da aquisição?

c) Faça um esboço do gráfico da função que relaciona **v** e **t**.

DESAFIO

(Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante **t**, dado em minutos, $\mathbf{T_A}$ é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de −18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a −16 °C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

b) Determine o valor de **t** para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\dfrac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente.

TROQUE **IDEIAS**

Os medicamentos e a Matemática

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Os antibióticos são utilizados no tratamento de infecções causadas por bactérias. A má utilização desse tipo de medicamento leva ao surgimento de bactérias cada vez mais resistentes, tornando alguns antibióticos ineficazes. Isso implica um ciclo vicioso que já ocasionou o desenvolvimento de mais de 200 tipos diferentes de antibióticos. A fim de inibir a automedicação e o uso indiscriminado, em maio de 2011, a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa) publicou a resolução que determina que as farmácias devem comercializar antibióticos mediante a retenção da receita médica. Ainda assim, é importante utilizar antibióticos apenas nos casos realmente necessários, seguindo as orientações médicas e respeitando a posologia e a duração do tratamento.

A amoxicilina é um conhecido antibiótico usado no tratamento de diversas infecções não complicadas, receitado por médicos no Brasil. A bula da amoxicilina, como a de todos os medicamentos, contém, entre outros tópicos, a composição, as informações ao paciente, as informações técnicas e a posologia. Nas informações técnicas, é possível ler que a **meia-vida da amoxicilina após a administração do produto é de 1,3 hora**. Mas o que essa informação significa?

A cada período de 1,3 hora ou 1 hora e 18 minutos (para facilitar vamos considerar 1 hora e 20 minutos), a quantidade de amoxicilina no organismo decresce em 50% do valor que tinha no início do período.

- Considere que um adulto ingeriu uma cápsula com 500 mg de amoxicilina e faça o que se pede a seguir.

a) Complete a tabela abaixo, copiando-a em seu caderno.

Quantidade de amoxicilina no organismo (mg)							
Número de meias-vidas	0	1	2	3	4	5	6

b) Faça, em seu caderno, o gráfico da função que relaciona a quantidade de amoxicilina no organismo (em miligramas), e o tempo (em horas) transcorrido após a ingestão.

c) Responda: qual é a lei da função que relaciona a quantidade (**q**) de amoxicilina no organismo e o número (**n**) de meias-vidas?

O tempo de meia-vida é um importante parâmetro para médicos e também para a indústria farmacêutica. O conhecimento da meia-vida dos medicamentos possibilita uma estimativa da velocidade com que o processo ocorre, originando informações importantes para a interpretação dos efeitos terapêuticos, da duração do efeito farmacológico e do regime posológico adequado. A posologia recomendada para uma cápsula de amoxicilina de 500 g, por exemplo, é de 8 em 8 horas.

d) Responda: considerando a quantidade de amoxicilina ingerida em uma cápsula, qual a porcentagem desse fármaco presente no organismo após 8 horas da ingestão? Por que é imprescindível respeitar os horários prescritos pelo médico?

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

Fontes de pesquisa: Resolução 20/2011. Disponível em: <www.anvisa.gov.br/sngpc/Documentos2012/RDC%2020%202011.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2016; Amoxicilina cápsulas. Disponível em: <www.medicinanet.com.br/bula/8006/amoxicilina_capsulas.htm>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Aplicações

Meia-vida e radioatividade

Radioatividade e Matemática

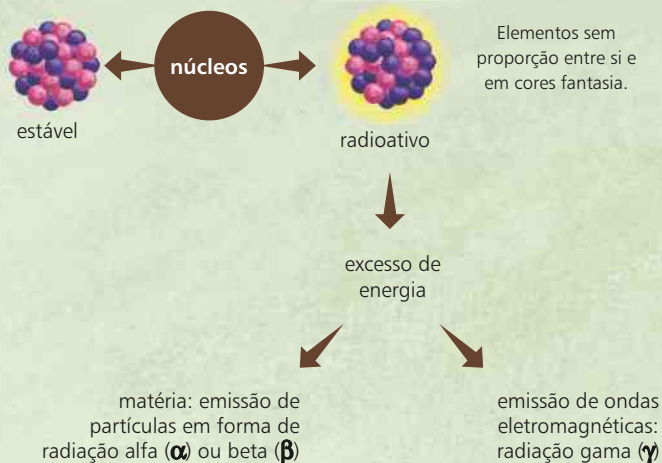
Os átomos radioativos estão presentes no meio ambiente (atmosfera, rochas, cavidades subterrâneas, hidrosfera etc.), alimentos e seres vivos.

Nas rochas encontramos urânio-238, tório-232 e rádio-228.

No sangue e ossos de humanos e animais, há carbono-14, potássio-40 e rádio-228.

Árvores e demais plantas, incluindo vegetais, contêm carbono-14 e potássio-40.

Decaimento radioativo

O núcleo de um átomo com excesso de energia tende a se estabilizar emitindo um grupo de partículas (radiação alfa ou beta) ou ondas eletromagnéticas (radiações gama). Em cada emissão de uma das partículas, há variação do número de prótons e nêutrons no núcleo e, deste modo, um elemento químico se transforma em outro. O processo pelo qual se dá a emissão dessas partículas é chamado de **decaimento radioativo**.

Meia-vida

Considerando uma grande quantidade de átomos de um mesmo elemento químico radioativo, espera-se certo número de emissões por unidade de tempo. Essa “taxa de emissões” é a atividade da amostra.

Cada elemento radioativo se transmuta (desintegra) a uma velocidade que lhe é característica. **Meia-vida** é o intervalo de tempo necessário para que a sua atividade radioativa seja reduzida à metade da atividade inicial.

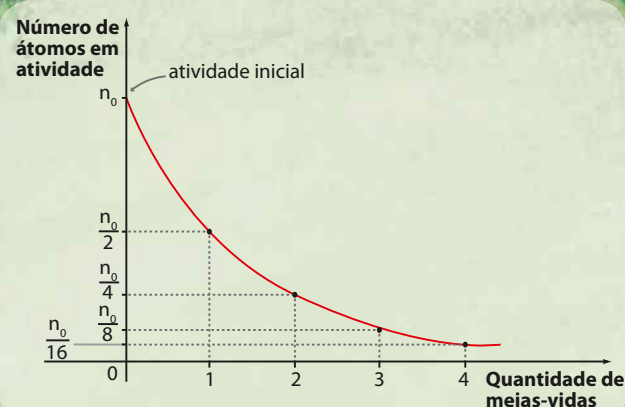
Após o primeiro período de meia-vida, a atividade da amostra se reduz à metade da atividade inicial; passado o segundo período, a atividade se reduz a $\frac{1}{4}$ da atividade inicial e assim por diante, como mostra o gráfico abaixo.

Exemplos de elementos radioativos:

Carbono — 6 — C — 12,0 — 2 4

Rádio — 88 — Ra — 228 — 2 8 18 32 18 8 2

Tório — 90 — Th — 232 — 2 8 18 32 18 8 2

Urânio — 92 — U — 238 — 2 8 18 32 21 9 2

A lei que define essa função exponencial é $n(x) = \frac{n_0}{2^x}$, sendo **x** a quantidade de meias-vidas, $\mathbf{n_0}$ o número de átomos correspondente à atividade inicial e **n(x)** o número de átomos em atividade após **x** meias-vidas.

Exemplo de meia-vida:

O iodo-131 é um elemento químico radiativo, usado na Medicina Nuclear, em exames e tratamentos de tiroide, e tem meia-vida de 8 dias. Isso significa que, em 8 dias, metade dos átomos deixarão de emitir radiação.

Símbolo internacional de alerta para radioatividade.

Fonte de pesquisa: *Energia nuclear e suas aplicações*. Disponível em: <www.cnen.gov.br/images/cnen/documentos/educativo/apostila-educativa-aplicacoes.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2016.

CAPÍTULO 8

Função logarítmica

Introdução

Situação 1

Você sabia que uma pessoa com audição normal é capaz de ouvir uma grande faixa de sons de intensidades bem diversas?

Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo do qual não se ouve som algum: é o limiar de audibilidade, cujo valor é, em W/m^2, igual a 10^{-12}; há também um valor de intensidade a partir do qual há dor: 1 W/m^2. W é o símbolo de watt, unidade de potência.

Manipular e comparar valores nessa faixa numérica, de $10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$ até 1,0 (além da faixa de sons cujas intensidades superam o limiar de dor), não é tarefa fácil nem prática. A saída encontrada pela Ciência é a utilização de uma **escala logarítmica**, cuja estrutura e vantagens vamos conhecer neste capítulo.

Situação 2

Suponhamos que um caminhão zero-quilômetro custe hoje R$ 120 000,00 e sofra uma desvalorização de 10% por ano de uso.

Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo será igual a R$ 60 000,00?

A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então, seu valor evolui da seguinte forma:

- após 1 ano de uso:
  90% de 120 000 reais, ou seja, 108 000 reais
- após 2 anos de uso:
  90% de 108 000 reais, ou seja, 97 200 reais
- após 3 anos de uso:
  90% de 97 200 reais, ou seja, 87 480 reais
  e assim por diante.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

No Brasil, o transporte rodoviário é um dos principais meios de distribuição de cargas.

O valor do veículo em reais evolui, ano a ano, de acordo com a sequência:

$$120\,000; \quad (0{,}9) \cdot 120\,000; \quad (0{,}9)^2 \cdot 120\,000; \quad (0{,}9)^3 \cdot 120\,000; \quad ...; \quad (0{,}9)^x \cdot 120\,000$$

em que **x** indica o número de anos de uso.

Para responder à pergunta feita, devemos resolver a equação $(0{,}9)^x \cdot 120\,000 = 60\,000$, ou seja, $(0{,}9)^x = 0{,}5$, que é uma equação exponencial.

No entanto, não é possível reduzir as potências a uma mesma base. Para resolver essa equação usaremos logaritmos.

Esses problemas, além de outros, mostram a importância de se estudar a função logarítmica e os logaritmos.

No decorrer deste capítulo, vamos conhecer a solução desses problemas.

Logaritmos

Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente **x** ao qual se deve elevar a base **a** de modo que a potência a^x seja igual a **b**.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Dizemos que:

- **a** é a **base** do logaritmo;
- **b** é o **logaritmando**;
- **x** é o **logaritmo**.

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

- $\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$
- $\log_3 9 = 2$, pois $3^2 = 9$
- $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, pois $2^{-2} = \frac{1}{4}$
- $\log_5 5 = 1$, pois $5^1 = 5$
- $\log_4 1 = 0$, pois $4^0 = 1$
- $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, pois $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
- $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
- $\log_{0,5} 0{,}25 = 2$, pois $(0{,}5)^2 = 0{,}25$

Nesses exemplos, o cálculo do logaritmo poderia ser feito mentalmente. Porém, há casos em que isso não é tão simples, como mostra o exemplo seguinte:

EXEMPLO 1

Vamos calcular, por meio da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{9}} 3$

Façamos $\log_{\sqrt[3]{9}} 3 = x$. Temos:

$$(\sqrt[3]{9})^x = 3 \Rightarrow (\sqrt[3]{3^2})^x = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{3^{2x}} = 3 \Rightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) $\log_{16} 0{,}25$

Façamos $\log_{16} 0{,}25 = y$. Temos:

$$16^y = 0{,}25 \Rightarrow (2^4)^y = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^{4y} = 2^{-2} \Rightarrow 4y = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Qual é o número real **x** em $\log_x 4 = -2$?

Solução:

O número procurado **x** deve ser tal que $0 < x$ e $x \neq 1$.

Aplicando a definição, temos:

$$x^{-2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Convenção importante

Convencionou-se que, ao escrevermos o logaritmo de um número com a base omitida, estamos nos referindo ao logaritmo desse número em base 10, isto é:

$$\log x = \log_{10} x$$

Assim, por exemplo, $\log 10\,000 = 4$ (pois $10^4 = 10\,000$); $\log \frac{1}{1\,000} = -3 \left(\text{pois } 10^{-3} = \frac{1}{1\,000}\right)$.

Os logaritmos em base 10 são conhecidos como **logaritmos decimais**.

OBSERVAÇÃO

As restrições para **a** ($0 < a$ e $a \neq 1$) e para **b** ($b > 0$) indicadas na definição garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

Consequências

Sejam **a**, **b** e **c** números reais com $0 < a$ e $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$.

Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades:

- O logaritmo de 1 em qualquer base **a** é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0, \text{ pois } a^0 = 1$$

- O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1, \text{ pois } a^1 = a$$

- A potência de base **a** e expoente $\log_a b$ é igual a **b**.

$$a^{\log_a b} = b$$

Para justificar essa propriedade, podemos fazer: $\log_a b = c \Rightarrow a^c = b$. Daí, $a^{\log_a b} = a^c = b$.

Outra forma de justificar é lembrar que o logaritmo de **b** na base **a** é o expoente que se deve dar à base **a** a fim de que a potência obtida seja igual a **b**.

Assim, por exemplo, temos que:

$$2^{\log_2 3} = 3;\ 5^{\log_5 4} = 4 \text{ etc.}$$

- Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

  Reciprocamente, se dois números reais positivos são iguais, seus logaritmos em uma mesma base também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Para justificar a primeira afirmação, temos: $\log_a b = \log_a c \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} a^{\log_a c} = b$ e, pela propriedade anterior, segue que $c = b$.

Para justificar a recíproca, temos que $b = c$ e queremos mostrar que $\log_a b = \log_a c$.

Sejam $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$.

Temos: $a^x = b$ e $a^y = c$. Como $b = c$, segue que $a^x = a^y \Rightarrow x = y$, ou melhor, $\log_a b = \log_a c$.

PENSE NISTO:

- O que aconteceria se a base do logaritmo fosse igual a 1 e o logaritmando fosse diferente de 1? Experimente calcular $\log_1 5$ ou $\log_1 4$.
- O que aconteceria se o logaritmando fosse um número negativo? Confira tentando calcular $\log_2 (-4)$.
- E se tivéssemos base e logaritmando iguais a 1? Que problema teríamos ao calcular $\log_1 1$?

- Não existiria logaritmo. Como $1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}, \nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $1^x = 5$.
- Não existiria logaritmo. Como $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, não se pode calcular $\log_2 (-4)$, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $2^x = -4$.
- $\log_1 1$ seria indeterminado, pois qualquer expoente serviria ($1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$).

EXEMPLO 2

Vamos calcular o número real **x** tal que $\log_5 (2x + 1) = \log_5 (x + 3)$.

Inicialmente, é importante lembrar que os logaritmos acima estão definidos se $2x + 1 > 0$ e $x + 3 > 0$, ou seja, $x > -\frac{1}{2}$ (1) e $x > -3$ (2). Fazendo (1) ∩ (2), obtemos: $x > -\frac{1}{2}$ (*).

Da igualdade $\log_5 (2x + 1) = \log_5 (x + 3)$ segue que:

$$2x + 1 = x + 3 \Rightarrow x = 2 \text{ (este valor satisfaz (*))}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2 Qual é o valor de $9^{\log_3 5}$?

Solução:

Como $9 = 3^2$, podemos escrever $(3^2)^{\log_3 5}$ e, trocando a posição dos expoentes, temos:

$$(3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25$$

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

1 Usando a definição, calcule o valor dos seguintes logaritmos (procure fazer mentalmente):

a) $\log_2 16$

b) $\log_4 16$

c) $\log_3 81$

d) $\log_5 125$

e) $\log 100\,000$

f) $\log_8 64$

g) $\log_2 32$

h) $\log_6 216$

2 Use a definição para calcular:

a) $\log_2 \frac{1}{4}$

b) $\log_3 \sqrt{3}$

c) $\log_8 16$

d) $\log_4 128$

e) $\log_{36} \sqrt{6}$

f) $\log 0{,}01$

g) $\log_9 \frac{1}{27}$

h) $\log_{0,2} \sqrt[3]{25}$

i) $\log_{1,25} 0{,}64$

j) $\log_{\frac{5}{3}} 0{,}6$

3 Coloque em ordem crescente os seguintes números reais:

$A = \log_{25} 0{,}2$

$B = \log_7 \frac{1}{49}$

$C = \log_{0,25} \sqrt{8}$

$D = \log 0{,}1$

4 Qual é o valor de cada uma das expressões seguintes?

a) $\log_5 5 + \log_3 1 - \log 10$

b) $\log_{\frac{1}{4}} 4 + \log_4 \frac{1}{4}$

c) $\log 1\,000 + \log 100 + \log 10 + \log 1$

d) $3^{\log_3 2} + 2^{\log_2 3}$

e) $\log_8 (\log_3 9)$

f) $\log_9 (\log_4 64) + \log_4 (\log_3 81)$

5 Sabendo que $\log a = 2$ e $\log b = -1$, calcule o valor de:

a) $\log_b a$

b) $\log_a b$

c) $\log_a b^2$

d) $\log (a \cdot b)$

e) $\log \left(\frac{a}{b}\right)$

f) $\log_{\sqrt{b}} a$

6 Obtenha, em cada caso, o valor real de **x**:

a) $\log_5 x = \log_5 16$

b) $\log_3 (4x - 1) = \log_3 x$

c) $\log x^2 = \log x$

d) $\log_x (2x - 3) = \log_x (-4x + 8)$

7 Determine o número real **x** tal que:

a) $\log_3 x = 4$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x = -2$

c) $\log_x 2 = 1$

d) $\log_x 0{,}25 = -1$

e) $\log_x 1 = 0$

f) $\log_3 (2x - 1) = 2$

8 Em cada caso, calcule o valor de $\log_5 x$, sendo:

a) $x = \frac{1}{25}$

b) $x = \sqrt[7]{5}$

c) $x = 5^{12}$

d) $x = \frac{1}{\sqrt[9]{625}}$

e) $x = 0{,}2$

9 Determine **m**, com $m \in \mathbb{R}$, a fim de que a equação $x^2 + 4x + \log_2 m = 0$, na incógnita **x**, admita uma raiz real dupla. Qual é essa raiz?

10 Calcule:

a) $4^{3 + \log_4 2}$

b) $5^{1 - \log_5 4}$

c) $8^{\log_2 7}$

d) $81^{\log_3 2}$

e) $5^{\log_{25} 7}$

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

A invenção dos logaritmos

Credita-se ao escocês John Napier (1550-1617) a descoberta dos logaritmos, embora outros matemáticos da época, como o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o inglês Henry Briggs (1561-1630), também tenham dado importantes contribuições.

A invenção dos logaritmos causou grande impacto nos meios científicos da época, pois eles representavam um poderoso instrumento de cálculo numérico que impulsionaria o desenvolvimento do comércio, da navegação e da Astronomia. Até então, multiplicações e divisões com números muito grandes eram feitas com auxílio de relações trigonométricas.

Basicamente, a ideia de Napier foi associar os termos da sequência (b; b^2; b^3; b^4; b^5; ...; b^n) aos termos de outra sequência (1, 2, 3, 4, 5, ..., n), de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência ($b^x \cdot b^y = b^{x+y}$) estivesse associado à soma $x + y$ dos termos da segunda sequência.

Veja um exemplo:

MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis deſcriptio,
Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Ampliſſimi, Facillimi, &
expeditiſſimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officina ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

UNKNOWN - NAPIER, MARK (1834), WILLIAM BLACKWOOD

Frontispício da obra de John Napier sobre logaritmos datada de 1614.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394	32788

Para calcular $512 \cdot 64$, note que:

- o termo 512 de (2) corresponde ao termo 9 de (1);
- o termo 64 de (2) corresponde ao termo 6 de (1);
- assim, a multiplicação $512 \cdot 64$ corresponde à soma de $9 + 6 = 15$ em (1), cujo correspondente em (2) é 32788, que é o resultado procurado.

Em linguagem atual, os elementos da 1ª linha da tabela correspondem ao logaritmo em base 2 dos respectivos elementos da 2ª linha da tabela.

Em seu trabalho *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos,* datado de 1614, Napier considerou outra sequência de modo que seus termos eram muito próximos uns dos outros.

Ao ter contato com essa obra, Briggs sugeriu a Napier uma pequena mudança: uso de potências de 10. Era o surgimento dos logaritmos decimais, como conhecemos até hoje.

Durante um bom tempo os logaritmos prestaram-se à finalidade para a qual foram inventados: facilitar cálculos envolvendo números muito grandes (veja observação na página 155). Com o desenvolvimento tecnológico e o surgimento de calculadoras eletrônicas, computadores etc., essa finalidade perdeu a importância.

No entanto, a função logarítmica (que estudaremos neste capítulo) e a sua inversa, a função exponencial, podem representar diversos fenômenos físicos, biológicos e econômicos (alguns exemplos serão aqui apresentados) e, deste modo, jamais perderão sua importância.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

Sistemas de logaritmos

O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base **a** ($0 < a$ e $a \neq 1$) é chamado **sistema de logaritmos de base a**. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais positivos é o sistema de logaritmos de base 2.

Existem dois sistemas de logaritmos que são os mais utilizados em Matemática:

- O **sistema de logaritmos decimais**, de base 10, desenvolvido por Henry Briggs, a partir dos trabalhos de Napier. Briggs foi também quem publicou a primeira tábua dos logaritmos de 1 a 1 000, em 1617. Como vimos, indicamos com $\log_{10} x$, ou simplesmente **log x**, o **logaritmo decimal de x**.
- O **sistema de logaritmos neperianos**, de base **e**. O nome neperiano deriva de Napier. Os trabalhos de Napier envolviam, de forma não explícita, o que hoje conhecemos como número **e**. Com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, um século depois reconheceu-se a importância desse número.
  Representamos o logaritmo neperiano de **x** com $\log_e x$ ou **ℓn x**. Assim, por exemplo, $\ell n\ 3 = \log_e 3$; $\ell n\ e^4 = \log_e e^4 = 4$ etc.
  É comum referir-se ao logaritmo neperiano de **x** como o **logaritmo natural de x** ($x > 0$).

As calculadoras científicas possuem as teclas LOG e LN e fornecem, de modo simples, os valores dos logaritmos decimais e neperianos de um número real positivo.

Vejamos:

- Para saber o valor de log 2 e de ℓn 2, pressionamos:

LOG → 2 LN → 2

Obtemos, respectivamente, os valores aproximados:

0.301029995 e 0.69314718

- Para saber o valor de log 15 e de ℓn 15, basta pressionar:

LOG → 1 5 LN → 1 5

Obtemos, respectivamente, os valores aproximados:

1.176091259 e 2.708050201

Dependendo do modelo da calculadora, a sequência de operações pode variar, ou seja, primeiro "entramos" com o número e em seguida com a tecla do logaritmo.

EXERCÍCIO

FAÇA NO CADERNO

11 Calcule, sem o uso da calculadora, o valor de:

a) $\ell n\ e$

b) $\ell n\ 1$

c) $\log 0{,}1$

d) $\log 10^8$

e) $\ell n \left(\frac{1}{e}\right)$

f) $e^{\ell n\ 3}$

g) $10^{\log 8}$

h) $e^{2\ \ell n\ 5}$

i) $e^{2 + \ell n\ 2}$

j) $\log 10^{-3} + \log 10^{-2} + \log 10^{-1} + \log 1$

Propriedades operatórias

Vamos agora estudar três propriedades operatórias envolvendo logaritmos.

Logaritmo do produto

Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um deles, isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Logo, $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Acompanhe alguns exemplos:

- $\log_3 (27 \cdot 9) = \log_3 243 = 5$

  Aplicando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

  $\log_3 27 + \log_3 9 = 3 + 2 = 5$
- $\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$
- $\log_4 30 = \log_4 (2 \cdot 15) = \log_4 2 + \log_4 15 = \log_4 2 + \log_4 (5 \cdot 3) = \log_4 2 + \log_4 5 + \log_4 3$

Logaritmo do quociente

Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador, isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

isto é, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Observe alguns exemplos:

- $\log_2 \left(\frac{32}{4}\right) = \log_2 8 = 3$

  Aplicando a propriedade do logaritmo do quociente, temos:

  $\log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$

- $\log_3\left(\frac{7}{2}\right) = \log_3 7 - \log_3 2$
- $\log\left(\frac{3}{100}\right) = \log 3 - \log 100 = \log 3 - 2$

Logaritmo da potência

Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é, se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Demonstração:
Fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^r = y$, temos:

$$\left.\begin{matrix}\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^r = y \Rightarrow a^y = b^r\end{matrix}\right\} \Rightarrow a^y = (a^x)^r = a^{rx} \Rightarrow y = rx, \text{ isto é, } \log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

Vejamos alguns exemplos:

- $\log_2 8^2 = \log_2 64 = 6$

  Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:
  $\log_2 8^2 = 2 \cdot \log_2 8 = 2 \cdot 3 = 6$
- $\log_5 27 = \log_5 3^3 = 3 \cdot \log_5 3$
- $\log_{10} \sqrt{2} = \log_{10} 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_{10} 2$
- $\log_2 \frac{1}{27} = \log_2 3^{-3} = -3 \cdot \log_2 3$

OBSERVAÇÃO

Atualmente, dispomos de calculadora científica para calcular o valor de uma expressão numérica que envolva várias operações (multiplicação, divisão, potenciação e radiciação), como:

$$x = \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}}$$

Assim, em poucos segundos, descobrimos o valor de **x**. No passado, sem os recursos tecnológicos de que dispomos hoje, o cálculo dessa expressão era feito com auxílio das tabelas de logaritmos e das propriedades operatórias, em que as multiplicações transformam-se em adições, as divisões em subtrações, e as potenciações em multiplicações. Exemplo:

$$x = \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}} \Rightarrow \log x = \log \frac{(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}}{(1{,}103)^{11}} =$$

$$= \log\left[(11{,}2)^5 \cdot \sqrt[7]{2{,}07}\right] - \log (1{,}103)^{11} =$$

$$= \log (11{,}2)^5 + \log \sqrt[7]{2{,}07} - \log (1{,}103)^{11} =$$

$$= 5 \cdot \log 11{,}2 + \frac{1}{7} \cdot \log 2{,}07 - 11 \cdot \log 1{,}103$$

As antigas tabelas de logaritmos forneciam os valores de log 11,2, log 2,07 e log 1,103; em seguida, calculava-se o valor de log x e, pela mesma tabela, chegava-se ao valor de **x**.
Como esse tipo de cálculo está ultrapassado nos dias de hoje, não apresentaremos as tabelas de logaritmos nesta obra.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3 Calcule o valor de $\log_b (x^2 \cdot y)$ e de $\log_b \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{y}}\right)$, sabendo que $\log_b x = 3$ e $\log_b y = -4$ ($x > 0$, $y > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$).

Solução:

Aplicando as propriedades operatórias, escrevemos:

- $\log_b (x^2 \cdot y) = \log_b x^2 + \log_b y = 2 \cdot \log_b x + \log_b y = 2 \cdot 3 + (-4) = 2$

- $\log_b \left(\frac{x^4}{\sqrt[3]{y}}\right) = \log_b x^4 - \log_b \sqrt[3]{y} = 4 \cdot \log_b x - \log_b y^{\frac{1}{3}} = 4 \cdot \log_b x - \frac{1}{3} \cdot \log_b y = 4 \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot (-4) =$

$= 12 + \frac{4}{3} = \frac{40}{3}$

4 Qual é a expressão **E** cujo desenvolvimento logarítmico na base 10 é $\log E = 1 + \log a + 2 \log b - \log c$, com **a**, **b** e **c** números reais positivos?

Solução:

Temos:

$$\log E = \underbrace{\overbrace{\log 10}^{1} + \log a + \log b^2} - \log c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log E = \log (10 \cdot a \cdot b^2) - \log c \Rightarrow \log E = \log\left(\frac{10ab^2}{c}\right) \Rightarrow E = \frac{10ab^2}{c}$$

5 Considerando $\log 2 \simeq 0{,}3$, qual é o valor de $\log \sqrt[5]{64}$?

Solução:

Temos:

$$\log \sqrt[5]{64} = \log 64^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \log 64 = \frac{1}{5} \cdot \log 2^6 = \frac{6}{5} \cdot \log 2 \simeq \frac{6 \cdot 0{,}3}{5} \simeq 0{,}36$$

PENSE NISTO:

$\log 2 \simeq 0{,}3$ equivale a dizer que $10^{0{,}3} \simeq 2$. Como você explica, sem usar a calculadora, que $10^{0{,}3} \simeq 2$?

Observe: $10^{0{,}3} = 10^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{10^3} = \sqrt[10]{1\,000} \simeq 2$, pois $2^{10} = 1\,024$, que está próximo de 1 000; lembre que, se tivéssemos usado uma aproximação para log 2, com duas ou mais casas decimais, teríamos um resultado ainda mais próximo.

6 Qual é o valor real de **x** que satisfaz a equação $\log_2 (x - 2) + \log_2 x = 3$?

Solução:

Inicialmente, é preciso estabelecer a condição de existência dos logaritmos envolvidos. Devemos ter:

$$(x - 2 > 0) \text{ e } (x > 0) \Rightarrow x > 2$$

Assim, a equação só tem solução se $x > 2$.

Supondo $x > 2$, vamos usar as propriedades operatórias:

$$\log_2 (x - 2) + \log_2 x = 3 \Rightarrow \log_2 [(x - 2) \cdot x] = 3 \Rightarrow \log_2 (x^2 - 2x) = 3 \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} 2^3 = x^2 - 2x \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ (não serve, pois devemos ter } x > 2) \text{ ou } x = 4 \text{ (serve)}$$

EXERCÍCIOS

12 Sejam **x**, **y**, **b** reais positivos, $b \neq 1$. Sabendo que $\log_b x = -2$ e $\log_b y = 3$, calcule o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_b (x \cdot y)$

b) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right)$

c) $\log_b (x^3 \cdot y^2)$

d) $\log_b \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}\right)$

e) $\log_b \left(\frac{x \cdot \sqrt{y}}{b}\right)$

f) $\log_b \sqrt{\sqrt{x} \cdot y^3}$

13 Desenvolva, aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos (suponha **a**, **b** e **c** reais positivos):

a) $\log_5 \left(\frac{5a}{bc}\right)$

b) $\log \left(\frac{b^2}{10a}\right)$

c) $\log_3 \left(\frac{ab^2}{c}\right)$

d) $\log_2 \left(\frac{8a}{b^3c^2}\right)$

e) $\log_2 \sqrt{8a^2b^3}$

14 Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule, em função de **a** e **b**:

a) $\log 6$

b) $\log 1{,}5$

c) $\log 5$

d) $\log 30$

e) $\log \frac{1}{4}$

f) $\log 72$

g) $\log 0{,}3$

h) $\log \sqrt[3]{1{,}8}$

i) $\log 0{,}024$

j) $\log 0{,}75$

k) $\log 20\,000$

15 Sejam **a**, **b** e **c** reais positivos. Em cada caso, obtenha a expressão cujo desenvolvimento logarítmico, na respectiva base, é dado por:

a) $\log a + \log b + \log c$

b) $3 \log_2 a + 2 \log_2 c - \log_2 b$

c) $\log_3 a - \log_3 b - 2$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log a - \log b$

16 Qual é o valor de:

a) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$?

b) $\log_3 72 - \log_3 12 - \log_3 2$?

c) $\frac{1}{3} \cdot \log_{15} 8 + 2 \cdot \log_{15} 2 + \log_{15} 5 - \log_{15} 9000$?

17 Calcule o valor de **x** usando, em cada caso, as propriedades operatórias:

a) $\log x = \log 5 + \log 4 + \log 3$

b) $2 \cdot \log x = \log 3 + \log 4$

c) $\log \left(\frac{1}{x}\right) = \log \left(\frac{1}{3}\right) + \log 9$

d) $\frac{1}{2} \cdot \log_3 x = 2 \cdot \log_3 10 - \log_3 4$

18 Considerando os valores $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, calcule:

a) $\log 3000$

b) $\log 0{,}002$

c) $\log \sqrt{3}$

d) $\log 20$

e) $\log 0{,}06$

f) $\log 48$

g) $\log 125$

19 Considerando que $\log_2 5 \simeq 2{,}32$, obtenha os valores de:

a) $\log_2 10$

b) $\log_2 500$

c) $\log_2 1600$

d) $\log_2 \sqrt[3]{0{,}2}$

e) $\log_2 \left(\frac{64}{125}\right)$

20 Classifique as afirmações seguintes em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):

a) $\log 26 = \log 20 + \log 6$

b) $\log 5 + \log 8 + \log 2{,}5 = 2$

c) $\log_2 4^{18} = 36$

d) $\log_3 \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} > 0{,}25$

e) $\log_5 35 - \log_5 7 = 1$

f) $\log_3 (\sqrt{2} + 1) + \log_3 (\sqrt{2} - 1) = 0$

21 (UFPR) Para determinar a rapidez com que se esquece de uma informação, foi efetuado um teste em que listas de palavras eram lidas a um grupo de pessoas e, num momento posterior, verificava-se quantas dessas palavras eram lembradas. Uma análise mostrou que, de maneira aproximada, o percentual **S** de palavras lembradas, em função do tempo **t**, em minutos, após o teste ter sido aplicado, era dado pela expressão:

$$S = -18 \cdot \log (t + 1) + 86$$

a) Após 9 minutos, que percentual da informação inicial era lembrado?

b) Depois de quanto tempo o percentual **S** alcançou 50%?

22 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $2 \cdot \log_7 (x + 3) = \log_7 (x^2 + 45)$

b) $\log (4x - 1) - \log (x + 2) = \log x$

c) $3 \cdot \log_5 2 + \log_5 (x - 1) = 0$

d) $2 \cdot \log x = \log (2x - 3) + \log (x + 2)$

e) $\log x + \log x^2 + \log x^3 = -6$

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ \log_4 x + \log_4 y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4^{x - y} = 8 \\ \log_2 x - \log_2 y = 2 \end{cases}$

Mudança de base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base.

Por exemplo, quando aplicamos as propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos na mesma base. E, se não estiverem, é preciso escrever todos os logaritmos em uma mesma base.

Outro exemplo é quando, dispondo de uma calculadora científica, desejamos obter o valor de um logaritmo cuja base não seja decimal (base 10) nem neperiana (base **e**), por exemplo, $\log_2 5$. As calculadoras trazem, em geral, apenas as teclas LOG e LN, isto é, elas não fornecem diretamente o valor do logaritmo que não esteja nessas bases. Assim, é preciso conhecer a relação que $\log_2 5$ tem com o logaritmo decimal ($\log_{10} 5$) ou com o logaritmo neperiano ($\ell n 5$), a fim de que possamos obter seu valor, como veremos a seguir.

Propriedade

Suponha **a**, **b** e **c** números reais positivos, com **a** e **b** diferentes de 1. Temos:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

Demonstração:

Sejam $x = \log_a c$; $y = \log_b c$; e $z = \log_b a$.

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\begin{cases} x = \log_a c \Rightarrow a^x = c & (1) \\ y = \log_b c \Rightarrow b^y = c & (2) \\ z = \log_b a \Rightarrow b^z = a & (3) \end{cases}$$

Substituindo (3) e (2) em (1), temos:

$$(b^z)^x = b^y \Rightarrow b^{z \cdot x} = b^y \Rightarrow z \cdot x = y \underset{\substack{z \neq 0 \\ \text{(pois } a \neq 1)}}{\Longrightarrow} x = \frac{y}{z}$$

isto é, $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$.

Vejamos agora como é possível obter o valor de $\log_2 5$ usando a calculadora. Podemos transformar $\log_2 5$ para base 10 ou para base **e**:

- base 10: $\log_2 5 = \dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \simeq \dfrac{0{,}699}{0{,}3010} \simeq 2{,}32$
- base **e**: $\log_2 5 = \dfrac{\log_e 5}{\log_e 2} = \dfrac{\ell n\, 5}{\ell n\, 2} \simeq \dfrac{1{,}609}{0{,}693} \simeq 2{,}32$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7 Calcule o valor de $\log_{100} 72$, considerando os valores: $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

Solução:

Utilizemos a fórmula da mudança de base, para expressar $\log_{100} 72$ em base 10.

Temos:

$$\log_{100} 72 = \frac{\log 72}{\log 100} = \frac{\log (2^3 \cdot 3^2)}{2} = \frac{\log 2^3 + \log 3^2}{2} = \frac{3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3}{2} = \frac{0{,}9 + 0{,}96}{2} = 0{,}93$$

Aplicação importante

Sejam **a** e **b** reais positivos e diferentes de 1. Temos que:

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1 \quad \text{ou} \quad \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Demonstração:

Basta escrever $\log_b a$ na base **a**, de acordo com a propriedade da mudança de base:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}, \text{ ou seja, } \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

Note que, como $b \neq 1$, o denominador $\log_a b$ é diferente de zero.

Assim, por exemplo, $\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 1$; $\log_4 5 = \frac{1}{\log_5 4}$.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

8 Mostre que $\log_{49} 25 = \log_7 5$.

Solução:

Vamos escrever $\log_{49} 25$ na base 7:

$$\log_{49} 25 = \frac{\log_7 25}{\log_7 49} = \frac{\log_7 5^2}{2} = \frac{2 \cdot \log_7 5}{2} = \log_7 5$$

EXERCÍCIOS

24 Escreva na base 2 os seguintes logaritmos:

a) $\log_5 3$

b) $\log 5$

c) $\log_3 4$

d) $\ell n\ 3$

25 Considerando $\log 2 \simeq 0{,}3$, $\log 3 \simeq 0{,}48$ e $\log 5 \simeq 0{,}7$, calcule o valor de:

a) $\log_3 2$

b) $\log_5 3$

c) $\log_2 5$

d) $\log_3 100$

e) $\log_4 18$

f) $\log_{36} 0{,}5$

26 Sejam **x** e **y** reais positivos e diferentes de 1. Se $\log_y x = 2$, calcule:

a) $\log_x y$

b) $\log_{x^3} y^2$

c) $\log_{\frac{1}{x}} \frac{1}{y}$

d) $\log_{y^2} x$

27 Sabendo que $\log_{12} 5 = a$, calcule, em função de **a**, o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_5 12$

b) $\log_{25} 12$

c) $\log_5 60$

d) $\log_{125} 144$

28 Qual é o valor de:

a) $y = \log_7 3 \cdot \log_3 7 \cdot \log_{11} 5 \cdot \log_5 11$?

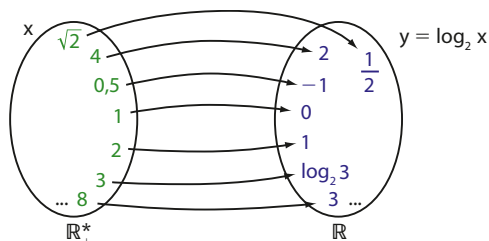
b) $z = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5$?

c) $w = \log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt{2}$?

d) $t = 5^{\log_5 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 11}$?

Função logarítmica

Dado um número real **a** ($0 < a$ e $a \neq 1$), chama-se **função logarítmica de base a** a função **f** de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_a x$.

Essa função associa cada número real positivo ao seu logaritmo na base **a**.
Um exemplo de função logarítmica é a função **f** definida por $f(x) = \log_2 x$.

São logarítmicas também as funções dadas pelas leis: $y = \log_3 x$; $y = \log_{10} x$; $y = \log_e x$ (ou $\ell n\, x$); $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ etc.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9 Determine o domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função **f** definida por $f(x) = \log_{(x-1)} (3 - x)$.

Solução:

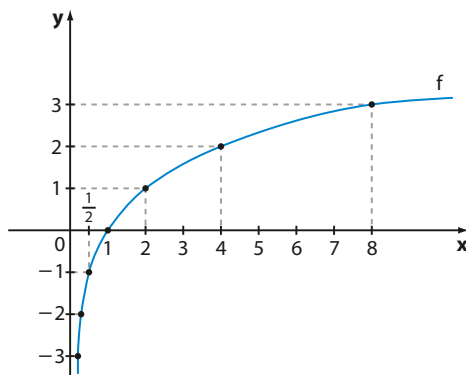
Devemos ter $3 - x > 0$, $x - 1 > 0$ e $x - 1 \neq 1$.

$$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3 \quad (1)$$
$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (2)$$
$$x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \quad (3)$$

Fazendo a interseção de (1), (2) e (3), resulta $1 < x < 2$ ou $2 < x < 3$.
Então, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 3\}$.

Gráfico da função logarítmica

Vamos construir o gráfico da função **f**, com domínio $\mathbb{R}_+^*$, definida por $y = \log_2 x$. Para isso, podemos construir uma tabela dando valores a **x** e calculando os correspondentes valores de **y**.

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	−3
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

Note que os valores atribuídos a **x** são potências de base 2; desse modo, $y = \log_2 x$ é um número inteiro facilmente calculado.

Os valores de $y = \log_2 x$ só resultam inteiros se **x** for uma potência de base 2 e expoente inteiro: $(\ldots 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, \ldots)$.
Se $x = 3$, por exemplo, teríamos $y = \log_2 3$, cujo valor pode ser obtido com o auxílio da calculadora científica:

PENSE NISTO:

Se tivéssemos construído a tabela com valores de **x** iguais a 3, 5 e 10, por exemplo, quais seriam os valores de $y = \log_2 x$? Utilize uma calculadora e registre os resultados no caderno.

$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \simeq \frac{0,4771}{0,3010} \simeq 1,585$ (↑ calculadora)

Se $x = 5$:

$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \simeq \frac{0,69897}{0,3010} \simeq 2,322$

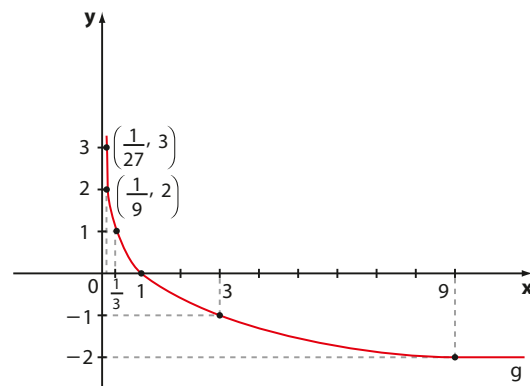
Se $x = 10$:

$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \simeq \frac{1}{0,3010} \simeq 3,322$

Observe que:

- o gráfico de **f** está inteiramente contido nos 1º e 4º quadrantes, pois **f** está definida apenas para $x > 0$.
- o conjunto imagem de **f** é $\mathbb{R}$. De fato, todo número real **y** é imagem de algum **x**: por exemplo, $y = 200$ é imagem de $x = 2^{200}$; $y = -200$ é imagem de $x = 2^{-200}$ etc. Em geral, o número real $\mathbf{y_0}$ é imagem do número real positivo $x = 2^{y_0}$.

Consideremos agora a função **g** dada por $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, definida para todo **x** real, $x > 0$. Vamos construir seu gráfico por meio da tabela a seguir:

x	$y = \log_{\frac{1}{3}} x$
$\frac{1}{27}$	3
$\frac{1}{9}$	2
$\frac{1}{3}$	1
1	0
3	−1
9	−2

Observe que o conjunto imagem de **g** é $\mathbb{R}$.

Função exponencial e função logarítmica

Vamos estabelecer uma importante relação entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica.

Consideremos as funções **f** e **g**, dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$.

Se um par ordenado (a, b) está na tabela de **f**, temos que $b = 2^a$; isso é equivalente a dizer que $\log_2 b = a$ e, desse modo, o par ordenado (b, a) está na tabela de **g**.

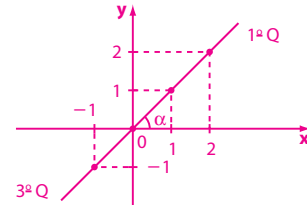
Acompanhe as tabelas seguintes:

x	$f(x) = 2^x$
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$g(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	−3
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3

Quando construímos os gráficos de **f** e **g** no mesmo sistema de coordenadas, notamos que eles são simétricos em relação à reta correspondente à função linear dada por $y = x$. Essa reta é conhecida como **bissetriz dos quadrantes ímpares**.

Observe que o gráfico de **f** corresponde ao gráfico de **g** "rebatido" em relação à bissetriz (e vice-versa).

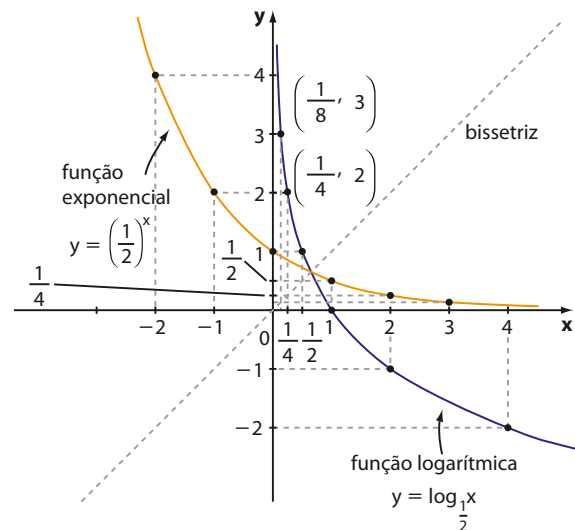
A reta de equação $y = x$ é formada por pontos com coordenadas iguais (a, a); $a \in \mathbb{R}$.

O ângulo α destacado mede 45°, daí o nome bissetriz dos quadrantes ímpares.

EXEMPLO 3

Vejamos como construir o gráfico da função dada por $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ definida para todo número real positivo, isto é, $x > 0$.

Vamos lembrar como é o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$ e, por simetria, obter o gráfico da função logarítmica de base $\frac{1}{2}$.

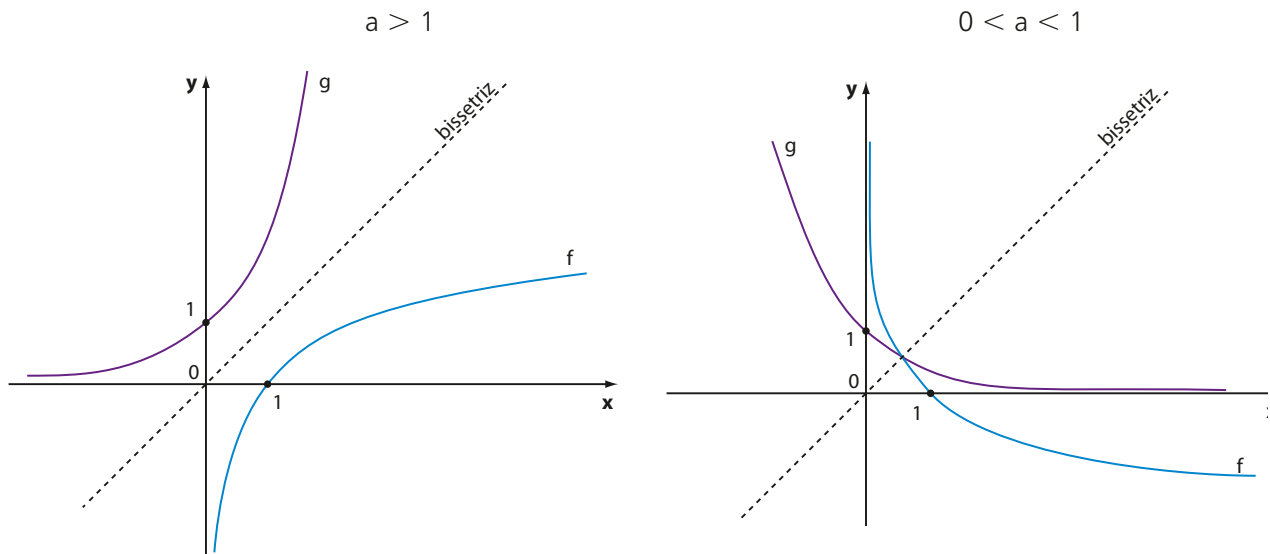
x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
8	−3
4	−2
2	−1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3

Propriedades do gráfico da função logarítmica

De modo geral, o gráfico de uma função **f** definida por $f(x) = \log_a x$ tem as seguintes características:

- Localiza-se à direita do eixo Oy, isto é, seus pontos pertencem ao 1º e ao 4º quadrantes, pois o domínio de **f** é $\mathbb{R}_+^*$.
- Corta o eixo Ox no ponto da abscissa 1, ou seja, no ponto (1, 0), pois, se $x = 1$, $y = \log_a 1 = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $0 < a$ e $a \neq 1$.
- É simétrico do gráfico da função exponencial **g** (de mesma base) definida por $y = a^x$ em relação à reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes.
- Toma o aspecto de um dos gráficos abaixo:

$a > 1$

$0 < a < 1$

Leis de **f** e **g**: $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = a^x$.

- O conjunto imagem de **f** é $\mathbb{R}$, pois todo número real **y** é imagem do número real positivo $x = a^y$.

EXERCÍCIOS

29 Estabeleça o domínio de cada uma das funções logarítmicas seguintes, definidas por:

a) $y = \log_5 (x - 1)$

b) $y = \log_{\frac{1}{2}} (3x - 2)$

c) $y = \log_4 (x^2 - 9)$

d) $y = \log_5 (x^2 + 3)$

e) $y = \log_{x-1} (-3x + 4)$

30 Seja $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$. Classifique como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**) as afirmações seguintes, corrigindo as falsas:

a) $f(100) = 2$

b) $f(x^2) = 2 \cdot f(x)$

c) $f(10x) = 10 \cdot f(x)$

d) $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0$

e) A taxa média de variação da função, quando **x** varia de 1 a 10, é dez vezes a taxa de variação da função quando **x** varia de 10 a 100.

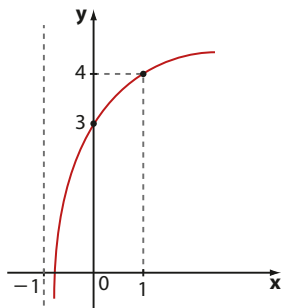
31 Construa o gráfico das funções logarítmicas de domínio $\mathbb{R}_+^*$ definidas pelas leis seguintes:

a) $y = \log_3 x$

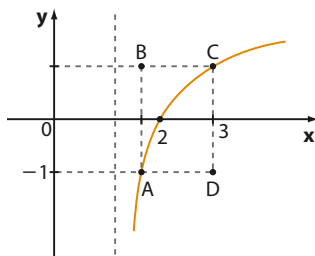
b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

d) $y = \log_4 x$

32 O gráfico abaixo representa a função definida pela lei $y = a + \log_b (x + 1)$, sendo **a** e **b** constantes reais.

a) Qual é o domínio de **f**?

b) Quais são os valores de **a** e **b**, respectivamente?

33 O gráfico abaixo representa a função **f**, definida por $f(x) = \log_2 (x + k)$, sendo **k** uma constante real.

a) Qual é o valor de **k**?

b) Qual é a área do retângulo ABCD?

c) Qual é o valor de f(1 001)? Considere $\log 2 \simeq 0{,}30$.

34 Entre os números seguintes, determine aqueles que são positivos:

a) $\log_{\frac{1}{4}} 3$

b) $\log_5 2$

c) $\log 0{,}2$

d) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$

e) $\log_{\frac{2}{3}} 7$

f) $\ell n\ 2$

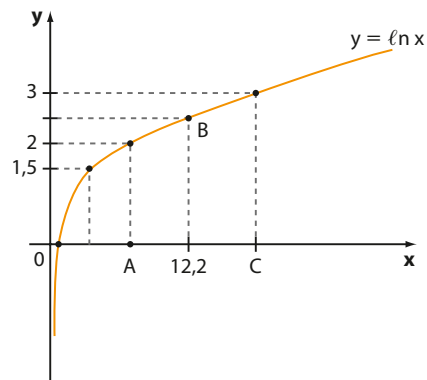
35 A lei seguinte representa uma estimativa sobre o número de funcionários de uma empresa, em função do tempo **t**, em anos (t = 0, 1, 2, ...), de existência da empresa:

$$f(t) = 400 + 50 \cdot \log_4 (t + 2)$$

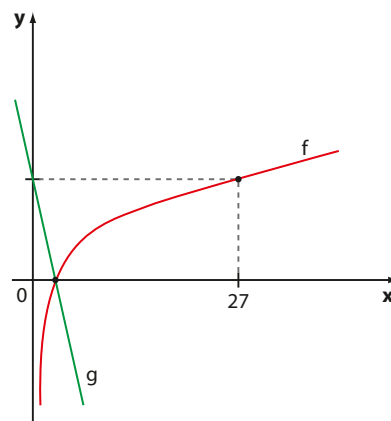
a) Quantos funcionários a empresa possuía na sua fundação?

b) Quantos funcionários foram incorporados à empresa do 2º ao 6º ano? (Admita que nenhum funcionário tenha saído.)

c) Calcule a taxa média de variação do número de funcionários da empresa do 6º ao 14º ano.

36 O gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $y = \ell n\ x$, é dado a seguir.

Determine a área do triângulo ABC, usando a tabela seguinte, que contém valores aproximados.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4,0
e^x	1,6	2,7	4,5	7,4	12,2	20,1	33,1	54,6

37 Os gráficos de duas funções **f** e **g** são mostrados a seguir.

Sabendo que $f(x) = \log_9 x$, determine:

a) a lei da função **g**.

b) os valores reais de **x** para os quais $f(x) > g(x)$.

c) o valor de $f(3) - g(3)$.

38 Em cada item, decida qual dos números reais é maior:

a) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ e $\log_{\frac{1}{3}} 5$

b) $\log_2 \pi^2$ e $\log_2 9$

c) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$ e $\log_{\frac{1}{2}} 2$

Aplicações

Os terremotos e os logaritmos

No dia 25 de abril de 2015, um forte terremoto de 7,8 graus na escala Richter, que durou aproximadamente 1 minuto, devastou o Nepal.

O terremoto deixou um saldo de quase 20 000 vítimas (entre mortos e feridos) e um cenário de guerra pelo país: milhares de pessoas perderam suas casas, monumentos e templos declarados patrimônio da humanidade pela Unesco desmoronaram, água, energia e comida escassearam.

A comunidade internacional prestou grande ajuda ao Nepal, enviando recursos financeiros, médicos e alimentares até os vilarejos mais remotos e de difícil acesso.

PHILIPPE LOPEZ/AFP

Policial nepalês mantém vigília próximo a um templo desabado na vila Bungamati, na periferia de Katmandu, Himalaia.

A escala Richter foi desenvolvida em 1935 por Charles Richter e Beno Gutenberg, no California Institute of Technology. Trata-se de uma escala logarítmica, sem limites. No entanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala, já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas na crosta terrestre.

A magnitude (graus) de Richter é uma medida **quantitativa** do "tamanho" de um terremoto. Ela está relacionada com a amplitude das ondas registradas e também com a energia liberada.

A escala Richter e seus efeitos

Magnitude Richter	Efeitos
Menor que 3,5	Geralmente não sentido, mas gravado.
De 3,5 a 5,4	Às vezes sentido, mas raramente causa danos.
De 5,5 a 6,0	No máximo causa pequenos danos a prédios bem construídos, mas pode danificar seriamente casas mal construídas em regiões próximas.
De 6,1 a 6,9	Pode ser destrutivo em áreas em torno de até 100 km do epicentro.
De 7,0 a 7,9	Grande terremoto. Pode causar sérios danos numa grande faixa.
8,0 ou mais	Enorme terremoto. Pode causar graves danos em muitas áreas mesmo que estejam a centenas de quilômetros.

Fonte de pesquisa: *A escala Richter*. Disponível em: <ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm>. Acesso em: 23 mar. 2016.

Amplitude

A amplitude é uma forma de medir a movimentação do solo e está diretamente associada ao tamanho das ondas registradas nos sismógrafos.

A fórmula utilizada é:

$$M = \log A - \log A_0$$

em que **A** é a amplitude máxima medida no sismógrafo a 100 km do epicentro do terremoto, $\mathbf{A_0}$ é a amplitude de referência ($\log A_0$ é constante) e **M** é a magnitude do terremoto.

Desse modo, se quisermos comparar as magnitudes ($\mathbf{M_1}$ e $\mathbf{M_2}$) de dois terremotos em função da amplitude das ondas geradas, podemos fazer:

$$M_1 - M_2 = (\log A_1 - \log A_0) - (\log A_2 - \log A_0)$$

$$M_1 - M_2 = \log A_1 - \log A_2$$

$$M_1 - M_2 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

Em particular, se $M_1 - M_2 = 1$ (terremotos que diferem de 1 grau na escala Richter), temos:

$$1 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Rightarrow 10^1 = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow A_1 = 10 \cdot A_2$$

Desse modo, cada ponto de magnitude equivale a 10 vezes a amplitude do ponto anterior.

Energia

A energia liberada em um abalo sísmico é um fiel indicador do poder destrutivo de um terremoto. A relação entre a magnitude **M** (graus) de Richter e a energia liberada **E** é dada por:

$$M = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) \quad (*)$$

sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh (quilowatt hora) um valor padrão (constante).

Vamos comparar as energias $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$ liberadas em dois terremotos $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ que diferem de 1 grau na escala Richter, a saber, de magnitudes $\mathbf{M_1}$ e $M_2 = M_1 + 1$.

De (*), podemos escrever:

$$\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{3M}{2} \Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{\frac{3M}{2}} \Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{\frac{3M}{2}}$$

Assim, para o terremoto $\mathbf{T_1}$, temos $E_1 = E_0 \cdot 10^{\frac{3M_1}{2}}$; para o terremoto $\mathbf{T_2}$, temos: $E_2 = E_0 \cdot 10^{\frac{3M_2}{2}} =$ $= E_0 \cdot 10^{\frac{3 \cdot (M_1 + 1)}{2}} = \underbrace{E_0 \cdot 10^{\frac{3M_1}{2}}}_{E_1} \cdot 10^{\frac{3}{2}} = E_1 \cdot 10^{\frac{3}{2}}$, isto é, $E_2 = E_1 \cdot 10^{\frac{3}{2}}$.

Como $10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = \sqrt{1\,000} \simeq 31{,}62$, concluímos que a energia liberada no terremoto $\mathbf{T_2}$ é aproximadamente 32 vezes a energia liberada no terremoto $\mathbf{T_1}$.

Assim, cada ponto na escala Richter equivale a aproximadamente 32 vezes a energia do ponto anterior.

Reunindo os conhecimentos construídos referentes à amplitude das ondas e energia liberada, ao compararmos, por exemplo, dois terremotos de 6 e 9 graus na escala Richter, concluímos que:

- a amplitude das ondas no terremoto mais forte é $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$ vezes a amplitude das ondas do outro;
- a energia liberada no terremoto mais forte é da ordem de $32 \cdot 32 \cdot 32 = 32\,768$ vezes a energia liberada do outro.

Por fim, é importante destacar também que existem medidas **qualitativas** que descrevem os efeitos produzidos pelos terremotos a partir de observações *in loco* dos danos ocasionados nas construções, população e meio ambiente (efeitos macrossísmicos).

Fontes de pesquisa:
Como medir a força de um terremoto. Disponível em: <www.obsis.unb.br/obsis/index.php?option=com_content&view=article&id=56&Itemid=67&lang=pt-br>. Acesso em: 23 mar. 2016.; *A escala Richter*. Disponível em: <ecalculo.if.usp.br/funcoes/grandezas/exemplos/exemplo5.htm>. Acesso em: 4 mar. 2016.

Equações exponenciais

Há equações que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base pela simples aplicação das propriedades das potências. A resolução de uma equação desse tipo baseia-se na definição de logaritmo:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

com $0 < a$, $a \neq 1$ e $b > 0$.

Veja a equação: $3^x = 5$.

Da definição de logaritmos, escrevemos $\log_3 5 = x$.

Para conhecer esse valor, podemos usar uma calculadora científica, aplicando a propriedade da mudança de base:

$$x = \log_3 5 = \frac{\log 5}{\log 3} \simeq \frac{0,6990}{0,4771} \simeq 1,465$$

Um processo equivalente consiste em "aplicar" logaritmo decimal aos dois membros da igualdade $3^x = 5$, criando uma nova igualdade:

$$\log 3^x = \log 5 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 3}$$

Qualquer um desses processos pode ser usado para resolver o problema introduzido no início do capítulo sobre a desvalorização anual do caminhão.

Precisamos resolver a equação: $0,9^x = 0,5$.

Temos:

$$x = \log_{0,9} 0,5 = \frac{\log 0,5}{\log 0,9} = \frac{\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{\overbrace{\log 1}^{=0} - \log 2}{\log 9 - \underbrace{\log 10}_{=1}} = \frac{-\log 2}{2 \cdot \log 3 - 1}$$

Usando os valores $\log 2 \simeq 0,3010$ e $\log 3 \simeq 0,4771$, obtemos:

$$x = \frac{-0,301}{2 \cdot 0,4771 - 1} = \frac{-0,301}{-0,0458} \simeq 6,57$$

Logo, depois de aproximadamente 6 anos e 7 meses de uso, o caminhão valerá R$ 60 000,00.

É importante estar atento às aproximações usadas para os logaritmos. Se tivéssemos usado aproximações com duas casas decimais (por exemplo, $\log 2 \simeq 0,30$ e $\log 3 \simeq 0,48$), obteríamos 7,5 anos como resultado, o que daria quase um ano de diferença na resposta.

EXERCÍCIOS

39 Considerando $\log 2 \simeq 0,3$ e $\log 3 \simeq 0,48$, resolva as seguintes equações exponenciais:

a) $3^x = 10$
b) $4^x = 3$
c) $2^x = 27$
d) $10^x = 6$
e) $2^x = 5$
f) $3^x = 2$
g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{9}$
h) $2^x = 3$

40 Economistas afirmam que a dívida externa de um determinado país crescerá segundo a lei:

$$y = 40 \cdot 1,2^x$$

sendo **y** o valor da dívida (em bilhões de dólares) e **x** o número de anos transcorridos após a divulgação dessa previsão. Em quanto tempo a dívida estará estimada em 90 bilhões de dólares? Use $\log 2 \simeq 0,3$ e $\log 3 \simeq 0,48$.

41 O investimento financeiro mais conhecido do brasileiro é a caderneta de poupança, que rende aproximadamente 6% ao ano. Ao aplicar hoje R$ 2 000,00, um poupador terá, daqui a **n** anos, um valor **v**, em reais, dado por $v(n) = 2\,000 \cdot 1,06^n$.

a) Que valor terá o poupador daqui a 3 anos? E daqui a 6 anos? Use $1,06^3 \simeq 1,2$.

b) Qual é o tempo mínimo (em anos inteiros) necessário para que o valor dessa poupança seja de R$ 4 000,00? E R$ 6 500,00? Considere $\log 2 \simeq 0,3$; $\log 13 \simeq 1,14$ e $\log 1,06 \simeq 0,025$.

42 Dentro de **t** décadas, contadas a partir de hoje, o valor (em reais) de um imóvel será estimado por $v(t) = 600\,000 \cdot 0{,}9^t$.

a) Qual é o valor atual desse imóvel?

b) Qual é a perda (em reais) no valor desse imóvel durante a primeira década?

c) Qual é a desvalorização percentual desse imóvel em uma década?

d) Qual é o tempo mínimo necessário, em anos, para que o valor do imóvel seja de 450 mil reais? Use $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$.

43 Um equipamento industrial foi adquirido por R$ 30 000,00. Seu valor (**v**), em reais, com **x** anos de uso, é dado pela lei $v(x) = p \cdot q^x$, em que **p** e **q** são constantes reais.

Sabendo-se que, com 3 anos de uso, o valor do equipamento será R$ 21 870,00, determine:

a) os valores de **p** e **q**;

b) o tempo aproximado de uso para o qual o equipamento valerá R$ 10 000,00.
Use $\log 3 \simeq 0{,}4771$.

44 A população de certa espécie de mamífero em uma região da Amazônia cresce segundo a lei

$$n(t) = 5\,000 \cdot e^{0{,}02t}$$

em que n(t) é o número de elementos estimado da espécie no ano **t** (t = 0, 1, 2, ...), contado a partir de hoje (t = 0).

Determine o número inteiro mínimo de anos necessários para que a população atinja:

a) 8 000 elementos;

b) 10 000 elementos.

Use $\ell n\, 2 \simeq 0{,}69$ e $\ell n\, 5 \simeq 1{,}6$.

45 (Unicamp-SP) O decaimento radioativo do estrôncio 90 é descrito pela função $P(t) = P_0 \cdot 2^{-bt}$, onde **t** é um instante de tempo, medido em anos, **b** é uma constante real e P_0 é a concentração inicial do estrôncio 90, ou seja, a concentração no instante t = 0.

a) Se a concentração de estrôncio 90 cai pela metade em 29 anos, isto é, se a meia-vida do estrôncio 90 é de 29 anos, determine o valor constante de **b**.

b) Dada uma concentração inicial P_0 de estrôncio 90, determine o tempo necessário para que a concentração seja reduzida a 20% de P_0. Considere $\log_2 10 \simeq 3{,}32$.

46 Estima-se que a população de ratos em um município cresça à taxa de 10% ao mês: isto é, a cada mês, o número de ratos aumentou 10% em relação ao número de ratos do mês anterior. Sabendo que a quantidade atual de ratos é da ordem de 400 000, determine o tempo mínimo de meses necessários para que a população de ratos nesse município quadruplique.
Use $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 11 \simeq 1{,}04$.

47 (Enem-MEC) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após **t** anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2,\ 7)^{kt}$, onde **A** é a massa incial e **k** é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27
b) 36
c) 50
d) 54
e) 100

DESAFIO

Em uma calculadora científica que fornece o logaritmo do número que estiver aparecendo no visor, pressionando sucessivamente a tecla LOG (logaritmo decimal), a começar pelo número 20 bilhões, após quantas vezes de acionamento dessa tela aparecerá mensagem de erro? Explique.

Se possível, experimente comprovar seu resultado com uma calculadora.

Aplicações

Os sons, a audição humana e a escala logarítmica

Vamos retomar o problema levantado na introdução desse capítulo: como construir uma escala para representar valores que variam numa faixa tão grande, de 10^{-12} (limiar de audibilidade) até 1,00 (limiar de dor – embora níveis abaixo desse valor também possam causar danos e incômodos, dependendo do tempo, de exposição e frequência)?

FRANCESCO PRANDONI/GETTY IMAGES

O som produzido por amplificadores de um show de rock, a 2 m de distância, está no limiar da audição dolorosa.

A Física nos ensina que a intensidade (**I**) de um som é uma grandeza que mede a energia transportada por uma onda sonora na unidade de tempo, por unidade de área da superfície atravessada. No sistema internacional de unidades, ela é medida em W/m^2. (1 W equivale a 1 joule por segundo.)

Na tabela seguinte, estão relacionadas as intensidades de alguns sons dentro dessa faixa (os valores podem mudar de acordo com o modelo do aparelho):

Algumas fontes sonoras e suas respectivas intensidades

Som	Intensidade (W/m^2)
Limiar de audibilidade	$I_0 = 10^{-12}$
Respiração normal	10^{-11}
Biblioteca	10^{-8}
Conversação a 1 m de distância	10^{-6}
Escritório barulhento	10^{-4}
Caminhão pesado a 15 m de distância	10^{-3}
Construção civil a 3 m de distância	10^{-1}
Limiar de dor	1,0

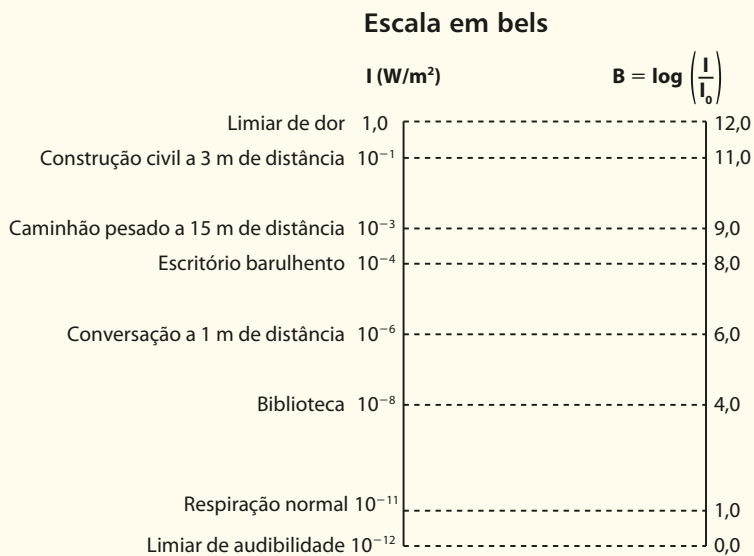
Fonte: *Ondas sonoras*. Disponível em: <www.arquivos.ufs.br/mlalic/UAB_livro/Fisica_C_Aula_04.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

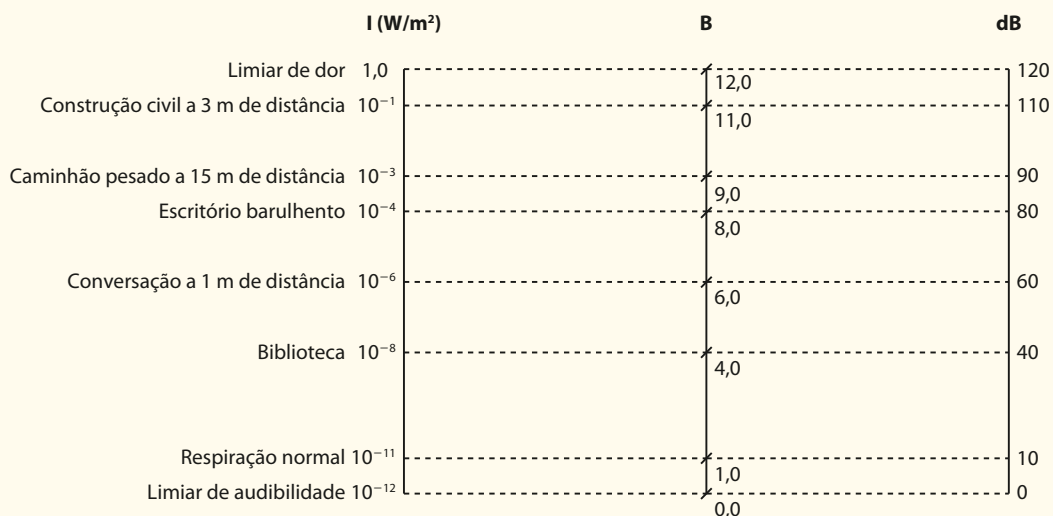
A primeira ideia é determinar, para um som qualquer, a razão entre sua intensidade (**I**) e o limiar de audibilidade (**I_0**). Do valor obtido, calculamos o logaritmo decimal, obtendo-se o chamado bel (B) – homenagem a Alexander Graham Bell (1847-1922), inventor do telefone.

$$B = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

- Por exemplo, para o limiar de audibilidade, temos $I = I_0$ e o bel correspondente é $\log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log 1 = 0$, que é o novo limiar de audibilidade.
- Para o som de um escritório barulhento, por exemplo, temos $I = 10^{-4} \Rightarrow \log\left(\frac{I}{I_0}\right) = \log\left(\frac{10^{-4}}{10^{-12}}\right) = 8$ bels, o que significa que esse som está 8 bels acima do limite inferior.

Repetindo esse raciocínio para os demais valores da tabela anterior, obtemos a seguinte correspondência:

Escala em bels

Ao se fazer essa escolha, reduziu-se a faixa da escala em excesso (de 10^{-12} até 1,0, obtivemos uma correspondência de 0 a 12). A saída encontrada foi subdividir o bel (B), criando-se o decibel (dB), que corresponde a um décimo do bel. A escala mais utilizada é a dos **decibels** (embora amplamente usado, o plural "decibéis" não é correto).

Veja, a seguir, a correspondência entre os diversos sons listados, o bel e o decibel:

Temos: $$dB = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Observe que tanto o bel como o decibel não são unidades de medidas e sim escalas (dados pelo logaritmo de razões entre intensidades sonoras).

Com a escala em decibels é possível comparar de maneira muito mais fácil valores que se encontravam numa faixa numérica extremamente ampla. Esse exemplo mostra a vantagem do uso de uma escala logarítmica quando a grandeza em estudo assume valores muito pequenos (ou muito grandes).

Fontes de pesquisa: *Como funciona o corpo humano?* Disponível em: <www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/2_qualidade_vida_humana/Museu2_qualidade_corpo_sensorial_audicao1.htm>. Acesso em: 7 mar. 2016; Maria de Fátima Ferreira Neto. *60 + 60 = 63?* Disponível em: <www.sbfisica.org.br/v1/novopion/index.php/publicacoes/artigos/471-60-60-63>. Acesso em: 7 mar. 2016; *Propriedades físicas do som*. Disponível em: <wwwp.feb.unesp.br/jcandido/acustica/Apostila/Capitulo%2002.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016. ; *Ondas sonoras*. Disponível em: <www.arquivos.ufs.br/mlalic/UAB_livro/Fisica_C_Aula_04.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Progressões

Sequências numéricas

A tabela seguinte relaciona o número de funcionários de uma empresa nos seus dez primeiros anos de existência:

Ano	Número de funcionários
1	52
2	58
3	60
4	61
5	67
6	65
7	69
8	72
9	76
10	78

IMAGEBROKER RM/NORB/DIOMEDIA

Observe que a relação entre essas duas variáveis define uma função: a cada ano de existência da empresa corresponde um único número de funcionários.

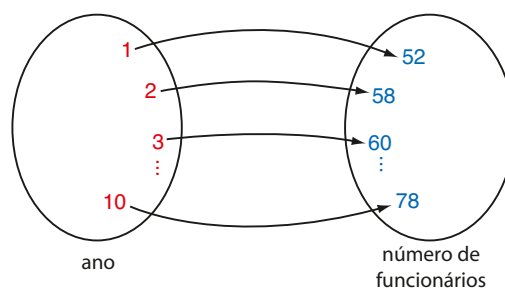
Note que o domínio dessa função é {1, 2, 3, ..., 10}.

De modo geral, uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$ é chamada **sequência numérica infinita**. Se o domínio de **f** é {1, 2, 3, ..., n} em que $n \in \mathbb{N}^*$, temos uma **sequência numérica finita**.

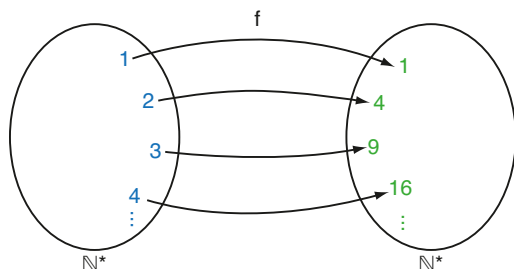
É usual representar uma sequência numérica por meio de seu conjunto imagem, colocando seus elementos entre parênteses.

No exemplo anterior, (52, 58, 60, 61, 67, 65, 69, 72, 76, 78) representa a sequência da quantidade de funcionários da empresa ano a ano.

Em geral, sendo $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, ..., $\mathbf{a_n}$, ... números reais, a função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$, ... é representada por: $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$.

Observe que o índice **n** indica a posição do elemento na sequência. Assim, o primeiro termo é indicado por $\mathbf{a_1}$, o segundo é indicado por $\mathbf{a_2}$ e assim por diante.

Formação dos elementos de uma sequência

Termo geral

Vamos considerar a função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ que associa a cada número natural não nulo o seu quadrado:

Podemos representá-la por: (1, 4, 9, 16, 25, ...), em que:

$$a_1 = 1 = 1^2$$
$$a_2 = 4 = 2^2$$
$$a_3 = 9 = 3^2$$
$$a_4 = 16 = 4^2$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$a_n = n^2$$

A expressão $a_n = n^2$ é a **lei de formação** ou **termo geral** dessa sequência, pois permite o cálculo de qualquer termo da sequência, por meio da atribuição dos valores possíveis para **n** (n = 1, 2, 3, ...).

PENSE NISTO:

Em seu caderno, escreva o termo geral que represente a sequência dos números pares positivos (2, 4, 6, 8, ...).

$a_n = 2 \cdot n$; com $n \in \mathbb{N}^*$. Observe: $a_1 = 2 \cdot 1 = 2$; $a_2 = 2 \cdot 2 = 4$; $a_3 = 2 \cdot 3 = 6$ etc.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

1 Encontre os cinco primeiros termos da sequência cujo termo geral é $a_n = 1{,}5n + 8$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Solução:

Para conhecer os termos dessa sequência, é preciso atribuir sucessivamente valores para **n** (n = 1, 2, 3, 4, 5):

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1{,}5 \cdot 1 + 8 = 9{,}5$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 1{,}5 \cdot 2 + 8 = 11$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 1{,}5 \cdot 3 + 8 = 12{,}5$$
$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 1{,}5 \cdot 4 + 8 = 14$$
$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 1{,}5 \cdot 5 + 8 = 15{,}5$$

2 A lei de formação dos elementos de uma sequência é $a_n = 3n - 16$, $n \in \mathbb{N}^*$. O número 113 pertence a essa sequência?

Solução:

Se quisermos saber se o número 113 pertence à sequência, devemos substituir $\mathbf{a_n}$ por 113 e verificar se a equação obtida tem solução em $\mathbb{N}^*$:

$$113 = 3n - 16 \Rightarrow 3n = 129 \Rightarrow n = 43 \in \mathbb{N}^*$$

Concluímos, então, que o número 113 pertence à sequência e ocupa a 43ª posição.

Lei de recorrência

Muitas vezes conhecemos o primeiro termo de uma sequência e uma lei que permite calcular cada termo $\mathbf{a_n}$ a partir de seus anteriores: $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1$.

Quando isso ocorre, dizemos que a sequência é determinada por uma **lei de recorrência**.

EXEMPLO 1

Vamos construir a sequência definida pela relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n, \text{ para } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1 \end{cases}$$

A segunda sentença indica como obter $\mathbf{a}_2$ a partir de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_3$ a partir de $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4$ a partir de $\mathbf{a}_3$ etc. Para isso, é preciso atribuir valores a **n**:

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$n = 2 \Rightarrow a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$n = 3 \Rightarrow a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 = 8$$
$$n = 4 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot a_4 = 2 \cdot 8 = 16$$

Assim, a sequência procurada é (1, 2, 4, 8, 16, ...).

EXERCÍCIOS

1 Seja a sequência definida por $a_n = -3 + 5n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Determine:

a) $\mathbf{a}_2$ **b)** $\mathbf{a}_4$ **c)** $\mathbf{a}_{11}$

2 Escreva os quatro primeiros termos da sequência definida por $a_n = 2 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Para cada função definida a seguir, represente a sequência associada:

a) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ que associa a cada número natural não nulo o triplo de seu sucessor.

b) $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ tal que $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

4 O termo geral de uma sequência é $a_n = 143 - 4n$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Qual é a soma de seus 3 primeiros termos?

b) Os números 71, −345 e −195 pertencem à sequência? Em caso afirmativo, determine suas posições.

5 Construa a sequência definida pela relação:

$$\begin{cases} a_1 = -5 \\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 3,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

6 Determine o sexto termo da sequência definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 3 \cdot a_n,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

7 Seja $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^3 + n^2 + 1$. Ao representar a sequência associada a **f**, um estudante apresentou a seguinte resolução:

(3, 13, ■, 81, 151, ■, ...)

Por algum motivo, dois números da sequência acima saíram borrados. Determine-os, reescrevendo a sequência.

8 Os termos gerais de duas sequências ($\mathbf{a}_n$) e ($\mathbf{b}_n$) são, respectivamente, $a_n = -193 + 3n$ e $b_n = 220 - 4n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

a) Escreva os cinco primeiros termos de ($\mathbf{a}_n$) e de ($\mathbf{b}_n$).

b) Qual é o primeiro termo positivo de ($\mathbf{a}_n$)? Que posição ele ocupa na sequência?

c) Qual é o primeiro termo negativo de ($\mathbf{b}_n$)? Que posição ele ocupa na sequência?

d) As duas sequências apresentam algum termo em comum? Em caso afirmativo, determine-o.

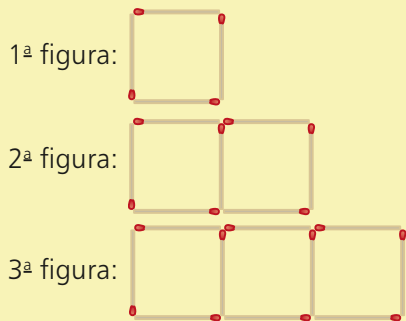
Progressões aritméticas

TROQUE IDEIAS

Observação de regularidades

As figuras seguintes mostram a construção de quadrados justapostos usando palitos.

1ª figura:

2ª figura:

3ª figura:

Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Mantendo o padrão apresentado, desenhe, em seu caderno, a 4ª, 5ª e 6ª figuras.

b) Construa a sequência correspondente à quantidade de palitos usados na construção de cada figura. Qual é a regularidade que você observa?

c) Obtenha o termo geral dessa sequência.

d) Quantos palitos são usados na construção da 25ª figura?

e) Qual é a posição da figura feita com 493 palitos?

Progressão aritmética (P.A.) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante. Essa constante é chamada **razão da P.A.** e é indicada por **r**.

EXEMPLO 2

a) $(-6, -1, 4, 9, 14, ...)$ é uma P.A. de razão $r = 5$.

b) $(2; 2{,}3; 2{,}6; 2{,}9; ...)$ é uma P.A. de razão $r = 0{,}3$.

c) $(150, 140, 130, 120, ...)$ é uma P.A. de razão $r = -10$.

d) $\left(\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, ...\right)$ é uma P.A. de razão $r = 1$.

e) $\left(0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1, ...\right)$ é uma P.A. de razão $r = -\frac{1}{3}$.

f) $(7, 7, 7, 7, ...)$ é uma P.A. de razão $r = 0$.

PENSE NISTO:

Como podemos definir uma P.A. cujo primeiro termo é $\mathbf{a_1}$ e a razão é **r**, usando uma lei de recorrência?

$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{R} \text{ (conhecido)} \\ a_n = a_{n-1} + r;\ n \in \mathbb{N} \text{ com } n \geq 2 \end{cases}$

OBSERVAÇÃO

Nos itens do exemplo anterior, note que a razão da P.A. pode ser obtida calculando-se a diferença entre um termo qualquer, a partir do segundo, e o termo que o antecede, isto é:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1}$$

Classificação

De acordo com a razão, podemos classificar as progressões aritméticas da seguinte forma:

- Se $r > 0$, cada termo é maior que o anterior, isto é, $a_n > a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dizemos, então, que a P.A. é **crescente** (veja os itens *a*, *b* e *d* do exemplo 2).
- Se $r < 0$, cada termo é menor que o anterior, isto é, $a_n < a_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Dizemos, então, que a P.A. é **decrescente** (veja os itens *c* e *e* do exemplo 2).
- Se $r = 0$, todos os termos da P.A. são iguais. Dizemos, então, que ela é **constante** (veja o item *f* do exemplo 2).

Termo geral da P.A.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.A., conhecendo apenas o 1º termo e a razão.

Seja uma P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão **r**. Temos:

$$a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

De modo geral, o termo $\mathbf{a_n}$, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Essa expressão, conhecida como **fórmula do termo geral da P.A.**, permite-nos expressar qualquer termo da P.A. em função de $\mathbf{a_1}$ e **r**. Assim, por exemplo, podemos escrever:

- $a_4 = a_1 + 3r$
- $a_{12} = a_1 + 11r$
- $a_{32} = a_1 + 31r$

PENSE NISTO:

Como podemos expressar o 10º termo de uma P.A. em função apenas do 7º termo e da razão?

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

3 Calcule o 20º termo da P.A. (26, 31, 36, 41, 46, ...).

Solução:

Sabemos que: $a_1 = 26$ e $r = 31 - 26 = 5$

Utilizando a expressão do termo geral, podemos escrever: $a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = 26 + 19 \cdot 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = 121$

4 Determine a P.A. cujo sétimo termo vale 1 e cujo décimo termo vale 16.

Solução:

Temos: $\begin{cases} a_7 = 1 \Rightarrow a_1 + 6r = 1 \\ a_{10} = 16 \Rightarrow a_1 + 9r = 16 \end{cases}$

Subtraindo a 2ª equação da 1ª, temos:

$-3r = -15 \Rightarrow r = 5$

Substituindo esse valor em qualquer uma das equações, obtém-se: $a_1 = -29$

A P.A. é, portanto, $(-29, -24, -19, -14, ...)$

5 Determine $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ de modo que a sequência $(x + 5, 4x - 1, x^2 - 1)$ seja uma P.A.

Solução:

Como $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, podemos escrever:

$(4x - 1) - (x + 5) = (x^2 - 1) - (4x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 6 = x^2 - 4x \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

As raízes dessa equação são: $x = 1$ ou $x = 6$.

Podemos verificar que, para $x = 1$, a P.A. é (6, 3, 0) e, para $x = 6$, a P.A. é (11, 23, 35).

6 Determine quantos múltiplos de 3 há entre 100 e 500.

Solução:

A sequência dos múltiplos de 3 (0, 3, 6, 9, ...) é uma P.A. de razão 3, mas o que nos interessa é estudar essa sequência entre 100 e 500.

Para isso, temos:

- o primeiro múltiplo de 3 maior que 100 é $a_1 = 102$;
- o último múltiplo de 3 pertencente ao intervalo dado é 498, que indicaremos por $\mathbf{a_n}$, pois não conhecemos sua posição na sequência. Assim, $a_n = 498$.

Retomando o problema, queremos determinar o número de termos (**n**) da P.A. (102, 105, ..., 498).

Pelo termo geral da P.A., temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 498 = 102 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 133$$

Portanto, há 133 múltiplos de 3 entre 100 e 500.

OBSERVAÇÃO

A análise restrita unicamente aos primeiros termos de uma sequência pode, algumas vezes, levar a conclusões precipitadas.

Por exemplo, ao analisarmos a sequência (−1, 3, 7, ...) poderíamos concluir que se trata de uma P.A. de razão 4, cujo termo geral é $a_n = -1 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 5$; $n \in \mathbb{N}^*$; a P.A. é (−1, 3, 7, 11, 15, 19, ...).

Mas essa sequência também pode ser descrita por outra lei geral, a saber $b_n = n^3 - 6n^2 + 15n - 11$; $n \in \mathbb{N}^*$.

De fato, $b_1 = -1$, $b_2 = 3$ e $b_3 = 7$ (faça as verificações).

Mas $b_4 = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 15 \cdot 4 - 11 = 17$; $b_5 = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 - 11 = 39$;

$b_6 = 6^3 - 6 \cdot 6^2 + 15 \cdot 6 - 11 = 79$ etc. e a sequência é (−1, 3, 7, 17, 39, 79, ...), que não é uma P.A.

EXERCÍCIOS

9 Quais das sequências seguintes representam progressões aritméticas?

a) (21, 25, 29, 33, 37, ...)

b) (0, −7, 7, −14, 14, ...)

c) (−8, 0, 8, 16, 24, 32, ...)

d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, ...\right)$

e) (−30, −36, −41, −45, ...)

f) $\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, ...\right)$

10 Determine a razão de cada uma das progressões aritméticas seguintes, classificando-as em crescente, decrescente ou constante.

a) (38, 35, 32, 29, 26, ...)

b) (−40, −34, −28, −22, −16, ...)

c) $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, ...\right)$

d) (90, 80, 70, 60, 50, ...)

e) $\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, ...\right)$

f) $\left(\sqrt{3} - 2, \sqrt{3} - 1, \sqrt{3}, \sqrt{3} + 1, ...\right)$

11 Dada a P.A. (28, 36, 44, 52, ...), determine seu:

a) oitavo termo;

b) décimo nono termo.

12 Em uma P.A. de razão 9, o 10º termo vale 98.

a) Qual é seu 2º termo?

b) Qual é seu termo geral?

13 Preparando-se para uma competição, um atleta corre sempre 400 metros a mais que a distância percorrida no dia anterior. Sabe-se que no 6º dia ele correu 3,2 km. Qual é a distância percorrida pelo atleta no 2º dia?

14 Faça o que se pede:

a) Escreva a P.A. em que o 4º termo vale 24 e o 9º termo vale 79.

b) Considerando a sequência formada pelos termos de ordem par (2º, 4º, 6º, ...) da P.A. do item *a*, determine seu 20º termo.

15 Escreva a P.A. em que $a_1 + a_3 + a_4 = 0$ e $a_6 = 40$.

16 Qual é a razão da P.A. dada pelo termo geral $a_n = 310 - 8n$, $n \in \mathbb{N}^*$?

17 Sabendo que cada sequência a seguir é uma P.A., determine o valor de **x**.

a) $(3x - 5, 3x + 1, 25)$

b) $(-6 - x, x + 2, 4x)$

c) $(x + 3, x^2, 6x + 1)$

18 Uma empresa de TV por assinatura planejou sua expansão no biênio 2016-2017 estabelecendo a meta de conseguir, a cada mês, 450 contratos a mais que o número de contratos comercializados no mês anterior. Supondo que isso realmente tenha ocorrido e sabendo que no último bimestre de 2016 o número total de contratos fechados foi de 12 000, determine a quantidade de contratos comercializados em:

a) março de 2016;

b) abril de 2017;

c) dezembro de 2017.

19 Considere a sequência dos números naturais que, divididos por 7, deixam resto igual a 4.

a) Qual é o termo geral dessa sequência?

b) Qual é o 50º termo dessa sequência?

20 Com relação à P.A. (131, 138, 145, ..., 565):

a) obtenha seu termo geral;

b) determine seu número de termos.

21 Quantos números ímpares existem entre 72 e 468?

22 Quantos números inteiros **x**, com $23 \leqslant x \leqslant 432$, não são múltiplos de 3?

23 A soma de três números que compõem uma P.A. é 72 e o produto dos termos extremos é 560. Qual é a P.A.? Sugestão: Às vezes, é interessante representar 3 termos desconhecidos de uma P.A. por $x - r$, x, $x + r$, em que **r** é a razão da P.A.

24 Em um triângulo, a medida do maior ângulo interno é 105°. Determine as medidas de seus ângulos internos, sabendo que elas estão em P.A.

25 As medidas dos lados de um triângulo retângulo são numericamente iguais aos termos de uma P.A. de razão 4. Qual é a medida da hipotenusa?

26 Seja $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = -2 + 3x$.

a) Represente o conjunto imagem de **f**.

b) Faça a representação gráfica dessa função.

27 Mostre que a sequência (log 80, log 20, log 5) é uma P.A. Qual é a razão dessa P.A.?

28 Dado um quadrado $\mathbf{Q_1}$ de lado $\ell = 1$ cm, considere a sequência de quadrados $(Q_1, Q_2, Q_3, ...)$, em que o lado de cada quadrado é 2 cm maior que o lado do quadrado anterior.

Determine:

a) o perímetro de $\mathbf{Q_{20}}$;

b) a área de $\mathbf{Q_{31}}$;

c) a diagonal de $\mathbf{Q_{10}}$.

29 Em uma maratona, os organizadores decidiram, devido ao forte calor, colocar mesas de apoio com garrafas de água para os corredores, a cada 800 metros, a partir do quilômetro 5 da prova, onde foi instalada a primeira mesa.

a) Sabendo que a maratona é uma prova com 42,195 km de extensão, determine o número total de mesas de apoio que foram colocadas pela organização da prova.

b) Quantos metros um atleta precisa percorrer da última mesa de apoio até a linha de chegada?

c) Um atleta sentiu-se mal no quilômetro 30 e decidiu abandonar a prova. Ele lembrava que havia pouco tempo que ele cruzara uma mesa de apoio. Qual era a opção mais curta: voltar a essa última mesa ou andar até a próxima?

30 Os números que expressam as medidas do perímetro, diagonal e a área de um quadrado, nesta ordem, podem ser os termos de uma P.A.? Em caso afirmativo, quanto mede o lado desse quadrado?

31 A Copa do Mundo de Futebol é um evento que ocorre de quatro em quatro anos. A 1ª Copa foi realizada em 1930, no Uruguai. De lá para cá, apenas nos anos de 1942 e 1946 a Copa não foi realizada, devido à 2ª Guerra Mundial.

a) A Copa de 2014 foi realizada no Brasil. Qual é a ordem desse evento na sequência de anos em que foi realizada?

b) Considerando que os próximos eventos ocorram seguindo o mesmo padrão e que não existam imprevistos que impeçam a realização desse evento, responda: haverá Copa em 2100? E em 2150?

Professor, alguns exercícios propostos nesta seção requerem que o estudantes recorde conteúdos trabalhados no Ensino Fundamental, tais como a soma dos ângulos internos de um triângulo (exercício 24), o teorema de Pitágoras (exercício 25) e o perímetro, área e medida da diagonal de um quadrado (exercício 28). Aproveite para sondar quais conhecimentos de Geometria os estudantes possuem.

Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

Muitas foram as contribuições do alemão Carl F. Gauss (1777-1855) à ciência e, em particular, à Matemática. Sua incrível vocação para a Matemática se manifestou desde cedo, perto dos dez anos de idade. Conta-se que Gauss surpreendeu seu professor ao responder, em pouquíssimo tempo, o valor da soma $(1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100)$

Que ideia Gauss teria tido?

Provavelmente, ele notou que na P.A. (1, 2, 3, ..., 98, 99, 100) vale a seguinte propriedade:

$$\begin{cases} a_1 + a_{100} = 1 + 100 = 101 \\ a_2 + a_{99} = 2 + 99 = 101 \\ a_3 + a_{98} = 3 + 98 = 101 \\ \vdots \\ a_{50} + a_{51} = 50 + 51 = 101 \end{cases}$$

Assim, Gauss teria agrupado as 100 parcelas da soma em 50 pares de números cuja soma é 101, obtendo como resultado $50 \cdot 101 = 5050$.

Um raciocínio equivalente ao usado por ele consiste em escrever, de "trás para frente", a soma $S = 1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$ (1)

$$S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1 \quad (2)$$

Adicionando (1) e (2), de acordo com o esquema a seguir, temos:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} (1) & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ + \\ (2) & S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & ... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 2 \cdot S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

cem parcelas

Assim, $2 \cdot S = 100 \cdot 101$

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

Observe que 100 corresponde ao número de termos da P.A., e 101 é a soma dos termos extremos dessa P.A. $(a_1 + a_{100} = 1 + 100 = 101)$.

Vamos agora generalizar esse raciocínio para uma P.A. qualquer, mostrando a seguinte propriedade:

> A soma dos **n** primeiros termos da P.A. $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ é dada por:
>
> $$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

De fato, como a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma P.A. de razão **r**, podemos escrevê-la na forma:

$$(a_1, \underbrace{a_1 + r}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3}, ..., \underbrace{a_n - 2r}_{a_{n-2}}, \underbrace{a_n - r}_{a_{n-1}}, a_n)$$

Vamos calcular a soma dos **n** primeiros termos dessa P.A., que indicaremos por $\mathbf{S_n}$. Repetindo o raciocínio anterior, temos:

$$
\begin{array}{rrcl}
① & S_n & = & a_1 + (a_1 + \cancel{r}) + (a_1 + \cancel{2r}) + \dots + (a_n - \cancel{2r}) + (a_n - \cancel{r}) + a_n \\
+ \; ② & S_n & = & a_n + (a_n - \cancel{r}) + (a_n - \cancel{2r}) + \dots + (a_1 + \cancel{2r}) + (a_1 + \cancel{r}) + a_1 \\
\hline
 & 2 \cdot S_n & = & \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{\textbf{n} \text{ parcelas}}
\end{array}
$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

PENSE NISTO:

Note que, em uma P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos extremos.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$

Soma dos termos extremos: $a_1 + a_n$

a_2 e a_{n-1} equidistam dos termos extremos:
$a_2 + a_{n-1} = a_1 + \cancel{r} + a_n - \cancel{r} = a_1 + a_n$
a_3 e a_{n-2} equidistam dos termos extremos:
$a_3 + a_{n-2} = a_1 + \cancel{2r} + a_n - \cancel{2r} = a_1 + a_n$
$\vdots$

EXEMPLO 3

Considerando a atividade desenvolvida na seção *Troque ideias* na página 174, vamos determinar a quantidade total de palitos usada para se construir as 20 primeiras figuras:

1ª figura

2ª figura

3ª figura

Temos a P.A. (4, 7, 10, 13, ...). Seu 20º termo é $a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = 4 + 19 \cdot 3 = 61$

Assim, é preciso determinar $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(4 + 61) \cdot 20}{2} = 650$

Precisamos, então, de 650 palitos.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

7 Qual é o valor de $(-61) + (-54) + (-47) + \dots + 296 + 303$?

Solução:

A sequência (−61, −54, −47,..., 296, 303) é uma P.A. de razão 7, da qual conhecemos seu primeiro termo, $a_1 = -61$, e seu último termo, que é $a_n = 303$.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 303 = -61 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow n = 53$$

Assim, a P.A. possui 53 termos. Daí, a soma pedida é:

$$\frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(-61 + 303) \cdot 53}{2} = 6\,413$$

8 Em relação à sequência dos números naturais ímpares, calcule:

a) a soma dos 50 primeiros termos;

b) a soma dos **n** primeiros termos.

Solução:

A sequência é (1, 3, 5, 7, ...), com r = 2.

a) $a_{50} = a_1 + 49r \Rightarrow a_{50} = 1 + 49 \cdot 2 \Rightarrow a_{50} = 99$

Assim:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{(1 + 99) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = 2\,500$$

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = -1 + 2n$
Daí:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 - 1 + 2n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_n = n^2$$

Podemos verificar a resposta encontrada no item *b* atribuindo valores para **n** ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$):

- $n = 1$: a sequência é (1), e a soma é $S_1 = 1 = 1^2$
- $n = 2$: a sequência é (1, 3), e a soma é $S_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$
- $n = 3$: a sequência é (1, 3, 5), e a soma é $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
- $n = 4$: a sequência é (1, 3, 5, 7), e a soma é $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

EXERCÍCIOS

32 Calcule a soma dos quinze primeiros termos da P.A. (−45, −41, −37, −33, ...).

33 Calcule a soma dos vinte primeiros termos da P.A. (0,15; 0,40; 0,65; 0,9; ...).

34 Para a compra de uma TV pode-se optar por um dos planos seguintes:

- plano alfa: entrada de R$ 400,00 e mais 13 prestações mensais crescentes, sendo a primeira de R$ 35,00, a segunda de R$ 50,00, a terceira de R$ 65,00 e assim por diante;
- plano beta: 15 prestações mensais iguais de R$ 130,00 cada uma.

a) Em qual dos planos o desembolso total é maior?
b) Qual deveria ser o valor da entrada do plano alfa para que, mantidas as demais condições, os desembolsos totais fossem iguais?

35 Suponha que, em certo mês (com 30 dias), o número de queixas diárias registradas em um órgão de defesa do consumidor aumente segundo uma P.A.
Sabendo que nos dez primeiros dias houve 245 reclamações, e nos dez dias seguintes houve mais 745 reclamações, represente a sequência do número de queixas naquele mês.

36 A soma dos **n** primeiros termos de uma P.A. é dada por $S_n = 18n - 3n^2$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$. Determine:
a) o 1º termo da P.A. **b)** a razão da P.A. **c)** o 10º termo da P.A.

37 Uma criança organizou suas 1 378 figurinhas, colocando 3 na primeira fileira, 7 na segunda fileira, 11 na terceira fileira, 15 na quarta e assim por diante, até esgotá-las. Quantas fileiras a criança conseguiu formar?

38 Utilizando-se um fio de comprimento **L** é possível construir uma sequência de 16 quadrados em que a medida do lado de cada quadrado, a partir do segundo, é 2 cm maior que a medida do lado do quadrado anterior. Sabendo que para a construção do sétimo quadrado são necessários 68 cm, determine o valor de **L**.

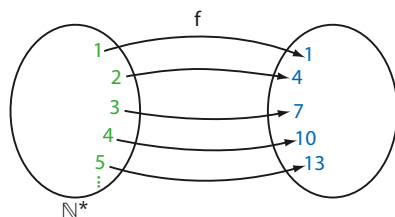
39 No esquema seguinte, os números naturais não nulos aparecem dispostos em blocos de três linhas e três colunas, conforme indicado abaixo: $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, $\mathbf{B_3}$, ...

	B_1	B_2	B_3	B_4	
1ª linha →	1 2 3	10 11 12	19 20 21	28 29 30	...
2ª linha →	4 5 6	13 14 15	22 23 24	31 32 33	...
3ª linha →	7 8 9	16 17 18	25 26 27	34 35 36	...
	↙ ↓ ↘ 1ª coluna 2ª coluna 3ª coluna				

a) Em que linha e coluna encontra-se o elemento 787? A qual bloco ele pertence?
b) Determine o elemento que está na 3ª linha e 1ª coluna do bloco $\mathbf{B_{100}}$.
c) Determine o elemento que está na 2ª linha e 3ª coluna do bloco $\mathbf{B_{500}}$.
d) Qual é a soma de todos os elementos que se encontram na 2ª linha e 2ª coluna dos 500 primeiros blocos?
e) Qual é a soma de todos os elementos escritos nos 200 primeiros blocos?

Progressão aritmética e função afim

Vamos estabelecer uma importante conexão entre P.A. e função afim.

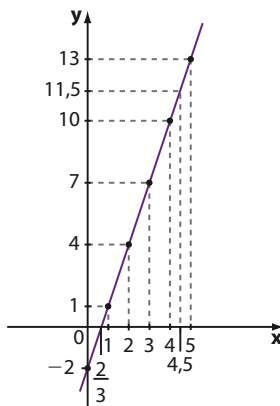
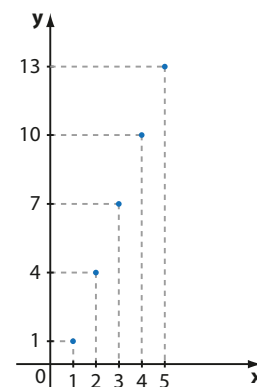
Já vimos que a P.A. (1, 4, 7, 10, 13, 16, ...) é uma função **f** de domínio em ℕ*, como mostra o diagrama abaixo:

No gráfico ao lado, podemos observar parte do conjunto dos pontos que representam **f**.

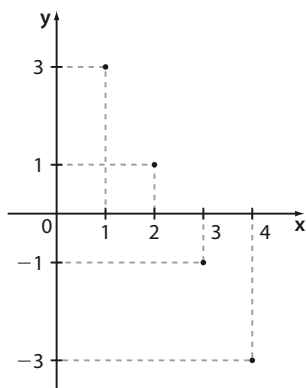
Lembre que, embora os pontos estejam alinhados, não traçamos uma reta, pois **f** está definida apenas para valores naturais positivos.

O termo geral dessa P.A. é:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = -2 + 3n$$

Podemos, desse modo, associar **f** à função dada por $y = -2 + 3x$, restrita aos valores naturais não nulos que a variável **x** assume.

Observe abaixo o gráfico da função afim dada por $y = -2 + 3x$, com domínio ℝ, e compare com o gráfico ao lado:

EXERCÍCIO

40 Seja f: ℕ* → ℝ a função cujo gráfico está abaixo representado.

a) Determine a lei de **f**.

b) Qual é a progressão aritmética associada à função **f**? Obtenha seu termo geral.

Progressões geométricas

A propagação de uma notícia

Você já imaginou a velocidade com que uma notícia, corrente, foto, vídeo ou boato podem ser multiplicados pelas redes sociais?

Suponha que, em certo dia, dois amigos criaram um blogue sobre saúde e bem-estar, com dicas, receitas de comidas saudáveis, relatos de experiências pessoais etc.

No dia seguinte, cada um desses amigos convidou três novos amigos para visitar o blogue. Cada um desses três novos amigos convidou, no outro dia, três outros amigos para visitar o blogue e assim sucessivamente.

Faça o que se pede a seguir.

Suponha que esse padrão seja mantido e que ninguém seja convidado a visitar o blogue por mais de um amigo. Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Começando pelo dia em que o blogue foi criado, escreva a sequência que representa o número diário de visitantes do blogue.

b) Responda: qual é a regularidade que você observa nessa sequência?

c) Obtenha um termo geral dessa sequência.

d) Responda: em quantos dias (considere o dia 1 o dia da criação do blogue) o número de visitas diárias ao blogue terá superado 1 milhão? Use uma calculadora.

Progressão geométrica (P.G.) é a sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante real. Essa constante é chamada **razão da P.G.** e é indicada por **q**.

EXEMPLO 4

a) $(4, 12, 36, 108, ...)$ é uma P.G. de razão $q = 3$.

b) $(-3, -15, -75, -375, ...)$ é uma P.G. de razão $q = 5$.

c) $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{2}$.

d) $(2, -8, 32, -128, 512, ...)$ é uma P.G. de razão $q = -4$.

e) $(-1\,000, -100, -10, -1, ...)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

f) $(-4, -4, -4, -4, ...)$ é uma P.G. de razão $q = 1$.

g) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, ...\right)$ é uma P.G. de razão $q = -1$.

h) $(\sqrt{3}, 0, 0, 0, ...)$ é uma P.G. de razão $q = 0$.

PENSE NISTO:

Por que dizemos que a razão da P.G. (0, 0, 0, ...) é indeterminada?

Como $0 \cdot a = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, a razão da P.G. (0, 0, 0,...) é indeterminada, isto é, qualquer número real pode ser a razão.

OBSERVAÇÃO

Nos itens do exemplo anterior, é possível notar que, se a P.G. não possui termos nulos, sua razão corresponde ao quociente entre um termo qualquer (a partir do segundo) e o termo antecedente, isto é:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_{p+1}}{a_p}$$

Classificação

Há cinco categorias de P.G. Vejamos quais são, retomando os itens do exemplo 4.

1. **Crescente:** cada termo é maior que o termo antecedente. Isso ocorre quando:
   - $a_1 > 0$ e $q > 0$, como no item *a*; ou
   - $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, como no item *e*.
2. **Decrescente:** cada termo é menor que o termo antecedente. Isso ocorre quando:
   - $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, como no item *c*; ou
   - $a_1 < 0$ e $q > 1$, como no item *b*.
3. **Constante:** cada termo é igual ao termo antecedente. Isso ocorre quando:
   - $q = 1$, como no item *f*; ou
   - $a_1 = 0$ e **q** é qualquer número real, como em (0, 0, 0, ...).
4. **Alternada ou oscilante:** os termos são alternadamente positivos e negativos. Isso ocorre quando $q < 0$, como nos itens *d* e *g*.
5. **Estacionária:** é uma P.G. constante a partir do segundo termo. Isso ocorre quando $a_1 \neq 0$ e $q = 0$, como no item *h*.

PENSE NISTO:

Como podemos definir uma P.G. cujo primeiro termo é $\mathbf{a_1}$ e a razão é **q**, usando uma lei de recorrência?

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{R} \text{ (conhecido)} \\ a_n = a_{n-1} \cdot q; \ n \in \mathbb{N} \text{ com } n \geq 2 \end{cases}$$

Termo geral da P.G.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.G. conhecendo apenas o 1º termo ($\mathbf{a_1}$) e a razão (**q**).

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma P.G.

De acordo com a definição de P.G., podemos escrever:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$a_5 = a_4 \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

De modo geral, o termo $\mathbf{a_n}$, que ocupa a n-ésima posição na sequência, é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Essa expressão, conhecida como **fórmula do termo geral da P.G.**, permite-nos conhecer qualquer termo da P.G. em função do 1º termo ($\mathbf{a_1}$) e da razão (**q**).

Assim, temos:

- $a_6 = a_1 \cdot q^5$
- $a_{11} = a_1 \cdot q^{10}$
- $a_{29} = a_1 \cdot q^{28}$

e assim por diante.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

9 Determine o 10º termo da P.G. $\left(\frac{1}{3}, 1, 3, 9, ...\right)$.

Solução:

Sabemos que $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = 3$.

Assim, pela expressão do termo geral, podemos escrever:

$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{3} \cdot 3^9 = 3^8 = 6\,561$

10 Em uma P.G., o quarto e o sétimo termos são, respectivamente, 32 e 2 048. Qual é seu primeiro termo?

Solução:

Temos: $\begin{cases} a_4 = 32 \\ a_7 = 2\,048 \end{cases}$

Usando a expressão do termo geral, podemos escrever: $\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 32 & (1) \\ a_1 \cdot q^6 = 2\,048 & (2) \end{cases}$

Dividindo, membro a membro, (1) por (2), obtemos:

$\frac{\cancel{a_1} \cdot q^3}{\cancel{a_1} \cdot q^6} = \frac{32}{2\,048} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{64} \Rightarrow q^3 = 64 \Rightarrow q = 4$

Substituindo em (1), segue que:

$$a_1 \cdot 4^3 = 32 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

PENSE NISTO:

Como podemos expressar o 7º termo de uma P.G. em função do 4º termo e da razão?

$a_7 = a_4 \cdot q^3$; observe: $(_, _, _, a_4, _, _, a_7)$
$a_4 \cdot q = a_5$
$a_4 \cdot q^2 = a_6$
$a_4 \cdot q^3 = a_7$

11 Determine $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ a fim de que a sequência $(5x + 1, x + 1, x - 2)$ seja uma P.G.

Solução:

$\frac{x + 1}{5x + 1} = \frac{x - 2}{x + 1} \Rightarrow (x + 1)^2 = (x - 2) \cdot (5x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^2 - 11x - 3 = 0$

As raízes dessa equação são $x_1 = 3$ ou $x_2 = -\frac{1}{4}$.

Verificando, para $x = 3$, a P.G. é $(16, 4, 1)$ e, para $x = -\frac{1}{4}$, a P.G. é $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{4}\right)$.

12 Em uma P.A. não constante, o 1º termo é 10; sabe-se que o 3º, o 5º e o 8º termos dessa P.A. são, sucessivamente, os três primeiros termos de uma P.G. Quais são os termos dessa P.G.?

Solução:

Usando a fórmula do termo geral da P.A., em que $a_1 = 10$, temos:

$a_3 = 10 + 2r$; $a_5 = 10 + 4r$ e $a_8 = 10 + 7r$

Da hipótese, (a_3, a_5, a_8) é P.G., isto é, $(10 + 2r, 10 + 4r, 10 + 7r)$ é P.G.

Devemos ter:

$\frac{10 + 4r}{10 + 2r} = \frac{10 + 7r}{10 + 4r} \Rightarrow$

$\Rightarrow (10 + 4r)^2 = (10 + 7r) \cdot (10 + 2r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{100} + 80r + 16r^2 = \cancel{100} + 90r + 14r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^2 - 10r = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 0 \text{ (não convém, pois a P.A. é não constante)} \\ \text{ou} \\ r = 5 \end{cases}$

Os três primeiros termos da P.G. são: $10 + 2 \cdot 5$, $10 + 4 \cdot 5$, $10 + 7 \cdot 5$. Então, a P.G. é (20, 30, 45, ...). Observe que a razão dessa P.G. é 1,5.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

41 Identifique as sequências que representam progressões geométricas:

a) (3, 12, 48, 192, ...)
b) (−3, 6, −12, 24, −48, ...)
c) (5, 15, 75, 375, ...)
d) $(\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, ...)$
e) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, -\frac{1}{24}, ...\right)$
f) $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, ...)$

42 Calcule a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) (1, 2, 4, 8, 16, ...)
b) $(10^{40}, 10^{42}, 10^{44}, 10^{46}, ...)$
c) (−2, 6, −18, 54, ...)
d) (5, −5, 5, −5, 5, ...)
e) (80, 40, 20, 10, 5, ...)
f) $(10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, ...)$

43 Qual é o 8º termo da P.G. $(-1, 4, -16, 64, ...)$?

44 Qual é o 6º termo da P.G. $(-240, -120, -60, ...)$?

45 Em uma P.G. crescente, o 3º termo vale -80, e o 7º termo, -5. Qual é seu 1º termo?

46 O número de consultas a um *site* de comércio eletrônico aumenta semanalmente (desde a data em que o portal ficou acessível), segundo uma P.G. de razão 3. Sabendo que na 6ª semana foram registradas 1 458 visitas, determine o número de visitas ao *site* registrado na 3ª semana.

47 Em uma colônia de bactérias, o número de elementos dobra a cada hora. Sabendo que, na 5ª hora de observação, o número de bactérias era igual a 4^{19}, determine:

a) o número de bactérias na colônia na 1ª hora de observação;

b) o número de bactérias esperado para a 10ª hora de observação.

48 Em uma reunião de condomínio, os moradores analisaram os valores das taxas mensais de obras cobradas em alguns meses de 2016:

março: R$ 120,00 — maio: R$ 172,80

abril: R$ 144,00 — junho: R$ 207,36

Um dos moradores percebeu que havia uma regularidade nesses valores.

a) Classifique a sequência de valores cobrados, determinando sua razão.

b) Sabe-se que o padrão na cobrança teve início em janeiro de 2016 e se estendeu até janeiro de 2017. Determine a diferença entre os valores cobrados em janeiro desses 2 anos, arredondando, em todos os cálculos para valores inteiros. Use $1{,}2^{12} \simeq 8{,}9$.

49 Em cada item a seguir, a sequência é uma P.G. Determine o valor de **x**:

a) $(4, x, 9)$

b) $(x^2 - 4, 2x + 4, 6)$

c) $(-2, x + 1, -4x + 2)$

d) $\left(\frac{1}{2}, \log_{0,25} x, 8\right)$

50 As idades da senhora Beatriz, de sua filha e de sua neta formam, nessa ordem, uma P.G. de razão $\frac{2}{3}$. Determine as três idades, sabendo que a neta tem cinquenta anos a menos que a avó.

51 Subtraindo-se um mesmo número de cada um dos termos da sequência (2, 5, 6), ela se transforma em uma P.G.

a) Que número é esse?

b) Qual é a razão da P.G.?

52 Uma dívida deverá ser paga em sete parcelas, de modo que elas constituam termos de uma P.G. Sabe-se que os valores da 3ª e 6ª parcelas são, respectivamente, R$ 144,00 e R$ 486,00. Determine:

a) o valor da 1ª parcela;

b) o valor da última parcela.

53 Para cada P.G. seguinte, encontre o número de termos:

a) $(2^{31}, 2^{35}, 2^{39}, ..., 2^{111})$

b) $\left(-\frac{1}{120}, \frac{1}{60}, -\frac{1}{30}, ..., \frac{64}{15}\right)$

54 Os números que expressam as medidas do lado, o perímetro e a área de um quadrado podem estar, nessa ordem, em P.G.? Em caso afirmativo, qual deve ser a medida do lado do quadrado?

55 Em uma P.G. de 3 termos positivos, o produto dos termos extremos vale 625, e a soma dos dois últimos termos é igual a 30. Qual é o 1º termo?

56 Escreva três números em P.G. cujo produto seja 216 e a soma dos dois primeiros termos seja 9.

57 A sequência $(13, 4x + 1, 21)$ é uma P.A. e a sequência $\left(\frac{x}{8}, y, 32\right)$ é uma P.G. Quais são os valores de **x** e **y**?

58 A sequência $(8, 2, a, b, ...)$ é uma P.G. e a sequência $\left(b, \frac{3}{16}, c, ...\right)$ é uma P.A.

a) Qual é o valor de **c**?

b) O número **a** pertence à P.A.? Em caso afirmativo, qual é a sua posição nessa sequência?

59 Sejam **f** e **g** duas funções definidas de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{N}^*$ dadas pelos termos gerais $a_n = 3n + 4$ e $b_n = 2^{a_n}$, respectivamente. Verifique se **f** é uma P.A. e **g** é uma P.G., e, em caso afirmativo, determine suas respectivas razões.

60 Em uma P.A. crescente, cujo primeiro termo vale 2, o 2º, o 5º e o 14º termos formam, nessa ordem, uma P.G. Obtenha a razão dessa P.G.

61 Qual é a condição sobre os números reais **a**, **b** e **c** de modo que a sequência (a, b, c) seja, simultaneamente, uma P.A. e uma P.G.?

Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Seja $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ uma P.G.

Queremos encontrar uma expressão para a soma de seus **n** primeiros termos, a saber:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \quad (1)$$

Multiplicando por **q** (com $q \neq 0$) os dois membros da igualdade anterior e lembrando a formação dos elementos de uma P.G., segue que:

$$q \cdot S_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n) =$$
$$= \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_2 \cdot q}_{a_3} + \underbrace{a_3 \cdot q}_{a_4} + ... + \underbrace{a_{n-1} \cdot q}_{a_n} + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n \cdot q \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2) obtemos:

$$q \cdot S_n - S_n = (\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + ... + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n \cdot q) - (a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + ... + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n})$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1, \text{ isto é,}$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^n - a_1 \xrightarrow{q \neq 1} S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Observe que, se $q = 1$, a fórmula deduzida não pode ser aplicada, pois anula o denominador. Nesse caso, todos os termos da P.G. são iguais e, para calcular a soma de seus **n** primeiros termos, basta fazer:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \underbrace{a_1 + a_1 + ... + a_1}_{\textbf{n} \text{ parcelas}} \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

PENSE NISTO:

Considerando a situação descrita na seção *Troque ideias* da página 182, determine o número total de visitantes do blogue nos dez primeiros dias. Considere como dia 1 o dia da criação do blogue, de modo que a P.G. que representa o número diário de visitantes é: (2, 6, 18, 54, ...).

É preciso calcular a soma de seus dez primeiros termos:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1}$$

$$S_{10} = \frac{2 \cdot (3^{10} - 1)}{3 - 1} = 3^{10} - 1 = 59048$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

13 Um indivíduo pediu a um amigo um empréstimo e combinou de pagá-lo em oito prestações, sendo a primeira de R$ 60,00, a segunda de R$ 90,00, a terceira de R$ 135,00, e assim por diante, mantendo o mesmo padrão.

Qual é o valor total a ser pago?

Solução:

A sequência de valores das prestações (60; 90; 135; 202,50; ...) é uma P.G. de razão $q = \frac{90}{60} = 1,5$.

O valor total a ser pago corresponde à soma dos oito primeiros termos dessa P.G., a saber:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{60 \cdot (1,5^8 - 1)}{1,5 - 1}$$

Com uma calculadora, obtemos o valor aproximado de $1,5^8 \simeq 25,63$ e $S_8 = \frac{60 \cdot 24,63}{0,5} = 2955,6$.

O valor total pago é R$ 2955,60.

EXERCÍCIOS

62 Calcule a soma dos seis primeiros termos da P.G. (−2, 4, −8, ...).

63 Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. (320, 160, 80, ...).

64 A tabela seguinte informa a projeção do número de livros vendidos em uma livraria nos primeiros anos de atividade:

Ano	Número de livros
1	50 000
2	60 000
3	72 000
4	86 400

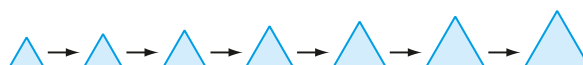
Se for mantido esse padrão, qual será o total de livros vendidos nessa livraria nos seus dez primeiros anos de atividade? Considere $1{,}2^5 \simeq 2{,}5$.

65 No financiamento de uma moto, ficou combinado que o proprietário faria o pagamento em vinte prestações mensais que formam uma P.G. de razão 1,02.
Sabendo que o valor da quarta prestação era de R$ 318,00, determine o valor total pago pela moto.
Considere: $1{,}02^3 \simeq 1{,}06$ e $1{,}02^{20} \simeq 1{,}5$.

66 Seja a sequência definida pelo termo geral $a_n = \frac{3^n}{6}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calcule a soma de seus três primeiros termos.

b) Quantos termos devemos somar na sequência, a partir do primeiro, a fim de obter soma igual a 14 762?

67 Na sequência abaixo, todos os triângulos são equiláteros e o perímetro de determinado triângulo, a partir do 2º, é $\frac{5}{4}$ do perímetro do triângulo anterior:

Sabendo que o lado do 2º triângulo mede 1 m, determine:

a) a medida do perímetro do 1º triângulo;

b) a medida do lado do 4º triângulo;

c) o número inteiro mínimo de metros necessários para a construção da sequência acima. Considere $1{,}25^7 \simeq 4{,}8$.

68 Certo dia, em uma pequena cidade, 5 pessoas ficam sabendo que um casal do colégio começou a namorar. No dia seguinte, cada uma delas contou essa notícia para outras duas pessoas. Cada uma dessas pessoas repassou, no dia seguinte, essa notícia para outras duas pessoas e assim sucessivamente. Passados oito dias, quantas pessoas já estarão sabendo da notícia? Admita que ninguém fique sabendo da notícia por mais de uma pessoa.

Soma dos termos de uma P.G. infinita

Seja (a_n) uma sequência dada pelo termo geral: $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos atribuir valores para **n** ($n = 1, 2, 3, ...$) para caracterizar essa sequência:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$n = 10 \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{10^{10}} = 0{,}0000000001$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Trata-se da P.G. (0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; ...) de razão $q = \frac{1}{10}$. É fácil perceber que, à medida que o valor do expoente **n** aumenta, o valor do termo a_n fica cada vez mais próximo de zero.

Dizemos, então, que o limite de $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, quando **n** tende ao infinito (isto é, quando **n** se torna "arbitrariamente grande"), vale zero e representamos esse fato da seguinte maneira: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0 \left(\text{ou } \lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0\right)$.

Faça as contas com algumas outras sequências desse tipo, como, por exemplo, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ou $c_n = 0{,}75^n$, e verifique se chega à mesma conclusão. Use uma calculadora.

PENSE NISTO:

Por que essa propriedade não vale para sequências do tipo $a_n = 2^n$ ou $b_n = 10^n$ ou $c_n = -(4^n)$?

Considere a sequência dada por $a_n = 2^n$, $n \geq 1$. Atribuindo-se valores para **n** obtemos: ($2, 2^2, 2^3, 2^4, ...$). Quando **n** tende ao infinito, 2^n é um número arbitrariamente grande de modo que $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n = \infty$.

O mesmo raciocínio se aplica às demais sequências.

De modo geral, pode-se mostrar que, se $q \in \mathbb{R}$, com $|q| < 1$, isto é, $-1 < q < 1$, então $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Nosso objetivo é calcular a soma dos infinitos termos de uma P.G. cuja razão **q** é tal que $-1 < q < 1$.

Para isso, precisamos analisar o que ocorre com a soma de seus **n** primeiros termos quando **n** tende ao infinito, isto é, quando **n** se torna "arbitrariamente grande". Temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}\right), \text{ com } -1 < q < 1$$

Levando em conta as considerações anteriores, temos que:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

Assim, segue que:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Na P.G. ($a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$) de razão **q**, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Dizemos, então, que a soma dos termos da P.G. infinita é igual a $\frac{a_1}{1 - q}$.

EXEMPLO 5

Vamos calcular a soma dos termos da P.G. infinita $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$.

Inicialmente, note que $q = \frac{1}{2}$ e $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Assim: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

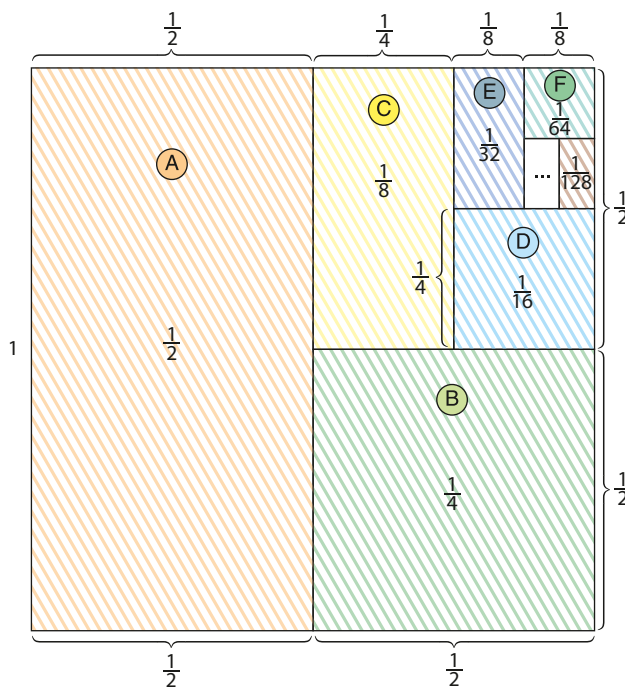
Podemos interpretar geometricamente esse fato.

Vamos considerar o seguinte experimento:

Seja um quadrado de lado unitário. Vamos dividi-lo em duas partes iguais, hachurar uma delas e, na outra, repetir o procedimento, isto é, dividir essa parte em duas partes iguais, hachurando uma delas e dividindo a outra em duas partes iguais.

Vamos continuar, em cada etapa, dividindo a parte não hachurada em duas até que não seja mais possível fazê-lo, devido ao tamanho reduzido da parte. A operação pode ser repetida indefinidamente usando, por exemplo, um programa computacional.

A figura ao lado ilustra esse procedimento.

A soma das áreas dos "infinitos" retângulos assim construídos deve ser igual à área do quadrado original, isto é:

$$\underbrace{1 \cdot \frac{1}{2}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{B} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}_{C} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}_{D} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}}_{E} + \underbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}}_{F} + \dots = 1$$

ou, melhor:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Professor, note que o exercício resolvido 14 apresenta outra estratégia pra transformar dízimas periódicas em frações, apresentada pela primeira vez nesta coleção no capítulo 2 deste volume, na página 25.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

14 Obtenha a fração geratriz da dízima 0,2222...

Solução:

Seja $x = 0{,}2222\dots$. Podemos escrever **x** na forma:

$$x = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + \dots$$

Observe que **x** representa a soma dos termos de uma P.G. infinita, cujo 1º termo é $a_1 = 0{,}2$ e a razão é $q = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1$.

Assim: $x = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0{,}2}{1 - 0{,}1} \Rightarrow x = \frac{2}{9}$

15 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{64} + ... = \frac{4}{3}$

Solução:

O 1º membro da equação representa a soma dos termos da P.G. infinita $\left(x, -\frac{x^2}{4}, \frac{x^3}{16}, -\frac{x^4}{64}, ...\right)$, cujo valor é:

$$\frac{a_1}{1 - q} = \frac{x}{1 - \left(-\frac{x}{4}\right)}$$

Daí:

$$\frac{x}{1 + \frac{x}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x = 4 + x \Rightarrow x = 2$$

Note que, para $x = 2$, temos $q = -\frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$ e $-1 < q < 1$.

EXERCÍCIOS

69 Determine o valor de:

a) $20 + 10 + 5 + 2{,}5 + ...$

b) $90 + 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + ...$

c) $10^{-3} + 10^{-4} + 10^{-5} + ...$

d) $-25 - 5 - 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - ...$

e) $9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - ...$

70 Seja a sequência $(\mathbf{a}_n)$ dada pelo termo geral $a_n = \frac{9}{2 \cdot 3^n}$, em que $n \in \mathbb{N}^*$.

Qual é o valor de $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + ...$?

71 Encontre a fração geratriz de cada uma das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,444...

b) 1,777...

c) $0{,}\overline{27}$

d) $2{,}3\overline{6}$

72 Considere uma sequência infinita de quadrados (Q_1, Q_2, Q_3, ...), em que, a partir de $\mathbf{Q}_2$, a medida do lado de cada quadrado é a décima parte da medida do lado do quadrado anterior. Sabendo que o lado de $\mathbf{Q}_1$ mede 10 cm, determine:

a) a soma dos perímetros de todos os quadrados da sequência;

b) a soma das áreas de todos os quadrados da sequência.

73 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + ... = \frac{1}{3}$

b) $(1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + ... = 3$

c) $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{64} + ... = \frac{4}{3}$

d) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + ... = 0{,}25$

74 Seja um triângulo equilátero de lado 12 cm. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se outro triângulo equilátero no centro da figura. Unindo-se os pontos médios dos lados desse último triângulo, constrói-se outro triângulo no centro da figura, e assim indefinidamente.

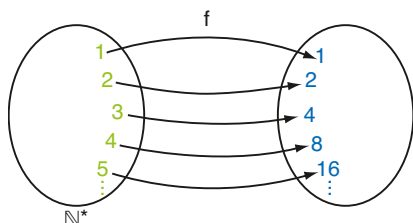
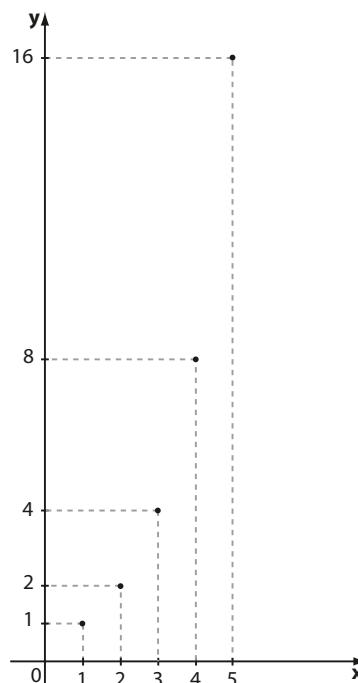
a) Qual é a soma dos perímetros de todos os triângulos assim construídos?

b) Qual é a soma das áreas de todos os triângulos assim construídos?

75 Uma bola é atirada ao chão de uma altura de 200 cm. Ao atingir o solo pela primeira vez, ela sobe até uma altura de 100 cm, cai e atinge o solo pela segunda vez, subindo até uma altura de 50 cm, e assim por diante subindo sempre metade da altura anterior, até perder energia e cessar o movimento. Quantos metros a bola percorre ao todo?

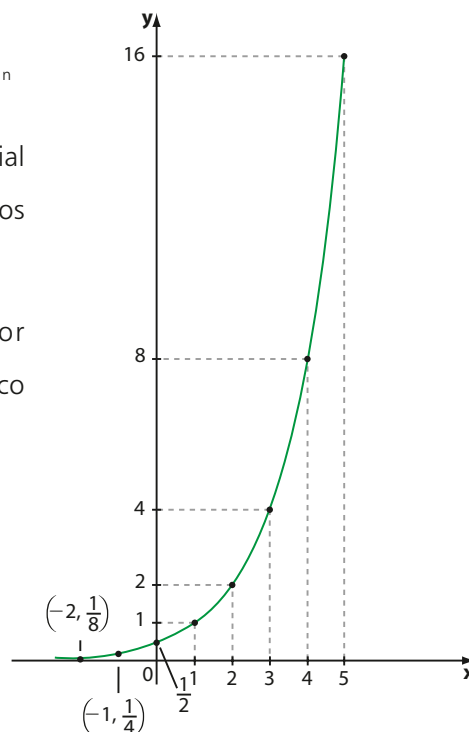
Progressão geométrica e função exponencial

Vamos estabelecer uma interessante conexão entre a P.G. e a função exponencial.

Seja a P.G. (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...); já vimos que essa sequência é uma função **f** com domínio em ℕ*, como mostra o diagrama abaixo.

A representação gráfica de **f** é dada ao lado:

O termo geral dessa P.G. é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{2^1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^n$$

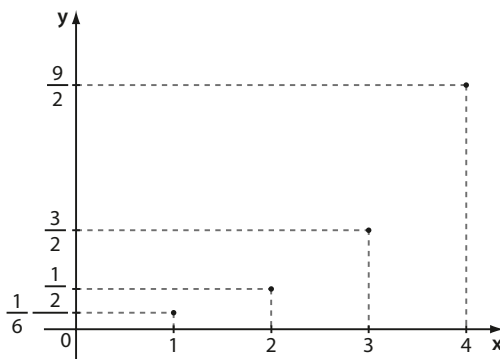
Desse modo, podemos associar **f** à função exponencial dada por $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, restrita aos valores naturais não nulos que a variável **x** assume.

Veja o gráfico da função exponencial dada por $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$, com domínio em ℝ, e compare com o gráfico anterior.

EXERCÍCIOS

76 Seja f: $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 4 \cdot (0,5)^x$.

a) Represente o conjunto imagem de **f**.

b) Esboce o gráfico de **f**.

77 O gráfico abaixo representa a função **f**, de domínio $\mathbb{N}^*$, definida por $y = \frac{1}{6} \cdot 3^{x+k}$, sendo **k** uma constante real.

a) Determine o valor de **k**.

b) Qual é a progressão geométrica associada à função **f**? Obtenha seu termo geral e sua razão.

DESAFIO

Em um congresso havia 600 profissionais da área de saúde. Suponha que, na cerimônia de encerramento, todos os participantes resolveram cumprimentar-se (uma única vez), com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram dados ao todo?

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

A sequência de Fibonacci

Uma sequência muito conhecida na Matemática é a sequência de Fibonacci, nome pelo qual ficou conhecido o italiano Leonardo de Pisa (c. 1180-1250). Em 1202, Fibonacci apresentou em seu livro *Liber Abaci* o problema que o consagrou.

Fibonacci considerou, no período de um ano, um cenário hipotético para a reprodução de coelhos. Veja:

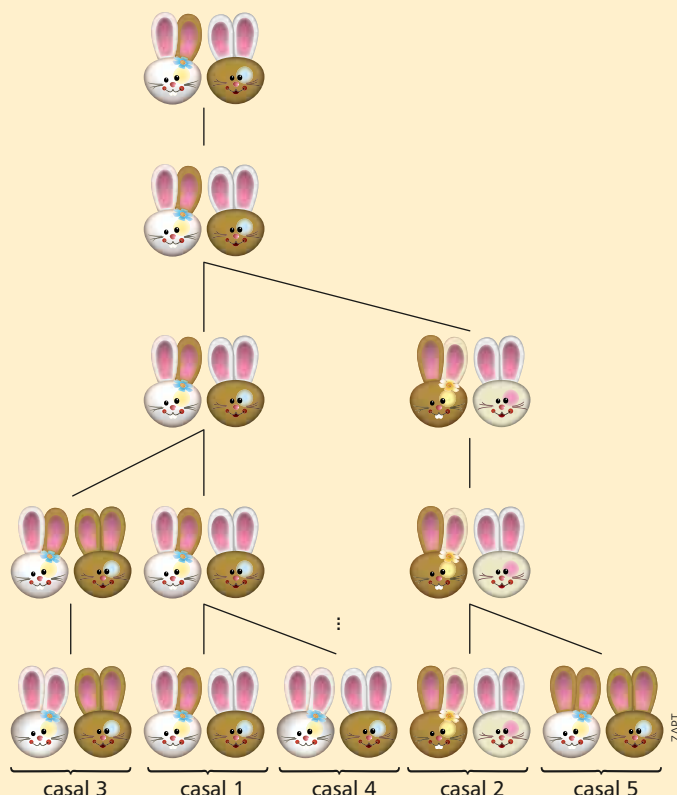
- No início, há apenas um casal que acabou de nascer.
- Os casais atingem a maturidade sexual e se reproduzem ao final de um mês.
- Um mês é o período de gestação dos coelhos.
- Todos os meses, cada casal maduro dá à luz um novo casal.
- Os coelhos nunca morrem.

STEFANO BIANCHETTI/CORBIS/LATINSTOCK/COLEÇÃO PARTICULAR

Retrato de Leonardo Fibonacci. Gravura de Pelle, sem data.

Acompanhe, a seguir, a quantidade de pares de coelhos, ao final de cada mês:

- Início: um único casal.
- Ao final de um mês, o casal acasala. Continuamos com um par.
- Ao final de dois meses, a fêmea dá à luz um novo par. Agora são dois pares.
- Ao final de três meses o "primeiro casal" dá à luz outro par, e o "segundo" casal acasala. São 3 pares.
- Ao final de quatro meses, o "primeiro" casal dá à luz outro par; o "segundo casal" dá à luz pela primeira vez e o terceiro par acasala. São 5 pares.

⋮

e assim por diante...

A sequência de pares de coelhos existentes, ao final de cada mês, evolui segundo os termos da sequência:

(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)

Note que, a partir do terceiro, cada termo dessa sequência é igual à soma dos dois termos anteriores. Assim, essa sequência pode ser definida pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3 \end{cases}$$

Mais de quinhentos anos mais tarde, o escocês Robert Simson provou a seguinte propriedade dessa sequência: à medida que consideramos cada vez mais termos, o quociente entre um termo qualquer e o termo antecedente aproxima-se de 1,61803398..., que é o número de ouro, apresentado no capítulo 2.

Vejamos alguns exemplos:

$$\frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} \simeq 1{,}6176; \quad \frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} \simeq 1{,}61806; \quad \frac{f_{20}}{f_{19}} = \frac{6\,765}{4\,181} \simeq 1{,}6180$$

Outros estudos mostram uma ligação entre os números de Fibonacci e a natureza, como a quantidade de arranjos das folhas de algumas plantas em torno do caule, a organização das sementes na coroa de um girassol etc.

Fontes de pesquisa:

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.; *Eu acho que vi um coelhinho*. Unicamp – M3. Disponível em:<m3.ime.unicamp.br/recursos/1044>. Acesso em: 7 mar. 2016.; *O número de ouro e a sequência de Fibonacci*. Disponível em: <www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-fibonacci-br.html>. Acesso: 7 mar. 2016.

Semelhança e triângulos retângulos

Semelhança

Cada uma das figuras apresenta, em escalas diferentes, um mapa contendo o nome de algumas capitais brasileiras.

figura A

Brasil: algumas capitais

figura B

Brasil: algumas capitais

Fonte: *Atlas geográfico escolar.* 6ª ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 90.

Vamos relacionar elementos da figura **A** com seus correspondentes da figura **B** e apresentar alguns conceitos importantes.

- Medindo a distância entre duas cidades quaisquer na figura **A** e a correspondente distância na figura **B**, observamos que a primeira mede o dobro da segunda.
- Ao medir um ângulo qualquer em uma das figuras e seu correspondente na outra, obteremos a mesma medida.

Por exemplo, ao medir a distância entre Belo Horizonte e Fortaleza na figura **A**, obtemos $d_1 = 46$ mm. Na figura **B**, a distância que separa essas duas capitais é $d'_1 = 23$ mm.

Entre o Rio de Janeiro e Salvador, temos, em **A**, $d_2 = 30$ mm e, em **B**, $d'_2 = 15$ mm.

Generalizando, para essas duas figuras, temos: $d_i = 2d'_i$.

Isso nos garante que existe uma constante de proporcionalidade, **k**, entre as medidas dos comprimentos na figura **A** e seus correspondentes comprimentos na figura **B**; no caso, $k = \frac{d_i}{d'_i} = 2$. Essa constante chama-se **razão de semelhança**.

Vamos estudar agora a parte angular: tanto na figura **A** como na **B**, o ângulo assinalado com vértice em Belém mede 93°. Da mesma forma que, nas duas figuras, cada ângulo assinalado com vértice na capital federal tem 76°.

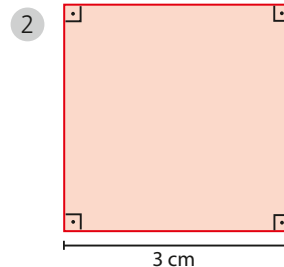
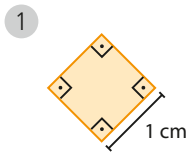
Os ângulos indicam a "forma" da figura, que se mantém quando a ampliamos ou reduzimos. O que se modifica nesses casos é apenas as medidas dos segmentos de reta.

Como essas duas condições (medidas lineares proporcionais e medidas angulares congruentes) são satisfeitas, dizemos que as duas figuras são **semelhantes**.

EXEMPLO 1

Dois quadrados quaisquer são semelhantes.

1

2

A razão de semelhança entre os quadrados 1 e 2 é:

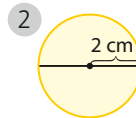
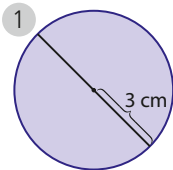
$$\frac{1 \text{ cm}}{3 \text{ cm}} = \frac{1}{3}$$

Poderíamos também ter calculado a razão de semelhança entre os quadrados 2 e 1, nessa ordem, obtendo $\frac{3 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 3$, que é o inverso de $\frac{1}{3}$.

EXEMPLO 2

Dois círculos quaisquer são semelhantes.

1

2

A razão de semelhança entre os círculos 1 e 2 pode ser determinada pela razão entre as medidas dos raios, que é $\frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1,5$.

Observe que a razão entre as medidas de seus diâmetros é, também, $\frac{6 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = \frac{3}{2} = 1,5$.

EXEMPLO 3

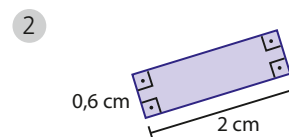
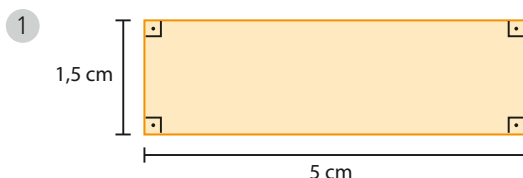
Por exemplo, um retângulo ABCD com lados medindo 2 cm e 6 cm e um retângulo EFGH com lados medindo 8 cm e 10 cm, pois $\frac{2}{8} \neq \frac{6}{10}$.

Dois retângulos serão semelhantes somente se a razão entre as medidas de seus lados maiores for igual à razão entre as medidas de seus lados menores.

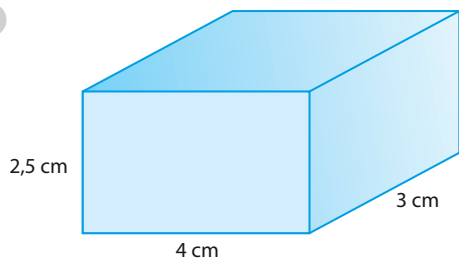
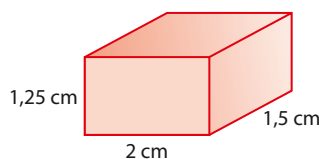
1

2

PENSE NISTO:

Dê um exemplo de dois retângulos que não são semelhantes.

A razão de semelhança entre os retângulos 1 e 2 é $\frac{5 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \frac{1,5 \text{ cm}}{0,6 \text{ cm}} = 2,5$.

EXEMPLO 4

Dois blocos retangulares (paralelepípedos retângulos) serão semelhantes somente se as razões entre as três dimensões (tomadas, por exemplo, em ordem crescente) de um deles e as correspondentes dimensões do outro forem sempre iguais.

Sim, porque, se um cubo tem aresta **a** e o outro tem aresta **b**, quaisquer dois segmentos correspondentes que se tome, um em cada cubo, estarão na razão $\frac{a}{b}$.

A razão de semelhança entre os paralelepípedos 1 e 2 é $\frac{2{,}5 \text{ cm}}{1{,}25 \text{ cm}} =$

$= \frac{3 \text{ cm}}{1{,}5 \text{ cm}} = \frac{4 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 2.$

Logo, eles são semelhantes.

PENSE NISTO:

Dois cubos quaisquer são sempre semelhantes?

EXERCÍCIOS

1 Indique quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

a) Dois retângulos quaisquer são semelhantes.

b) Dois círculos quaisquer são semelhantes.

c) Dois triângulos retângulos quaisquer são semelhantes.

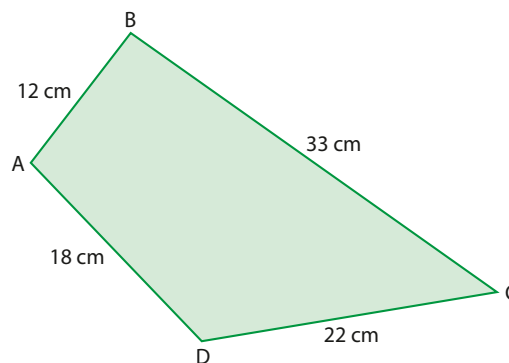
d) Dois triângulos equiláteros quaisquer são semelhantes.

e) Dois trapézios retângulos quaisquer são semelhantes.

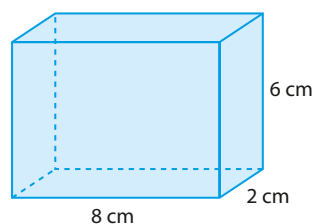
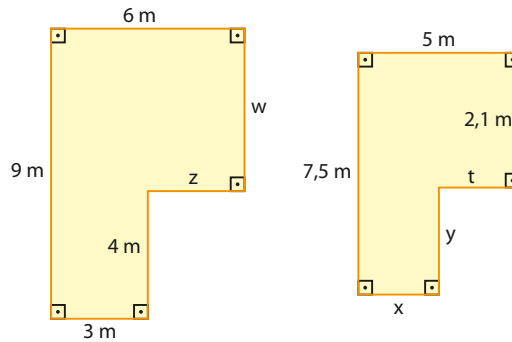
f) Dois losangos quaisquer são semelhantes.

2 Dois retângulos, $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$, são semelhantes. As medidas dos lados de $\mathbf{R}_1$ são 6 cm e 10 cm. Sabendo que a razão de semelhança entre $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$, nessa ordem, é $\frac{2}{3}$, determine as medidas dos lados de $\mathbf{R}_2$.

3 Dois triângulos retângulos distintos possuem um ângulo de 48° e lados com medidas proporcionais. É correto afirmar que eles são semelhantes? Explique.

4 Quais são as medidas dos lados de um quadrilátero A'B'C'D' com perímetro de 17 cm, semelhante ao quadrilátero ABCD da figura?

5 Dois triângulos isósceles distintos possuem um ângulo de 40°. É correto afirmar que eles são semelhantes? Explique.

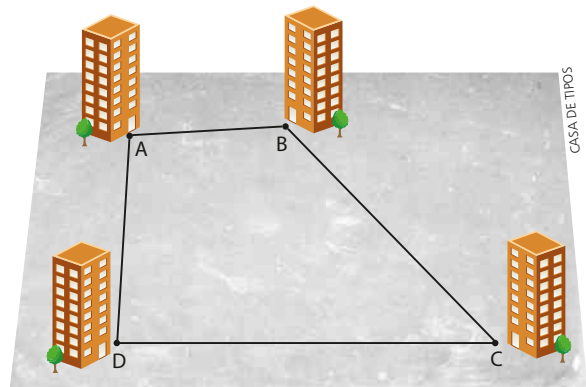
6 No bloco retangular a seguir, o comprimento mede 8 cm, a largura 2 cm e a altura 6 cm.

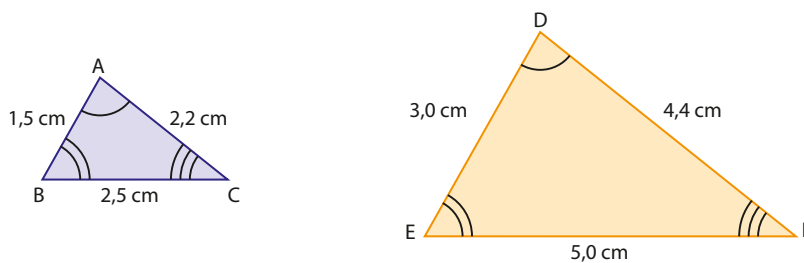
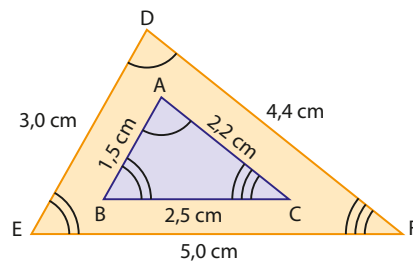
A razão de semelhança entre esse bloco e um outro nessa ordem é $\frac{1}{3}$. Quais são as dimensões do outro bloco?

7 As duas figuras abaixo são semelhantes.

Obtenha os valores de **x**, **y**, **z**, **w** e **t**.

8 Um prospecto de propaganda imobiliária traz as posições das torres **A**, **B**, **C** e **D** de apartamentos, que serão construídos em um grande terreno plano.

Um cliente, interessado em conhecer essas distâncias, mediu com uma régua os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, obtendo, respectivamente, 2 cm, 4 cm, 5 cm e 2,7 cm.

Em seguida, ele verificou, no prospecto, que a escala utilizada era de 1 : 2 000.

Que valores ele obteve para as distâncias reais entre as torres **A** e **B**, **B** e **C**, **C** e **D**, e **A** e **D**?

Semelhança de triângulos

Observe os triângulos ABC e DEF, construídos de modo a terem a mesma forma.

É possível colocar o triângulo menor (ABC) dentro do maior (DEF), de maneira que seus lados fiquem respectivamente paralelos.

OBSERVAÇÃO

Usaremos em toda a coleção a notação AB para representar a medida de um segmento $\overline{AB}$ (segmento de extremidades **A** e **B**).

Observe que:

$\hat{A} \equiv \hat{D}$ $\hat{B} \equiv \hat{E}$ $\hat{C} \equiv \hat{F}$

Se calcularmos as razões entre os lados correspondentes, teremos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{1{,}5\ \text{cm}}{3{,}0\ \text{cm}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{AC}{DF} = \frac{2{,}2\ \text{cm}}{4{,}4\ \text{cm}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BC}{EF} = \frac{2{,}5\ \text{cm}}{5{,}0\ \text{cm}} = \frac{1}{2}$$

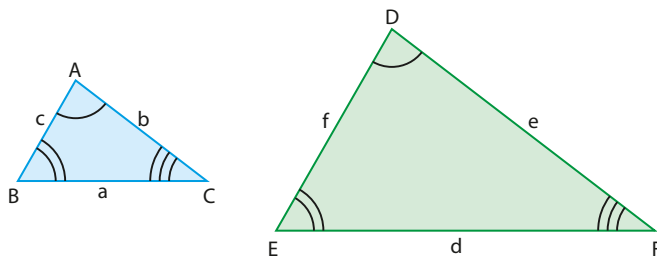
Logo, as razões são todas iguais, ou seja, os lados correspondentes (homólogos) são proporcionais.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Daí, podemos estabelecer a seguinte definição:

Dois triângulos são semelhantes se seus ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Em símbolos matemáticos, podemos escrever:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \text{e} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

Símbolos
$\sim$: semelhante
$\equiv$: congruente

Razão de semelhança

Se dois triângulos são semelhantes, a razão entre as medidas dos lados correspondentes é chamada **razão de semelhança**. Nos triângulos ABC e DEF, que estão logo acima:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k, \text{ em que } \mathbf{k} \text{ é a razão de semelhança.}$$

Se dois triângulos, ABC e DEF, são semelhantes e a razão de semelhança é 1, então os triângulos possuem lados respectivamente congruentes e, consequentemente, os triângulos são congruentes.

O conceito de triângulos semelhantes fixou as seguintes condições para um triângulo ABC ser semelhante a outro A'B'C':

$$\underbrace{\hat{A} \equiv \hat{A}',\ \hat{B} \equiv \hat{B}',\ \hat{C} \equiv \hat{C}'}_{\text{três congruências de ângulos}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}}_{\text{proporcionalidade dos três lados}}$$

PENSE NISTO:

O que ocorre quando a razão de semelhança de dois triângulos é igual a 1?

Mas podemos reduzir essas exigências a uma quantidade menor. Os casos de semelhança (ou critérios de semelhança), que estudaremos a seguir, mostram quais são as condições mínimas para dois triângulos serem semelhantes.

Para demonstrar a validade dos critérios de semelhança, precisamos rever o teorema de Tales e o teorema fundamental da semelhança.

Ao observar, na figura ao lado, um feixe de retas paralelas com duas transversais $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$, podemos dizer que:

- são **correspondentes** os pontos: **A** e **A'**, **B** e **B'**, **C** e **C'**, **D** e **D'**;
- são **correspondentes** os segmentos: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ etc.

Teorema de Tales

> Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre as medidas de dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra.

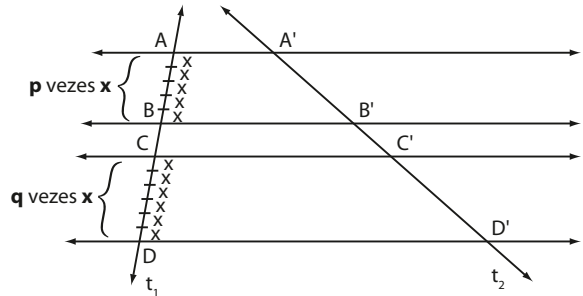
Considerando a figura na página anterior, a tese é: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Vamos fazer a demonstração supondo que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são segmentos comensuráveis, isto é, existe um segmento de medida **x** que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$, ou seja, existem números inteiros **p** e **q** de modo que $AB = p \cdot x$ e $CD = q \cdot x$, como mostra a figura (neste caso, temos $p = 5$ e $q = 6$).

Temos:

$$AB = p \cdot x$$
$$CD = q \cdot x$$

Estabelecendo a razão

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

Conduzindo retas do feixe (paralelas a $\overline{AA'}$) pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (veja linhas tracejadas na figura), observamos que:

- O segmento $\overline{A'B'}$ fica dividido em **p** segmentos congruentes, cada um com medida **x'**:

$$A'B' = p \cdot x'$$

- O segmento $\overline{C'D'}$ fica dividido em **q** segmentos congruentes, cada um com medida **x'**:

$$C'D' = q \cdot x'$$

Estabelecemos a razão $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p \cdot x'}{q \cdot x'} \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q} \quad (2)$

É importante que os estudantes compreendam que, ao usar o teorema de Tales, é possível escolher *quaisquer* dois segmentos de uma transversal (e não apenas segmentos adjacentes). Na proporção dada, consideramos a razão $\frac{AC}{BC}$ e a correspondente $\frac{A'C'}{B'C'}$.

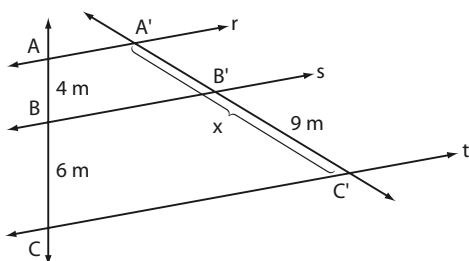
PENSE NISTO:

Um estudante utilizou a proporção $\frac{10}{6} = \frac{x}{9}$ para solucionar o problema do exemplo 5. Comente essa estratégia.

Comparando (1) e (2), temos: $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

Pode-se mostrar que o teorema de Tales também é válido no caso em que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis, isto é, quando não existe submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

EXEMPLO 5

Na figura abaixo, as retas **r**, **s** e **t** são paralelas. Vamos calcular o valor de **x**.

Observe que o segmento $\overline{A'B'}$ mede, em metros, $x - 9$.

Aplicando o teorema de Tales, segue que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{x - 9}{9} \Rightarrow 6x = 90 \Rightarrow x = 15$$

Logo, $x = 15$ m.

Teorema fundamental da semelhança

Toda reta paralela a um lado de um triângulo, que intersecta os outros dois lados em pontos distintos, determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

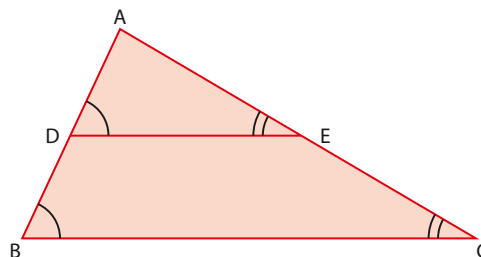
Vamos comprovar a validade deste teorema.

Hipótese: $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ ($D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$)

Tese: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

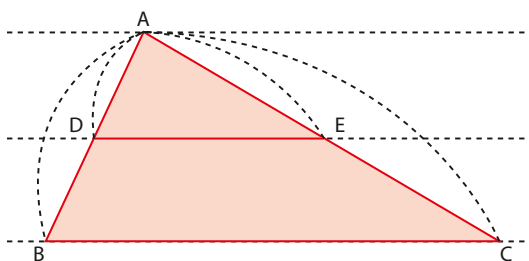
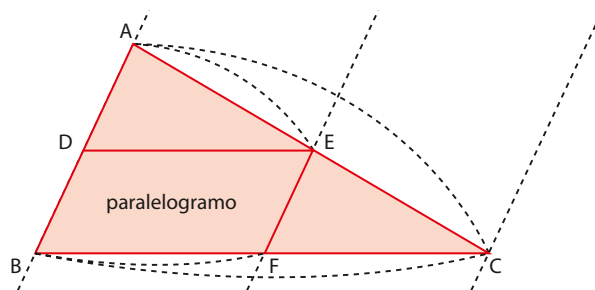
Demonstração:

Considerando os triângulos ADE e ABC e o paralelismo de $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$, temos:

$$\hat{D} \equiv \hat{B} \quad \text{e} \quad \hat{E} \equiv \hat{C}$$

Então, os triângulos ADE e ABC têm os ângulos ordenadamente congruentes:

$\hat{D} \equiv \hat{B}$, $\hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ é comum

Sendo $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$ e aplicando o teorema de Tales nas transversais $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (2)$$

Pelo ponto **E**, vamos conduzir $\overline{EF}$, paralela a $\overline{AB}$.

Sendo $\overline{EF} \,//\, \overline{AB}$ e aplicando o teorema de Tales, temos: $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$.

Mas $\overline{BF} \equiv \overline{DE}$, pois BDEF é um paralelogramo; vamos então substituir BF por DE na proporção anterior:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (3)$$

Comparando (2) e (3), resulta:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (4)$$

Concluímos, assim, que os triângulos ADE e ABC têm ângulos congruentes (veja 1) e lados proporcionais (veja 4). Logo, eles são semelhantes:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Daí concluímos a validade do **teorema fundamental da semelhança**.

EXEMPLO 6

Na figura ao lado, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$. Vamos calcular a medida dos segmentos $\overline{CB}$ e $\overline{CE}$.

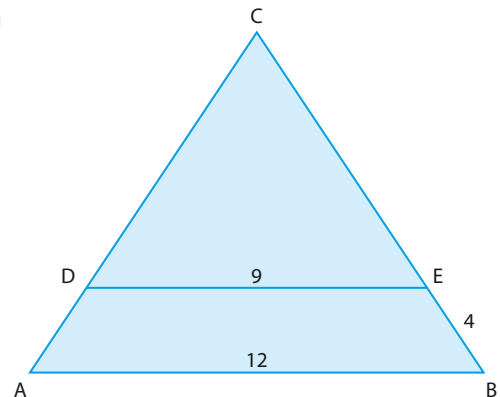
Sendo $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{AB}$, temos: $\triangle CDE \sim \triangle CAB$.

Daí, segue que:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} = \frac{9}{12} \Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{9}{12} \Rightarrow$$

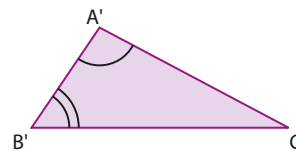
$$\Rightarrow \frac{CE}{CE + 4} = \frac{9}{12} \Rightarrow CE = 12$$

$$CB = CE + 4 = 12 + 4 = 16$$

Professor, se julgar necessário, revise os casos de congruência de triângulos.

Critérios de semelhança

AA (ângulo — ângulo)

Observe os triângulos ABC e A'B'C', com dois ângulos respectivamente congruentes:

$$\hat{A} \equiv \hat{A}' \quad \text{e} \quad \hat{B} \equiv \hat{B}'$$

Se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, então $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ e, daí, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Vamos supor que os triângulos não sejam congruentes e que $AB > A'B'$.

Tomemos **D** em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$, e por **D** tracemos $\overline{DE} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$.

Pelo caso de congruência ALA, os triângulos ADE e A'B'C' são congruentes:

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

Pelo teorema fundamental da semelhança os triângulos ADE e ABC são semelhantes:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Então, os triângulos A'B'C' e ABC também são semelhantes:

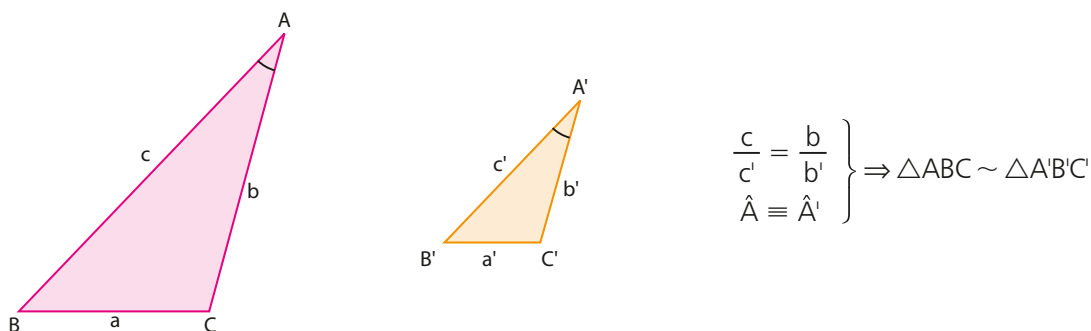
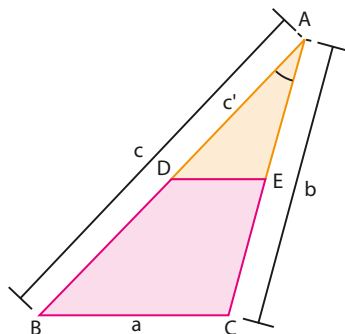
$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são **semelhantes**.

LAL (lado — ângulo — lado)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Observe a demonstração considerando os dois triângulos, ABC e A'B'C', tais que:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Vamos supor que os triângulos ABE e A'B'C' não sejam congruentes e que $AB > A'B'$.
Tomemos **D** em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$, e por **D** tracemos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Note que, pelo teorema fundamental da semelhança:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

Agora, precisamos mostrar que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$.
Como os triângulos ABC e ADE são semelhantes, temos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{AE}{b}$$

Pela hipótese $\left(\dfrac{c'}{c} = \dfrac{b'}{b}\right)$, temos que $AE = b'$, e portanto $\overline{AE} \equiv \overline{A'C'}$.

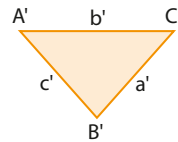
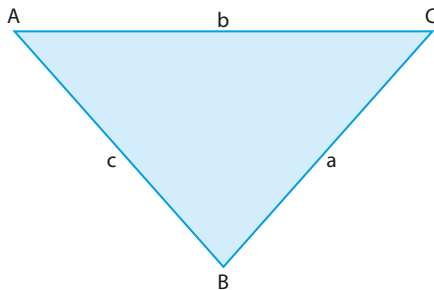
Logo, pelo caso de congruência LAL:

$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

Como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

LLL (lado — lado — lado)

Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes.

Considere os triângulos ABC e A'B'C' tais que:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Vamos supor que os triângulos ABC e A'B'C' não sejam congruentes e que AB > A'B'.
Tomemos **D** em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$, e por **D** tracemos $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
Note que, pelo teorema fundamental da semelhança:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE$$

Agora, precisamos mostrar que $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$.

Já sabemos que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$. Como os triângulos ABC e ADE são semelhantes, temos:

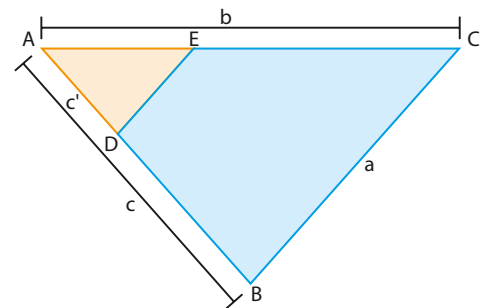
$$\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DE}{a} = \frac{AE}{b} = \frac{c'}{c}$$

Pela hipótese $\left(\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}\right)$, temos:

- $DE = a'$, e portanto $\overline{DE} \equiv \overline{B'C'}$.
- $AE = b'$, e portanto $\overline{AE} \equiv \overline{A'C'}$.

Logo, pelo caso de congruência LLL:

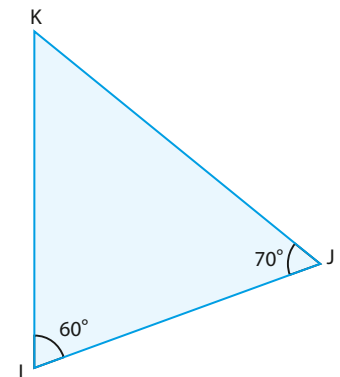
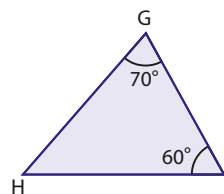
$$\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$$

Como $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ e $\triangle ADE \equiv \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

EXEMPLO 7

Observe os dois triângulos ilustrados.
Temos:

$$\hat{G} \equiv \hat{J} \text{ e } \hat{I} \equiv \hat{L}$$

Então, pelo critério AA de semelhança, $\triangle GHI \sim \triangle JKL$ e, em consequência, seus lados homólogos são proporcionais:

$$\frac{GH}{JK} = \frac{GI}{JL} = \frac{HI}{KL}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Sabe-se que $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$. Quais são as medidas **x** de $\overline{AB}$ e **y** de $\overline{CD}$?

Solução:

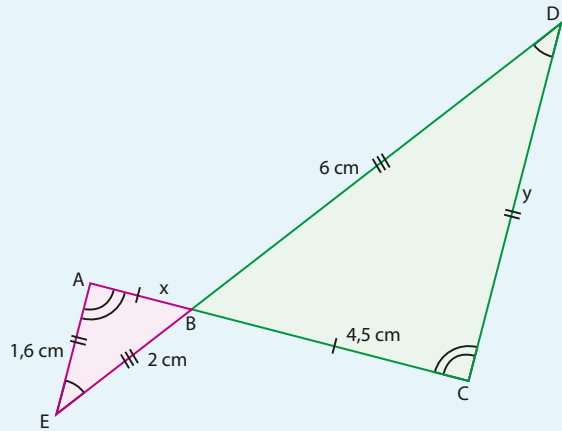
Como $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$, há dois pares de ângulos alternos internos congruentes:

$$B\hat{A}E \equiv B\hat{C}D \text{ e } B\hat{E}A \equiv B\hat{D}C$$

Há também $A\hat{B}E \equiv C\hat{B}D$ (ângulos opostos pelo vértice). Assim, temos $\triangle ABE \sim \triangle CBD$.

Podemos escrever a proporcionalidade entre as medidas dos lados homólogos:

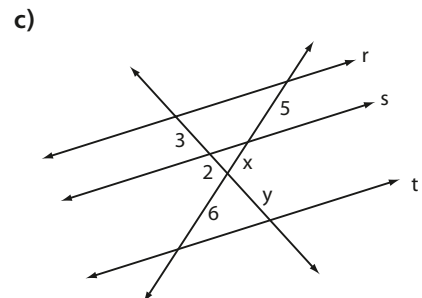
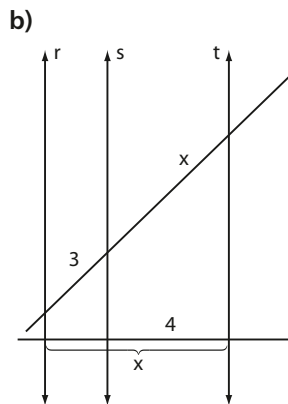
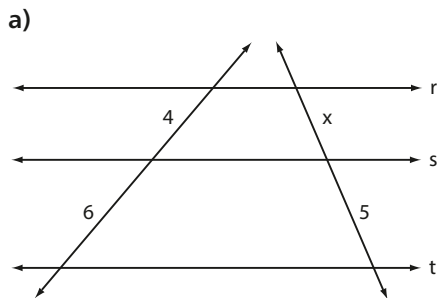
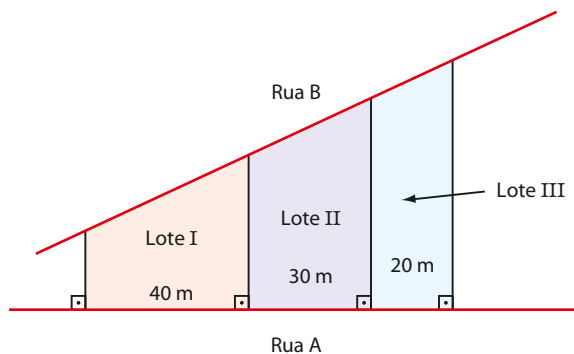
$$\frac{AB}{CB} = \frac{AE}{CD} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{x}{4,5} = \frac{1,6}{y} = \frac{2}{6}$$

Temos, então, $x = \frac{2 \cdot 4,5}{6}$, isto é, $x = 1,5$ cm, além de $y = \frac{6 \cdot 1,6}{2}$, ou seja, $y = 4,8$ cm.

EXERCÍCIOS

9 Em cada caso, as retas **r**, **s** e **t** são paralelas. Determine os valores de **x** e **y**:

a)

b)

c)

10 Três terrenos têm frentes para a rua **A** e para a rua **B**, como mostra a figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua **A**. Qual é a medida da frente para a rua **B** de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua mede 180 m?

11 São dados oito triângulos. Indique os pares de triângulos semelhantes e o critério de semelhança correspondente:

1

5

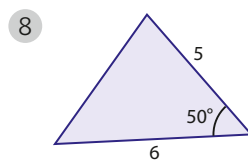
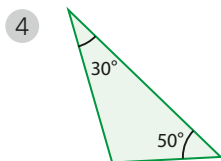
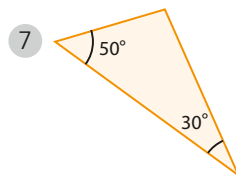
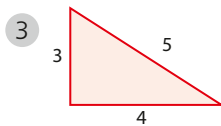
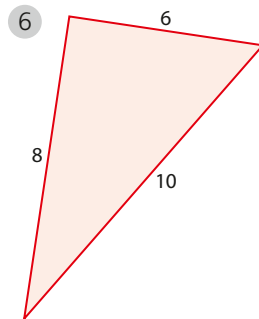
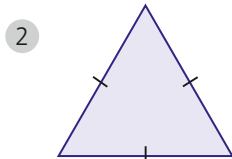
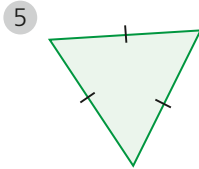
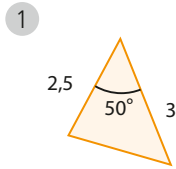
2

6

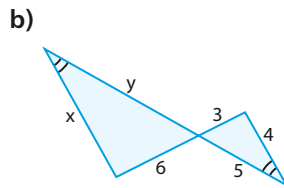
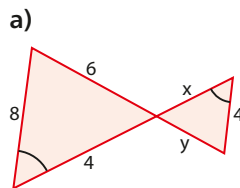
3

7

4

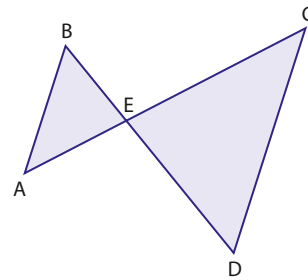
8

12 Determine **x** e **y** nas figuras, nas quais os ângulos assinalados com a mesma marcação são congruentes.

a)

b)

13 Numa certa hora do dia, um prédio de 48 m de altura projeta no solo uma sombra de 10 m de comprimento.

a) Qual é o comprimento da sombra projetada por um prédio de 18 m de altura, situado na mesma rua, supondo-a plana e horizontal?

b) Em outra hora do dia, a sombra do prédio menor diminuiu 50 cm em relação à situação anterior. Em quanto diminuirá a sombra do prédio maior?

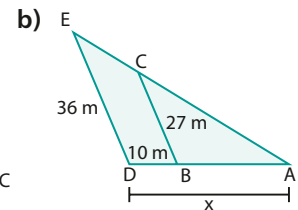
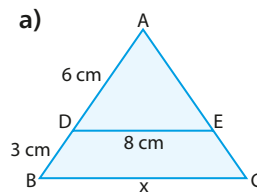
14 Determine DE, sendo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, BE = 4 cm, EC = 8 cm e AC = 11 cm.

15 Uma rampa de inclinação constante tem 90 m de extensão e seu ponto mais alto se encontra a 8 m do solo.

a) Saindo do solo, uma pessoa se desloca sobre a rampa, atingindo um ponto que se encontra a 2 m de altura em relação ao solo. Quantos metros ainda faltam para a pessoa chegar ao ponto mais alto?

b) Saindo do ponto mais alto da rampa, uma pessoa desce 20 m da rampa, chegando a um ponto **S**. A que altura **S** está em relação ao solo?

16 Sendo $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, determine **x** nos casos:

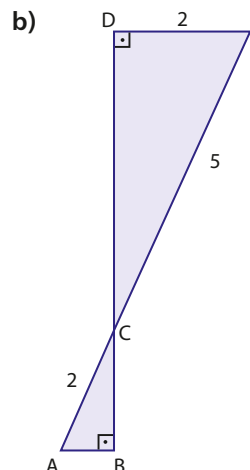
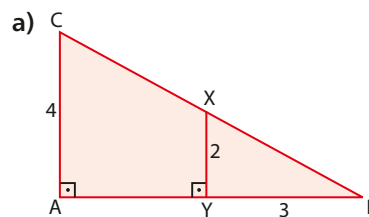
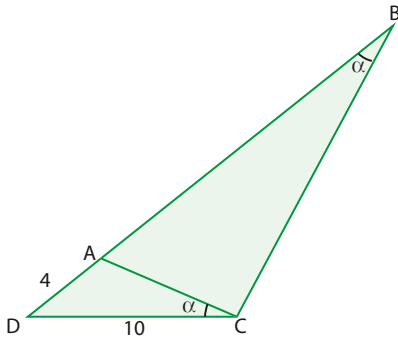
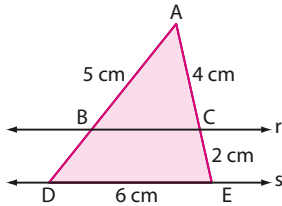
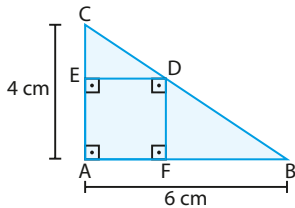
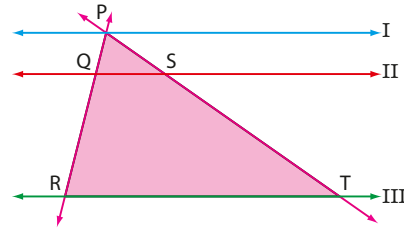
a)

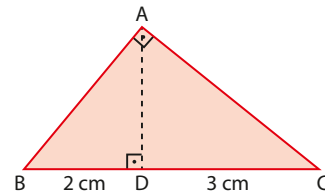
b)

17 Determine a medida de $\overline{AB}$ em cada caso:

a)

b)

D 2 E

5

c)

18 Determine a razão entre os perímetros dos triângulos ABC e ADE, nesta ordem, sabendo que r // s.

19 Determine a medida do lado do quadrado AEDF da figura:

20 A figura representa três ruas paralelas (I, II e III) de um condomínio. A partir do ponto **P**, deseja-se puxar uma extensa rede de fios elétricos, conforme indicado pelos segmentos $\overline{PR}$, $\overline{PT}$, $\overline{QS}$ e $\overline{RT}$.

Sabe-se que a quantidade de fio (em metros) usada para ligar os pontos **Q** e **R** é o dobro da quantidade necessária para ligar os pontos **P** e **Q**. Determine quantos metros de fio serão usados para ligar **Q** e **S**, se de **R** a **T** foram usados 84 m.

21 Na figura abaixo, $\overline{AD}$ é perpendicular a $\overline{BC}$.

a) Explique por que os triângulos ABD e CAD são semelhantes.

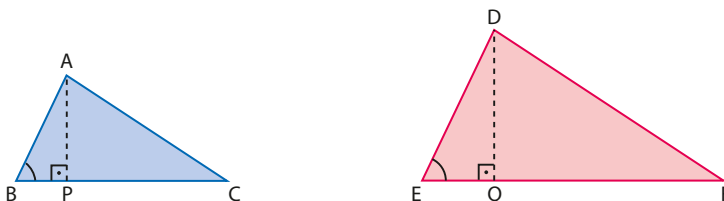
b) Qual é a medida de $\overline{AD}$?

Consequências da semelhança de triângulos

Primeira consequência

Utilizando os critérios de semelhança, podemos provar que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é **k**, então:

- a razão entre duas alturas homólogas é **k**;
- a razão entre duas medianas homólogas é **k**;
- a razão entre duas bissetrizes homólogas é **k**;
- **a razão entre as áreas é k²**.

Vamos provar a última afirmação. Seja $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Para esta demonstração, será necessário relembrar que a área de um triângulo é calculada por $\frac{1}{2} \cdot b \cdot h$. Para mais detalhes, veja o capítulo 12, no qual será feito o estudo completo e detalhado sobre áreas de superfícies planas.

Temos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = k$$

Consideremos as alturas homólogas $\overline{AP}$ e $\overline{DQ}$. Os triângulos ABP e DEQ também são semelhantes (pelo critério AA), pois $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{P} \equiv \hat{Q}$.

Então:

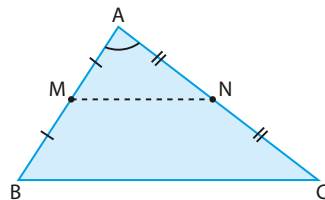
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AP}{DQ}, \text{ portanto } \frac{AP}{DQ} = k \text{ (razão de semelhança entre duas alturas homólogas)}$$

Daí, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{área } \triangle ABC: S_1 = \dfrac{BC \cdot AP}{2} \\ \text{área } \triangle DEF: S_2 = \dfrac{EF \cdot DQ}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{BC \cdot AP}{EF \cdot DQ} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AP}{DQ} = k \cdot k = k^2$$

Segunda consequência

Se um segmento une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é **paralelo ao terceiro lado** e é **metade do terceiro lado**. Veja a justificativa dessa propriedade.

Observe o triângulo ABC da figura em que **M** e **N** são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

Observe os triângulos AMN e ABC. Eles têm o ângulo $\hat{A}$ em comum e $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$.

De acordo com o critério LAL de semelhança, temos:

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC$$

e, portanto, $\hat{M} \equiv \hat{B}$, $\hat{N} \equiv \hat{C}$ e $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

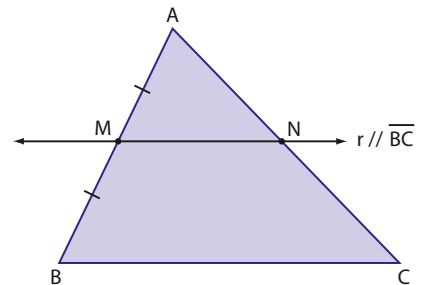
Assim, podemos concluir que $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

Terceira consequência

Se, pelo ponto médio de um lado de um triângulo, traçarmos uma reta paralela a outro lado, ela encontrará o terceiro lado em seu ponto médio.

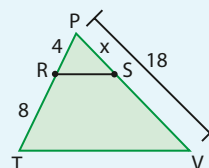
Veja a justificativa dessa propriedade.

Observe a figura ao lado: tomamos um triângulo ABC e marcamos **M**, ponto médio do lado $\overline{AB}$. Em seguida, traçamos por **M** a reta **r**, paralela ao lado $\overline{BC}$.

Pelo teorema fundamental da semelhança, temos $\triangle AMN \sim \triangle ABC$; portanto, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, ou seja, **N** é o ponto médio de $\overline{AC}$, e MN é a metade de BC.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2 Na figura ao lado, $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{TV}$:

a) Determine o valor de **x**.

b) Sendo S_1 a área do triângulo PRS e S_2 a área do triângulo PTV, encontre uma relação entre S_1 e S_2.

Solução:

Como $\overline{RS} // \overline{TV}$, os triângulos PRS e PTV são semelhantes.

a) Escrevendo a razão de semelhança entre os lados dos triângulos PRS e PTV, temos: $\frac{PR}{PT} = \frac{PS}{PV} \Rightarrow \frac{4}{4+8} = \frac{x}{18} \Rightarrow x = 6$

b) Como a razão de semelhança entre os lados dos triângulos PRS e PTV é $\frac{1}{3}$, nessa ordem, concluímos que a razão entre suas áreas é $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$, isto é, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{9}$.

PENSE NISTO:

Na figura do exercício resolvido, qual é a razão entre a área do trapézio RSVT e a área do triângulo PRS?

A área do triângulo PRS é $\frac{1}{9}$ da área do triângulo PTV, então a área do trapézio RSVT é $\frac{8}{9}$ da área do triângulo PTV. Assim, a razão pedida é $\frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{9}} = 8$.

EXERCÍCIOS

FAÇA NO CADERNO

22 As medidas dos lados de um triângulo ABC são 5,2 cm, 6,5 cm e 7,3 cm. Seja MNP o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de ABC.

a) Qual é o perímetro de MNP?

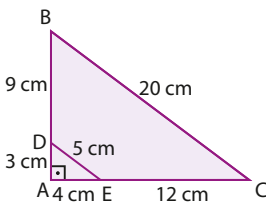
b) Prove que MNP é semelhante a ABC.

23 Na figura, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

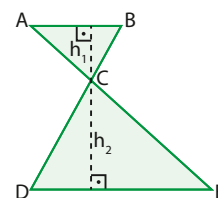
a) Qual é a razão de semelhança dos triângulos ADE e ABC, nessa ordem?

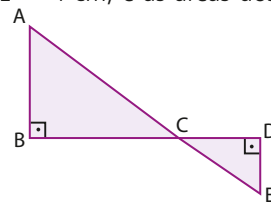
b) Qual é a razão entre os perímetros dos triângulos ADE e ABC, nessa ordem?

c) Qual é a razão entre as áreas dos triângulos ADE e ABC, nessa ordem?

d) Se a área do triângulo ADE é 6 cm², qual é a área do triângulo ABC?

24 Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{DE}$. Sabendo que AB = 5 cm, h_1 = 3 cm e DE = 10 cm, determine:

a) h_2;

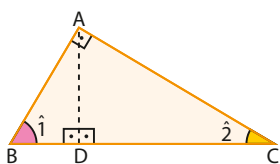
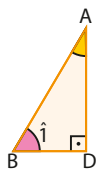
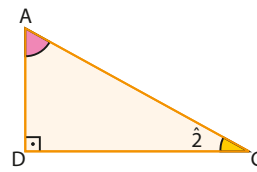
b) as áreas dos triângulos ABC e CDE.

25 Dois triângulos equiláteros, T_1 e T_2, têm perímetros de 6 cm e 24 cm. Qual é a razão entre a área de T_2 e de T_1?

26 Na figura, $\overline{AB} // \overline{ED}$, DE = 4 cm, e as áreas dos triângulos ABC e EDC valem, respectivamente, 36 cm² e 4 cm². Quanto mede $\overline{AB}$?

O triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo, além do ângulo reto, possui dois ângulos (agudos) complementares.

O maior dos três lados do triângulo é o oposto ao ângulo reto e chama-se **hipotenusa**; os outros dois lados são os **catetos**.

Semelhanças no triângulo retângulo

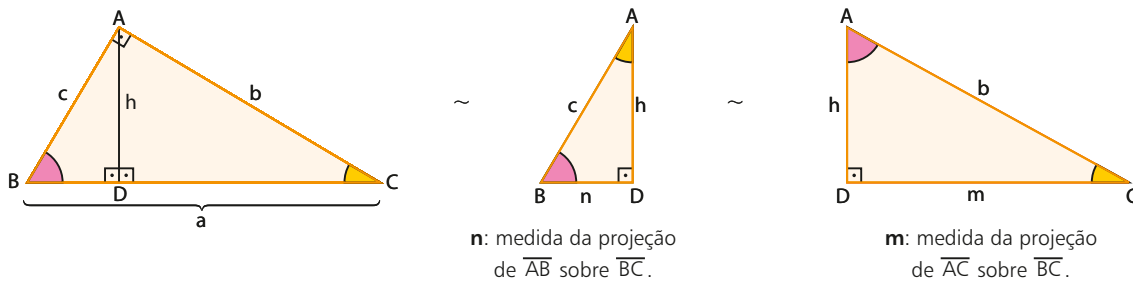
Traçando a altura $\overline{AD}$, relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo ABC, obtemos dois outros triângulos retângulos: DBA e DAC. Observe as figuras:

Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são complementares, ou seja, a soma é 90°.

O ângulo $B\hat{A}D$ é complemento do ângulo $\hat{1}$. Então, $B\hat{A}D \equiv \hat{2}$.

O ângulo $D\hat{A}C$ é complemento do ângulo $\hat{2}$. Então, $D\hat{A}C \equiv \hat{1}$.

Reunindo as conclusões, vemos que os triângulos ABC, DBA e DAC têm os ângulos respectivos congruentes e, portanto, são semelhantes: $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$

Relações métricas

Voltemos ao triângulo ABC, retângulo em $\hat{A}$, com a altura $\overline{AD}$. Os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ também são chamados de **projeções** dos catetos sobre a hipotenusa.

n: medida da projeção de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$.

m: medida da projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

Explorando a semelhança dos triângulos, temos que:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \quad (1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \quad (2)$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad (3)$$

As relações (1), (2) e (3) são importantes **relações métricas no triângulo retângulo**. Em qualquer triângulo retângulo, temos, portanto:

- O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da projeção desse cateto sobre a hipotenusa, isto é:

$$b^2 = a \cdot m \quad \text{e} \quad c^2 = a \cdot n$$

- O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos segmentos que ela determina na hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n$$

Das relações (1), (2) e (3) decorrem outras, entre as quais vamos destacar duas:

Multiplicando membro a membro as relações (1) e (2) e depois usando a (3), temos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{m \cdot n}_{(3)} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

- Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da altura relativa a ela:

$$b \cdot c = a \cdot h$$

Somando membro a membro as relações (1) e (2) e observando que $m + n = a$, temos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot (\underbrace{m + n}_{a}) \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

- Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Essa última relação é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

EXEMPLO 8

Sejam 2 cm e 3 cm as medidas das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa (veja a figura). Vamos calcular as medidas dos catetos.

Podemos fazer:

$$(3): h^2 = 2 \cdot 3 \Rightarrow h = \sqrt{6}$$

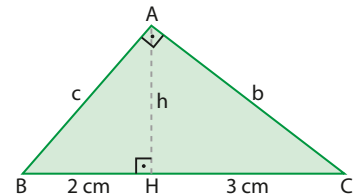
Como o triângulo ABH é retângulo, vale o teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 2^2 + h^2 = 4 + 6 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10}$$

Logo, o cateto $\overline{BA}$ mede $\sqrt{10}$ cm.

No triângulo ACH, que é retângulo, temos:

$$b^2 = h^2 + 3^2 = 6 + 9 = 15 \Rightarrow b = \sqrt{15}$$

Logo, o cateto $\overline{AC}$ mede $\sqrt{15}$ cm.

PENSE NISTO:

De que outro modo poderíamos ter calculado as medidas dos catetos de ABC?

Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo:
$c^2 = a \cdot n$ e $b^2 = a \cdot m$

$$\begin{cases} c^2 = (2 + 3) \cdot 2 = 10 \Rightarrow c = \sqrt{10} \\ b^2 = (2 + 3) \cdot 3 = 15 \Rightarrow b = \sqrt{15} \end{cases}$$

Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras

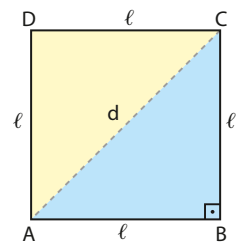
1ª) Diagonal do quadrado

Consideremos um quadrado ABCD cujo lado mede ℓ. Vamos encontrar a medida da diagonal **d** do quadrado em função de ℓ.

Basta aplicar o teorema de Pitágoras a qualquer um dos triângulos destacados:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2\ell^2$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

Assim, por exemplo, se o lado de um quadrado mede 10 cm, sua diagonal medirá $10\sqrt{2}$ cm (aproximadamente 14,1 cm).

2ª) Altura do triângulo equilátero

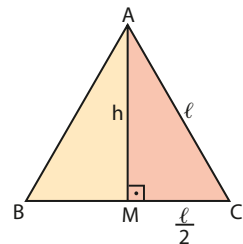
Consideremos um triângulo equilátero ABC cujo lado mede ℓ. Vamos expressar a medida da altura **h** do triângulo em função de ℓ.

Basta aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo destacado:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Assim, por exemplo, em um triângulo equilátero com lado de 6 cm, a altura relativa a qualquer um dos lados mede $\frac{6\sqrt{3}}{2}$ cm $= 3\sqrt{3}$ cm (aproximadamente 5,2 cm).

OBSERVAÇÃO

No triângulo equilátero, a altura relativa a um lado é também mediana e bissetriz.

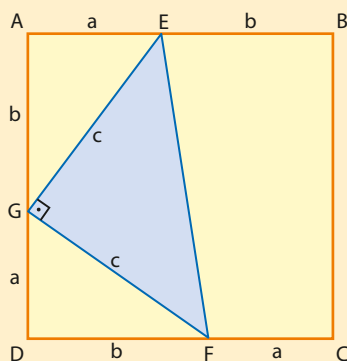
UM POUCO DE **HISTÓRIA**

Pitágoras de Samos

Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos, por volta de 565 a.C.

Sua obra, depois continuada pelos discípulos, foi de enorme importância para o desenvolvimento da Matemática. Várias foram as contribuições da escola pitagórica, responsável por avanços na área do raciocínio lógico-dedutivo. Pitágoras deu também grandes contribuições ao desenvolvimento da Aritmética.

O teorema que leva seu nome já teve centenas de demonstrações diferentes. Observe a demonstração a seguir.

Tomemos o quadrado ABCD abaixo representado, de lado $a + b$.

Podemos dividi-lo em dois trapézios congruentes pelo segmento $\overline{EF}$: o trapézio AEFD e o trapézio EBCF. A área **S** do trapézio AEFD pode ser calculada de duas maneiras:

Como metade da área do quadrado ABCD:

$$S = \frac{(a + b)(a + b)}{2}$$

Como a soma das áreas dos triângulos AEG, EGF e GFD:

$$S = \frac{ab}{2} + \frac{cc}{2} + \frac{ab}{2}$$

Então:

$$(a + b)(a + b) = ab + cc + ab$$

e daí resulta:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

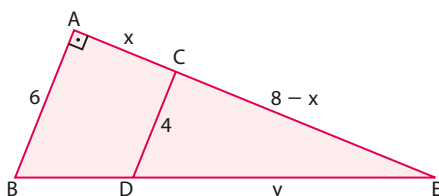
Essa demonstração se deve a James Abram Garfield (1831-1881), vigésimo presidente dos Estados Unidos.

HERITAGE IMAGES/DIOMEDIA/COLEÇÃO PARTICULAR

Pitágoras desenhando na areia o teorema que hoje leva o seu nome. Gravura de autor desconhecido, 1833.

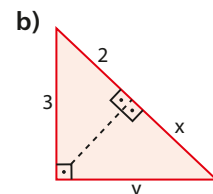
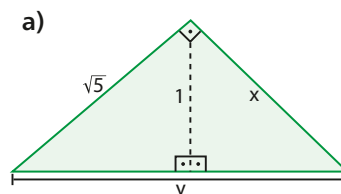
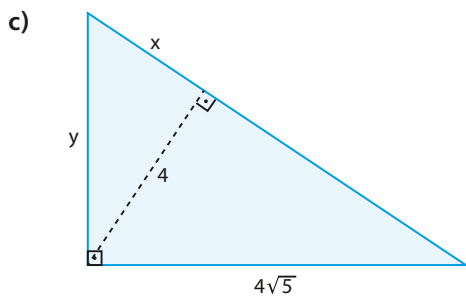
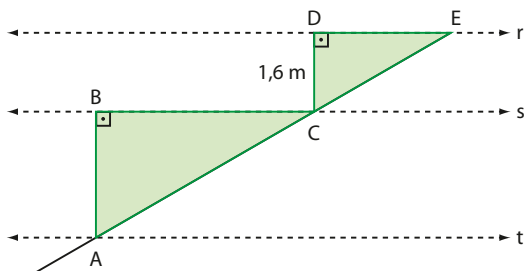
Fonte de pesquisa: ROSA, Euclides. Mania de Pitágoras. *RPM/Estágio OBMEP*, 2007. p. 34-39. Disponível em: <www.obmep.org.br/docs/rpm_pic2007.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

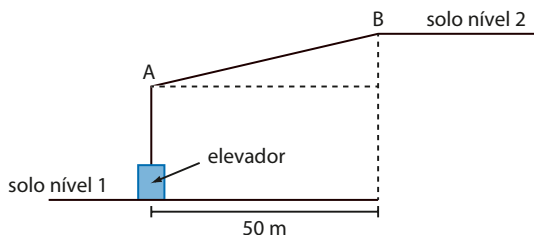
EXERCÍCIOS

27 Sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, determine **x** e **y**.

28 Determine **x** e **y** nas figuras:

a)

b)

c)

29 A parte final de uma escada está representada na figura seguinte:

Um imprevisto na fase de construção fez com que a extensão do penúltimo degrau fosse o dobro da extensão do último. Considerando as retas **r**, **s** e **t** paralelas e AE = 6 m, determine a extensão de cada um desses degraus.

30 Para vencer um desnível de 9 m entre dois pisos de um *shopping* foi construído um elevador e uma rampa suave para possibilitar o acesso de cadeirantes ou pessoas com mobilidade reduzida, como mostra a figura:

O elevador sobe verticalmente 5 m, chegando ao ponto **A**. De **A** inicia-se o percurso sobre a rampa de baixa inclinação até se chegar ao ponto **B**, no outro nível.

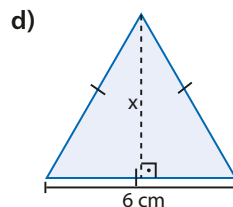
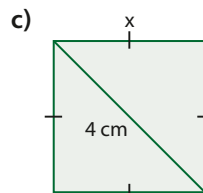
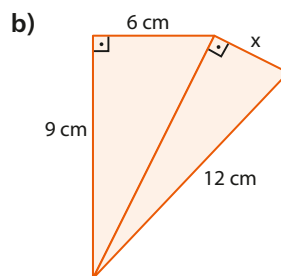
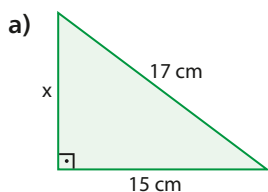
Use uma calculadora para determinar o comprimento aproximado da rampa (por excesso), com erro inferior a 0,01.

31 Determine o valor de **x** em cada caso:

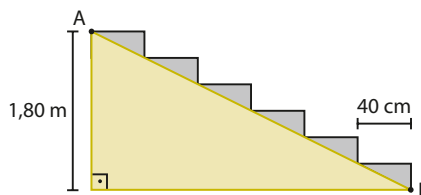
a)

b)

c)

d)

32 Quanto medem os catetos e a altura relativa à hipotenusa de um triângulo, sabendo que essa altura determina, sobre a hipotenusa, segmentos de 3 cm e 5 cm?

33 Uma piscina com a forma de um paralelepípedo retângulo tem 40 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade. Que distância percorrerá alguém que nade na superfície, em linha reta, de um canto ao canto oposto dessa piscina? Use $\sqrt{5} \simeq 2{,}23$.

34 A figura mostra o perfil de uma escada, formada por seis degraus idênticos, cada um com 40 cm de largura. A distância do ponto mais alto da escada ao solo é 1,80 m. Qual é a medida do segmento $\overline{AB}$?

35 Saindo de um ponto **O**, um robô caminha, em linha reta e sucessivamente, 10 m na direção Sul, 3 m na direção Leste, 6 m na direção Norte e, de lá, retorna em linha reta ao ponto de partida. Quantos metros o robô percorreu ao todo?

36 Em certo trecho de um rio, as margens são paralelas. Ali, a distância entre dois povoados situados na mesma margem é de 3 000 m. Esses povoados distam igualmente de um farol, situado na outra margem do rio. Sabendo que a largura do rio é 2 km, determine a distância do farol a cada um dos povoados.

37 No portão retangular da casa de Horácio foi necessário colocar, diagonalmente, um reforço de madeira (ripa) com 3 m de comprimento. Sabendo que a altura do portão excede em 60 cm seu comprimento, determine as dimensões desse portão.

38 O perímetro de um quadrado é 36 cm. Qual é a medida da diagonal desse quadrado?

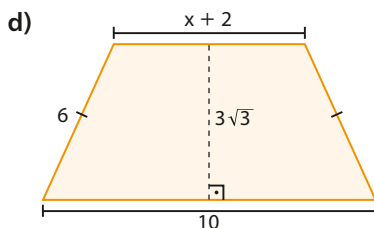
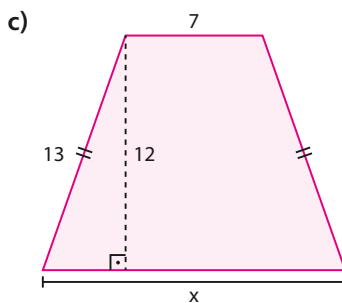
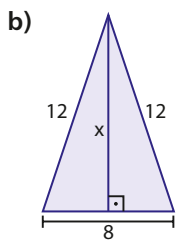
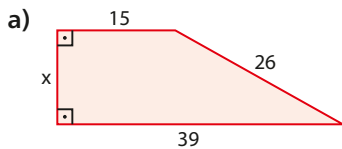
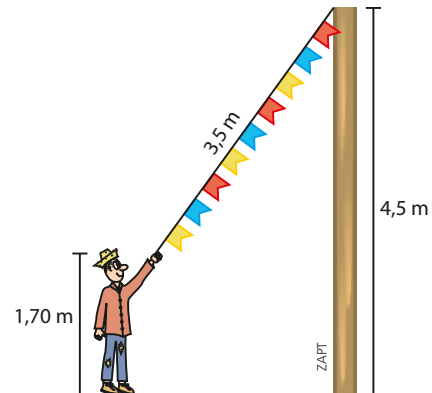
39 A altura de um triângulo equilátero mede $6\sqrt{3}$ m. Qual é o perímetro desse triângulo?

40 Calcule **x** em:

a)

b)

c)

d)

41 Para ajudar nas festas juninas de sua cidade, Paulo esticou completamente um fio de bandeirinhas, com 3,5 m de comprimento, até o topo de um poste com 4,5 m de altura. Sabendo que Paulo tem 1,70 m de altura, a que distância ele ficou do pé do poste?

42 Dois grupos de turistas partem simultaneamente da entrada do hotel em que estão hospedados. O primeiro grupo segue na direção leste, rumo a um monumento distante 800 m do ponto de partida. O segundo parte na direção norte, rumo a um museu situado a 1 000 m do ponto de partida.

Paraty, Rio de Janeiro, 2013.

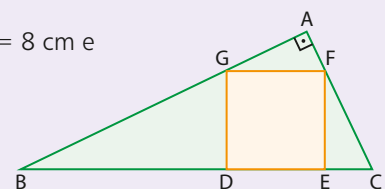
a) Qual é, em linha reta, a distância, em metros, entre o monumento e o museu?

b) Supondo que os dois grupos caminham a uma velocidade constante de 2 km/h, qual é a distância, em metros, entre os dois grupos 15 minutos após a partida?

DESAFIO

Na figura, o quadrado DEFG está inscrito no triângulo ABC. Sendo BD = 8 cm e CE = 2 cm:

a) calcule o perímetro do quadrado.

b) determine a menor distância entre o ponto **A** e a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

Trigonometria no triângulo retângulo

Neste capítulo, antes de iniciar o estudo da trigonometria no triângulo retângulo, vamos conhecer um pouco da história do desenvolvimento desta importante área da Matemática.

UM POUCO DE **HISTÓRIA**

A trigonometria

O significado da palavra **trigonometria** (do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida") remete-nos ao estudo dos ângulos e lados dos triângulos — figuras básicas em qualquer estudo de Geometria.

Mais amplamente, usamos a trigonometria para resolver problemas geométricos que relacionam ângulos e distâncias. A origem desses problemas nos leva a civilizações antigas do Mediterrâneo e à civilização egípcia, em que eram conhecidas regras simples de mensuração e demarcação de linhas divisórias de terrenos nas margens dos rios. Há registros de medições de ângulos e segmentos datados de 1500 a.C. no Egito, usando a razão entre a sombra de uma vara vertical (*gnomon*) sobre uma mesa graduada. Alguns desses registros encontram-se no Museu Egípcio de Berlim.

RICHARD MASCHMEYER/AFP

As Grandes Pirâmides, Egito, Norte da África, 2015.

Também teria surgido no Egito um dos primeiros instrumentos conhecidos para medir ângulos, chamado groma, que teria sido empregado na construção das Grandes Pirâmides.

Os teodolitos — aparelhos hoje usados por agrimensores e engenheiros — tiveram sua "primeira versão" (com esse nome) no século XVI.

Durante muito tempo, a trigonometria esteve ligada à Astronomia, devido à dificuldade natural que havia em relação às estimativas e ao cálculo de distâncias impossíveis de medir diretamente. A civilização grega, dando continuidade aos trabalhos iniciados pelos babilônios, deixou contribuições importantes nesse sentido, como, por exemplo, a estimativa das distâncias entre o Sol e a Terra e entre o Sol e a Lua, feita por Aristarco, por volta de 260 a.C. — mesmo que seus números

estivessem muito longe dos valores modernos —, e a estimativa da medida do raio da Terra, feita por Eratóstenes, por volta de 200 a.C. (veja texto no volume 2 desta coleção).

No entanto, o primeiro estudo sistemático das relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e o comprimento da corda correspondente, que resultou na primeira tabela trigonométrica, é atribuído a Hiparco de Niceia (180 a.C.-125 a.C.), que ficou conhecido como "pai da trigonometria".

Somente no século XVIII, com a invenção do cálculo infinitesimal, a trigonometria desvinculou-se da Astronomia, passando a ser um ramo independente e em desenvolvimento da Matemática.

Nesta coleção, a abordagem da trigonometria (plana) ocorrerá da seguinte forma:

- o estudo dos triângulos retângulos, em que aparecem as razões trigonométricas, será feito no volume 1;
- os triângulos não retângulos (acutângulos ou obtusângulos) serão estudados no volume 2;
- o estudo das funções trigonométricas (ou circulares), em que aparecem os movimentos periódicos, será feito também no volume 2.

Fontes de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática.* 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010; KENNEDY, Edward S. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula.* Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

Razões trigonométricas

Acessibilidade e inclinação de uma rampa

De acordo com a Norma Brasileira nº 9050, de 2004, da Associação Brasileira de Normas Técnicas, uma pessoa com mobilidade reduzida é "aquela que, temporária ou permanentemente, tem limitada a sua capacidade de se relacionar com o meio e de utilizá-lo. Entende-se por pessoa com mobilidade reduzida a pessoa com deficiência, idosa, obesa, gestante entre outros".

São pessoas que, por qualquer motivo, têm dificuldade de se movimentar, mesmo não sendo portadoras de deficiência.

Para que todas as pessoas, deficientes ou não, possam frequentar os mesmos lugares e usufruir dos mesmos bens e serviços, é necessária a implantação de meios que possibilitem o acesso de pessoas com restrição de mobilidade.

DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Rampa de baixa inclinação com piso tátil.

A substituição de degraus por rampas de baixa inclinação, a implantação de sinalização horizontal (piso tátil), vertical (sinalização em braile) e sonorizada e remoções de barreiras em geral são intervenções que facilitam o acesso de pessoas com mobilidade reduzida.

As rampas constituem uma alternativa à construção de escadas quando se quer vencer um desnível entre duas superfícies planas e facilitar o deslocamento de cadeirantes, pessoas com mobilidade reduzida, carrinhos de bebê, malas etc.

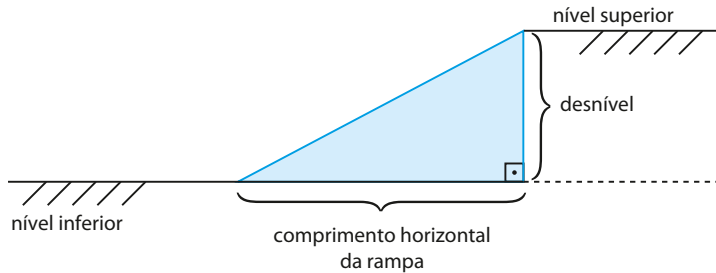
Uma rampa garante circulação mais ágil e não requer tanta atenção no deslocamento, se comparada a uma escada.

SETUP

Em São Paulo, o decreto municipal nº 45 904, de 19 de maio de 2005, sobre a padronização dos passeios públicos, parte da via pública destinada à circulação de qualquer pessoa, regulamenta que "passeios com declividade acima de 8,33% não serão considerados rotas acessíveis".

Para ver o decreto completo, consulte <www3.prefeitura.sp.gov.br/cadlem/secretarias/negocios_juridicos/cadlem/integra.asp?alt=20052005D%20459040000>, acesso em: 29 abr. 2016.

Mas o que significa uma declividade de 8,33%?

A *declividade* de uma rampa é a razão entre o desnível a ser vencido e o comprimento horizontal da rampa, como mostra a figura seguinte:

Podemos também pensar na declividade de uma rampa como a razão entre o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal experimentados ao se caminhar sobre a rampa.

$$\text{declividade} = \frac{\text{desnível}}{\text{comprimento horizontal da rampa}} = \frac{\text{deslocamento vertical}}{\text{deslocamento horizontal}}$$

Vamos trabalhar inicialmente com um exemplo mais simples — uma declividade de 5% equivale à razão $\frac{1}{20}$:

$$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

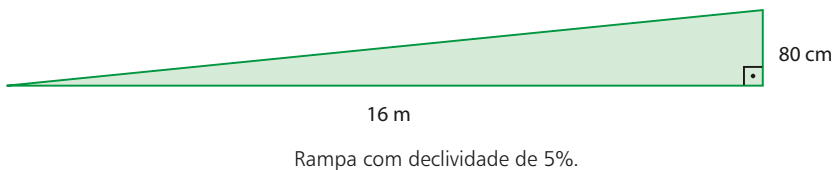
Isso significa que para cada 1 cm (ou 1 dm, ou 1 m, ...) de desnível a ser vencido é necessário um comprimento horizontal de rampa de 20 cm (ou 20 dm, ou 20 m, ...).

Por exemplo, para vencer um desnível de 80 cm, uma rampa com declividade de 5% deverá ter $20 \cdot (80 \text{ cm}) = 1600 \text{ cm} = 16 \text{ m}$ de comprimento horizontal.

Rampa com declividade de 5%.

PENSE NISTO:

O que significa dizer que uma rampa possui declividade de 100%?

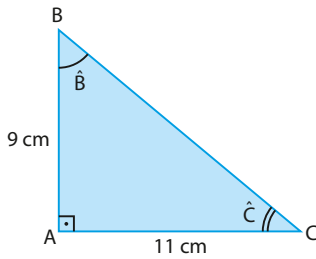
Significa que para cada 1 cm de desnível a ser vencido é necessário um comprimento horizontal de rampa de 1 cm, ou seja, os deslocamentos vertical e horizontal são iguais.

As ideias apresentadas sobre declividade de uma rampa motivam a definição das razões trigonométricas no triângulo retângulo, iniciando pela tangente.

Tangente de um ângulo agudo

Em um triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo θ (indica-se: tg θ) é dada pela razão entre a medida do cateto oposto a θ e a medida do cateto adjacente a θ.

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida do cateto adjacente a } \theta}$$

EXEMPLO 1

Seja o triângulo ABC retângulo em **A**, cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem 9 cm e 11 cm, respectivamente.

Os ângulos $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{C}}$ são agudos (o cateto $\overline{AB}$ é oposto a $\hat{\mathbf{C}}$ e adjacente a $\hat{\mathbf{B}}$, e o cateto $\overline{AC}$ é oposto a $\hat{\mathbf{B}}$ e adjacente a $\hat{\mathbf{C}}$). Daí:

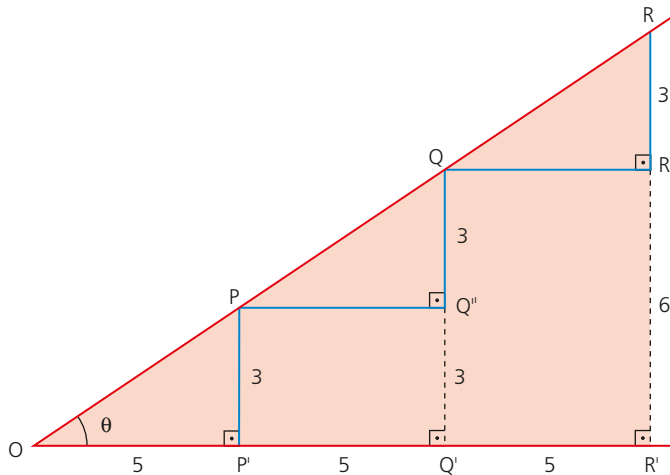
$$\text{tg } \hat{B} = \frac{11 \text{ cm}}{9 \text{ cm}} = \frac{11}{9} \quad \text{e} \quad \text{tg } \hat{C} = \frac{9 \text{ cm}}{11 \text{ cm}} = \frac{9}{11}$$

Tabela de razões trigonométricas

Na figura **A** notamos que a cada deslocamento horizontal (à direita) de 5 u.c. (unidades de medida de comprimento) corresponde um deslocamento vertical de 3 u.c. (para cima).

figura **A**

OBSERVAÇÃO

A notação med(PÔP') = θ deve ser lida como: a medida do ângulo PÔP' é igual a θ.

A figura **A** mostra a invariância da tangente do ângulo θ através da semelhança entre triângulos (△OPP' ~ △OQQ' ~ △ORR'...):

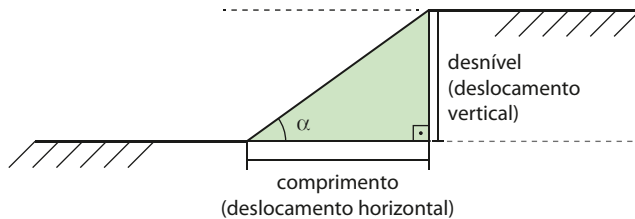
$$\begin{cases} \triangle OPP'\text{: } \text{tg } \theta = \dfrac{3}{5} \\ \triangle OQQ'\text{: } \text{tg } \theta = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} \\ \triangle ORR'\text{: } \text{tg } \theta = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

O valor de tg θ é sempre o mesmo, independentemente do triângulo retângulo considerado.

A cada medida de ângulo agudo corresponde um único valor da respectiva tangente.

Na página 272 encontramos uma tabela trigonométrica. Ela traz os valores aproximados das tangentes, e de outras razões trigonométricas, que serão estudadas a seguir.

EXEMPLO 2

Voltando ao exemplo introdutório, passeios públicos com declividade maior que 8,33% não são considerados rotas acessíveis. Vamos calcular qual é a medida do ângulo máximo que uma rampa forma com a horizontal para ser considerada acessível.

Chamando de α a medida do ângulo máximo, devemos ter $\text{tg}\ \alpha = 8{,}33\% = 0{,}0833$.

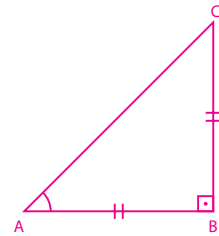
Procuramos, no corpo da tabela da página 272, o valor mais próximo de 0,0833 na coluna da "Tangente", que é o valor 0,08749, correspondente ao ângulo 5°.

Assim, o ângulo máximo que uma rampa forma com a horizontal para ser considerada acessível mede aproximadamente 5°.

PENSE NISTO:

Qual é a medida do ângulo associado a uma rampa com declividade 100%? Consulte a tabela da página 272.

$\text{tg}\ (\hat{CAB}) = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \text{tg}\ (\hat{CAB}) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(\hat{CAB}) = 45°$

Seno e cosseno de um ângulo agudo

Na situação da figura **A** da página anterior, qual seria, sobre a "rampa", o deslocamento correspondente a um deslocamento horizontal de 5 u.c.?

O teorema de Pitágoras responde:

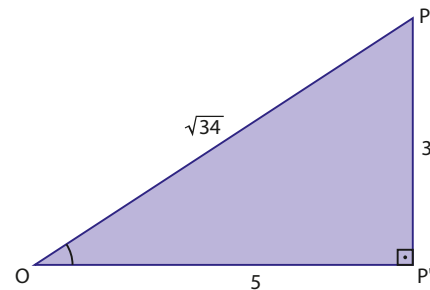
$$OP^2 = d^2 = 5^2 + 3^2 \Rightarrow d = \sqrt{34} \simeq 5{,}83$$

Fixado o ângulo θ, a cada 5 u.c. de deslocamento horizontal (ou a cada 3 u.c. de deslocamento vertical) corresponde um deslocamento, sobre a rampa, de $\sqrt{34}$ u.c.

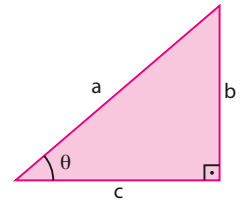
Podemos também relacionar essas grandezas por meio das seguintes razões:

- $\frac{3}{\sqrt{34}}$ exprime a razão entre as medidas do deslocamento vertical e do deslocamento sobre a rampa;
- $\frac{5}{\sqrt{34}}$ exprime a razão entre as medidas do deslocamento horizontal e do deslocamento sobre a rampa.

A primeira razão recebe o nome de **seno de θ** e é indicada por $\text{sen}\ \theta = \frac{3}{\sqrt{34}}$.

A segunda razão recebe o nome de **cosseno de θ** e é indicada por $\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{34}}$.

De modo geral, em um triângulo retângulo, definimos o seno e o cosseno de cada um dos ângulos agudos.

- O seno de um ângulo agudo é dado pela razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

Medida da hipotenusa: **a**.
Medida dos catetos: **b** e **c**.

- O cosseno de um ângulo agudo é dado pela razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

$$\cos \theta = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \theta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

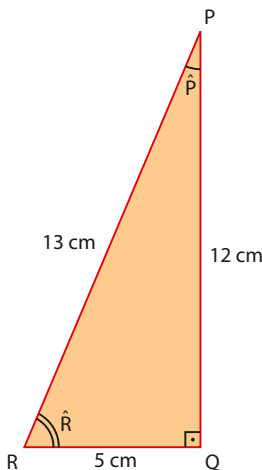
PENSE NISTO:

As razões seno, cosseno e tangente são expressas em alguma unidade de medida?

Considerando θ o ângulo agudo assinalado no triângulo anterior, temos que:

$$\text{sen } \theta = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos \theta = \frac{c}{a}$$

Não. As razões seno, cosseno e tangente são simplesmente números reais por serem quocientes entre as medidas (na mesma unidade) dos comprimentos de dois segmentos de reta.

EXEMPLO 3

No triângulo retângulo ao lado, temos:

$\text{sen } \hat{P} = \frac{5 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} = \frac{5}{13}$ e

$\text{sen } \hat{R} = \frac{12 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} = \frac{12}{13}$

$\cos \hat{P} = \frac{12 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} = \frac{12}{13}$ e

$\cos \hat{R} = \frac{5 \text{ cm}}{13 \text{ cm}} = \frac{5}{13}$

PENSE NISTO:

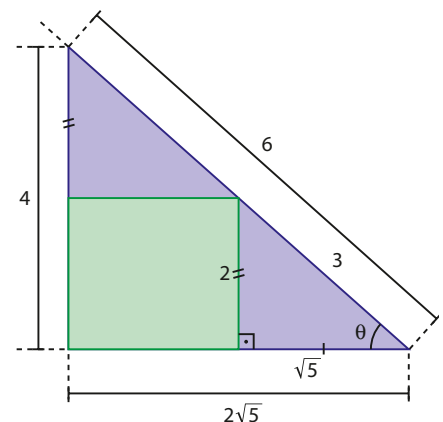
Entre os valores sen $\hat{P}$, cos $\hat{P}$, sen $\hat{R}$ e cos $\hat{R}$, quais são iguais?

$\text{sen } \hat{P} = \cos \hat{R}$ e $\text{sen } \hat{R} = \cos \hat{P}$.
De fato, temos $\text{sen } \hat{P} = \frac{QR}{PR} = \cos \hat{R}$ e
$\cos \hat{P} = \frac{PQ}{PR} = \text{sen } \hat{R}$.
Na seção *Troque ideias*, o estudante terá a oportunidade de verificar a validade dessa propriedade.

Também são invariantes o seno e o cosseno de um determinado ângulo; independentemente do triângulo retângulo tomado, cada uma das razões tem sempre o mesmo valor.

No caso da figura ao lado:

- $\text{sen } \theta = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \dots$
- $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \dots$

Por isso, a tabela trigonométrica apresenta também um único valor para o seno (e para o cosseno) de um determinado ângulo agudo.

Vamos considerar, por exemplo, um ângulo θ de medida 40°. Na tabela, verificamos que:

$$\text{sen } 40° = 0,64279 \qquad \cos 40° = 0,76604 \qquad \text{tg } 40° = 0,83910$$

Esses valores são aproximados e contêm arredondamentos e, eventualmente, dependendo do problema, podem ser arredondados ainda mais.

Além da tabela, é possível obter também as razões trigonométricas de um ângulo agudo com uma calculadora científica.

O primeiro passo é colocá-la em uma configuração em que a medida do ângulo esteja expressa em graus. Para isso, pressionamos:

A abreviação DEG vem do inglês *degree*, que significa "grau".

- Para saber o valor de tg 40°, pressionamos:

TAN → 4 0 → = → 0.839099631

Obtemos o valor aproximado: tg 40° = 0,839099631.

- Para conhecer o valor de sen 40°, pressionamos:

SIN → 4 0 → = → 0.642787610

Obtemos o valor aproximado sen 40° = 0,642787610.

- Para obter o valor de cos 40°, pressionamos:

COS → 4 0 → = → 0.766044443

Obtemos o valor aproximado cos 40° = 0,766044443.

Por meio da calculadora científica também podemos determinar a medida de um ângulo agudo a partir de uma de suas razões trigonométricas.

Veja a tecla $\sin^{-1}$ SIN.

Acima dela aparece a opção $\sin^{-1}$, que corresponde à segunda função dessa tecla. Essa opção é ativada, em geral, por meio da tecla SHIFT.

Assim, por exemplo, se quisermos saber qual é o ângulo agudo cujo seno vale 0,35, basta seguir a sequência abaixo:

Isso significa que o ângulo pedido mede aproximadamente 20,5°, isto é, 20°30'.

Observe que a calculadora fornece o ângulo com uma precisão muito maior que a tabela, pois esta utiliza apenas valores inteiros em graus.

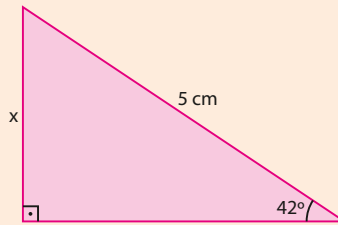
Para sabermos qual é o ângulo agudo cuja tangente vale 2,5, fazemos assim:

O ângulo mede aproximadamente 68,2°, ou seja, 68°12'.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Professor, é interessante recordar os submúltiplos do grau: minuto e segundo.
1° = 60' (60 minutos) e
1' = 60'' (60 segundos)
Daí: $0,2° = (0,2 \cdot 60') = 12'$
No início do volume 2 voltaremos a essas relações.

EXERCÍCIOS **RESOLVIDOS**

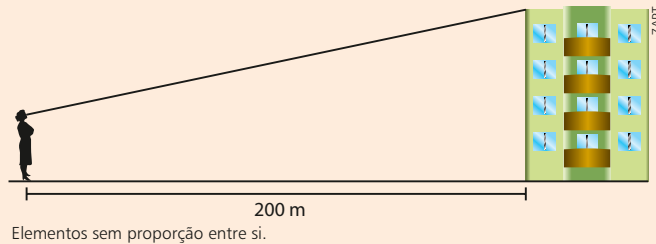
1 Determine o valor de **x** na figura:

Solução:

Em relação ao ângulo de 42°, o cateto de medida **x** é o cateto oposto e 5 cm é a medida da hipotenusa. Desse modo, vamos usar a razão seno.

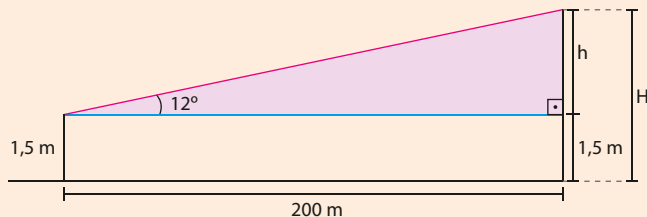
De fato: $\text{sen } 42° = \dfrac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \cdot \text{sen } 42°$

Consultando a tabela ou utilizando uma calculadora científica, obtemos o valor de $\text{sen } 42° \simeq 0{,}66913$. Assim, $x \simeq (5 \text{ cm}) \cdot 0{,}66913 \simeq 3{,}35$ cm.

2 Uma mulher, cujos olhos estão a 1,5 m do solo, avista, sob um ângulo de 12°, o topo de um edifício que se encontra a 200 m dela. Qual é a altura aproximada do edifício?

Elementos sem proporção entre si.

Solução:

No triângulo retângulo da figura abaixo, temos:

$$\text{tg } 12° = \frac{h}{200} \Rightarrow h = 200 \cdot \text{tg } 12°$$

Consultando a tabela ou utilizando uma calculadora científica, encontramos $\text{tg } 12° \simeq 0{,}21256$.

Temos, então:

$$h \simeq 200 \cdot 0{,}21256 \simeq 42{,}512$$

e

$$H \simeq 42{,}512 + 1{,}5 \simeq 44$$

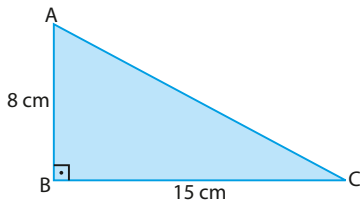
A altura aproximada do edifício (**H**) é 44 m.

EXERCÍCIOS

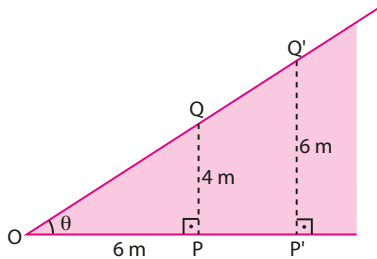
Utilize a tabela trigonométrica da página 272 ou uma calculadora científica sempre que necessário.

1 Com base na figura, determine:

a) sen Â, cos Â e tg Â.

b) sen Ĉ, cos Ĉ e tg Ĉ.

2 Observe a figura seguinte:

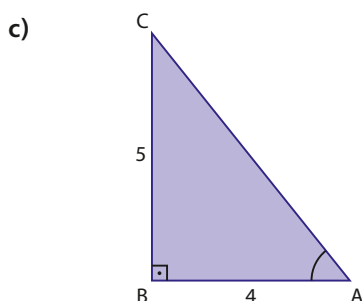
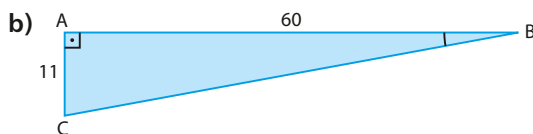
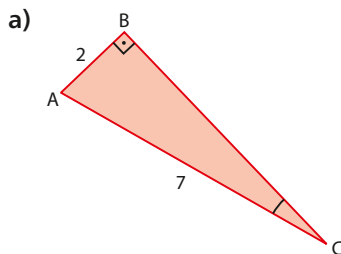
Determine:

a) tg θ

b) a distância de **O** a **P'**

3 Em cada caso, determine o seno do ângulo agudo assinalado.

a)

b)

c)

4 Cada item traz as medidas dos lados de um triângulo retângulo em que **a** representa a medida da hipotenusa, e **b** e **c** são as medidas dos catetos. Determine o cosseno de cada um dos ângulos agudos, **B̂** e **Ĉ**, opostos, respectivamente, a **b** e a **c**.

a) b = 3 cm e c = 4 cm.

b) a = 12 cm e b = 7 cm.

5 Um observador avista o topo de um obelisco de 120 m de altura sob um ângulo de 27°. Considere desprezível a altura do observador.

a) A que distância o observador se encontra da base do obelisco?
Use os valores: sen 27° $\simeq$ 0,45, cos 27° $\simeq$ 0,9 e tg 27° $\simeq$ 0,5.

b) Aproximando-se 100 m do obelisco, em linha reta, o observador passa a mirá-lo sob um ângulo α. Determine α.

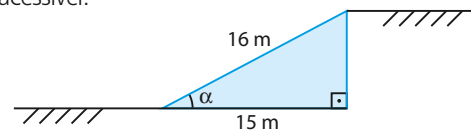
6 Um barco atravessa um rio de 97 m de largura em um trecho em que as margens são paralelas. Devido à correnteza, segue uma direção que forma um ângulo de 76° com a margem de partida. Qual é a distância percorrida pelo barco?

Enunciado para as questões 7 e 8.
As normas de acessibilidade de determinada cidade estabelecem que a declividade (razão entre o deslocamento vertical e o deslocamento horizontal) máxima aceitável para uma rampa é de 8,33%.

7 Um arquiteto desenvolveu um projeto de uma rampa para vencer um desnível de 3,2 m entre dois pisos. Para respeitar a norma acima, qual deverá ser o comprimento horizontal mínimo dessa rampa? Para facilitar os cálculos, use a aproximação: $\frac{1}{12} \simeq 0,0833$.

8 Observando o esboço do projeto da rampa abaixo, determine:

a) o valor aproximado do desnível entre os dois pisos.

b) o valor de tg α; indique se a rampa é ou não acessível.

9 Uma escada de pedreiro de 6 m de comprimento está apoiada em uma parede. Se o pé da escada dista 4 m dessa parede, determine:

a) a medida do ângulo que a escada forma com a parede.

b) a altura que o ponto mais alto da escada atinge em relação ao solo. Considere $\sqrt{5} \simeq 2,24$.

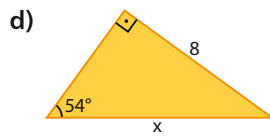
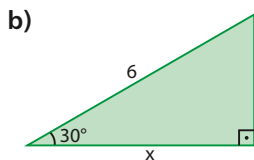
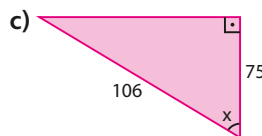
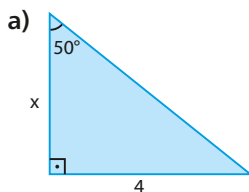
10 O acesso a um mirante, situado a 200 m de altura em relação ao solo, pode ser feito por duas trilhas retilíneas $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$, cujas inclinações em relação ao solo são de 10° e 15°, respectivamente. Suponha constantes essas inclinações.

T_1 10° T_2 15°

a) Em qual das trilhas a distância percorrida é menor?

b) Qual é a diferença entre as distâncias percorridas nas duas trilhas para se chegar ao mirante? Aproxime os resultados dos cálculos para números inteiros. Considere sen 10° ≃ 0,174; cos 10° ≃ 0,985; sen 15° ≃ 0,259; e cos 15° ≃ 0,966.

11 Em uma via retilínea e inclinada, um pedestre eleva-se 250 m a cada 433 m de deslocamento horizontal. Qual é a medida do ângulo de inclinação dessa via com a horizontal?

12 Determine a medida aproximada de **x** em cada caso:

13 Um pequeno avião voa a uma altura de 3 km. O piloto planeja o procedimento de descida de modo tal que o ângulo formado pela horizontal e pela sua trajetória seja de 20°. Que distância, aproximadamente, o avião percorrerá até o pouso?

THE IMAGE BANK/ GETTY IMAGES

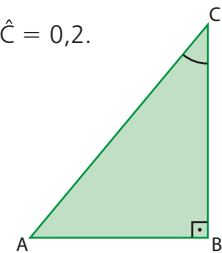
14 Duas vias de contorno retilíneo intersectam-se em um entroncamento **E**, formando um ângulo de 75°. Determine a menor distância entre uma das vias e uma área de refúgio, situada na outra via, a 1 200 m de **E**.

15 Uma região montanhosa foi mapeada por fotografias aéreas: dois pontos, **P** e **Q**, devem ser unidos por um pequeno túnel retilíneo. Considere a reta perpendicular ao traçado do túnel, passando por **P**. Nela, tome o ponto **T**, distante 70 m de **P**; desse ponto, situado no mesmo plano de **P** e **Q**, seria possível avistar as extremidades do túnel sob um ângulo de 55°.
Qual será o comprimento aproximado do túnel a ser construído?

16 Explique por que todos os valores de seno e cosseno que constam na tabela trigonométrica são números reais pertencentes ao intervalo]0; 1[, mas o mesmo não acontece com os valores das tangentes.

17 Na figura, AB = 6 cm e sen $\hat{C}$ = 0,2.
Determine:

a) a medida da hipotenusa do triângulo;

b) o seno do outro ângulo agudo do triângulo.

18 Em certo instante, um poste de 10 m de altura projeta uma sombra de **a** metros de comprimento. Obtenha, em cada caso, a medida aproximada do ângulo que os raios solares formam com o solo horizontal nesse instante.

a) a = 6

b) a = 12

c) a = 10

19 Para combater o fogo em um apartamento de um edifício, os bombeiros usaram uma escada de 65 m de comprimento.
Ela ficou apoiada sobre a carroceria do caminhão do corpo de bombeiros, a 3 m de altura do solo, formando um ângulo de 37° com o plano horizontal que contém a carroceria. Completamente esticada, a escada foi fixada na janela do último andar do edifício. Considere que, nesse edifício, cada andar tem 2,8 m de altura.

a) Faça uma figura para representar a situação descrita acima.

b) Qual é o número de andares desse edifício? Use os seguintes valores: sen 37° ≃ 0,6; cos 37° ≃ 0,8 e tg 37° ≃ 0,75.

Ângulos notáveis

Os ângulos de 30°, 45° e 60°, pela frequência com que aparecem nos problemas de Geometria, são chamados de **ângulos notáveis**.

As razões trigonométricas desses ângulos já foram apresentadas na tabela trigonométrica. Porém, como você já percebeu, os valores encontrados na tabela (ou na calculadora científica) são aproximados e contêm muitas casas decimais e, a cada problema, procedemos a arredondamentos. Para os ângulos notáveis, vamos escrever esses valores de uma maneira que dispense esses arredondamentos.

Para isso, vamos nos valer de duas figuras: triângulo equilátero de lado com medida ℓ e quadrado de lado medindo ℓ.

Triângulo equilátero

A altura $\overline{AH}$ coincide com a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$; assim, $\overline{HC}$ mede $\frac{\ell}{2}$.

$\overline{AH}$ também coincide com a bissetriz de $B\hat{A}C \Rightarrow \text{med}(C\hat{A}H) = 30°$.

Além disso, $\overline{AH}$ mede $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, como vimos no capítulo anterior.

Para o ângulo de 30°, temos, no $\triangle AHC$:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{tg } 30° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

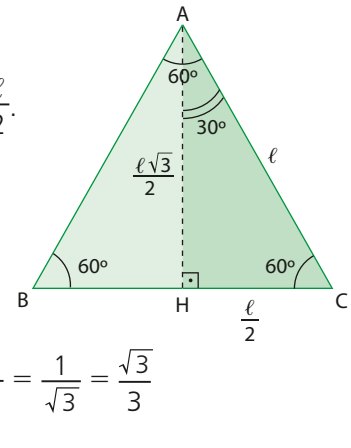
Para o ângulo de 60°, temos, no $\triangle AHC$:

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2} \qquad \text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \sqrt{3}$$

Observe que:

$\text{sen } 30° = \cos 60°$

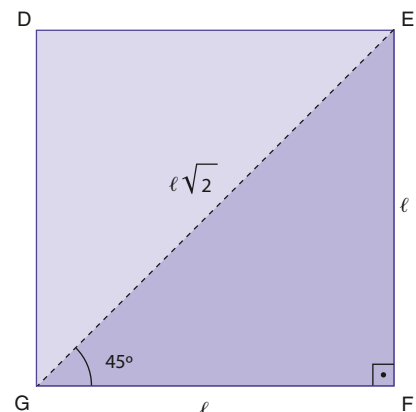
$\cos 30° = \text{sen } 60°$

$\text{tg } 30° = \frac{1}{\text{tg } 60°}$ (ou $\text{tg } 30° \cdot \text{tg } 60° = 1$)

Quadrado

Pelo teorema de Pitágoras, a diagonal mede $\ell\sqrt{2}$, conforme visto no capítulo anterior.
Temos, no $\triangle EFG$:

$$\text{sen } 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observe que $\text{sen } 45° = \cos 45°$.

$$\text{tg } 45° = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Temos, assim, a tabela:

Razão \ Ângulo	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

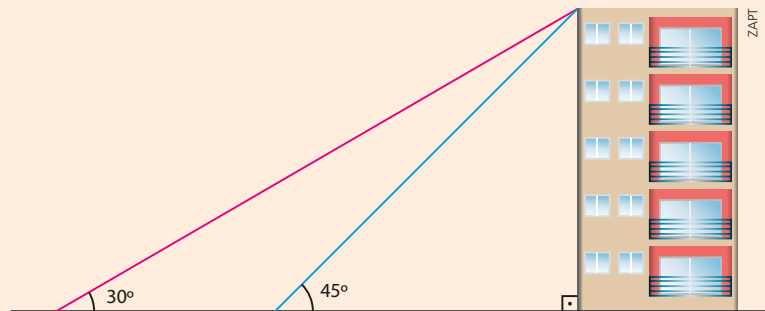
OBSERVAÇÃO

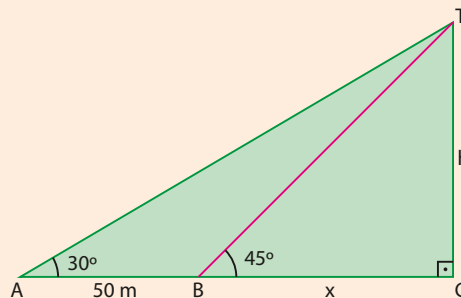
Geralmente, os valores dessa tabela são utilizados sempre que aparece alguma razão trigonométrica de um ângulo notável no lugar dos valores que aparecem na tabela completa de razões trigonométricas.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 De um ponto de observação localizado no solo, vê-se o topo de um edifício sob um ângulo de 30°. Aproximando-se 50 m do prédio, o ângulo de observação passa a ser de 45°. Determine:

a) a altura do edifício;

b) a distância do edifício ao primeiro ponto de observação.

Solução:

Observe que o triângulo BCT é isósceles, pois med($C\hat{T}B$) = 45°. Assim, temos que x = h.

a) No triângulo retângulo ACT:

$$\text{tg } 30° = \frac{h}{50 + x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{50 + h} \Rightarrow 3h = \sqrt{3}(50 + h) \Rightarrow 3h - h\sqrt{3} = 50\sqrt{3} \Rightarrow h = \frac{50\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{50 \cdot \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \Rightarrow h = 25 \cdot (1 + \sqrt{3}) \simeq 68{,}3$$

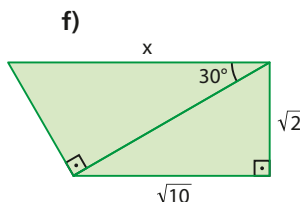
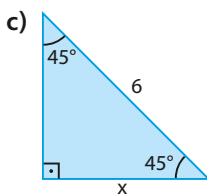
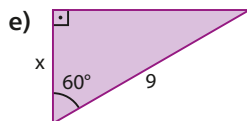
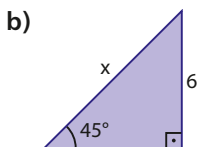
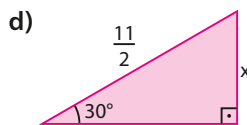
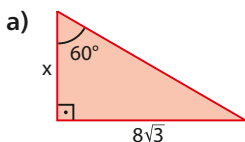
A altura do edifício é de aproximadamente 68,3 m.

b) A distância pedida é a medida de $\overline{AC}$:

$$AC = 50 + x = 50 + 25(1 + \sqrt{3}) \Rightarrow AC = 25(3 + \sqrt{3}) \simeq 118{,}3$$

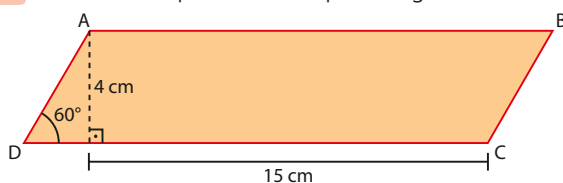
A distância do edifício ao primeiro ponto de observação é de aproximadamente 118,3 m.

EXERCÍCIOS

20 Encontre os valores de **x** em cada caso:

21 Uma escada de pedreiro de 6 m está apoiada em uma parede e forma com o solo um ângulo de 60°. Qual é a altura atingida pelo ponto mais alto da escada? Qual é a distância do pé da escada à parede?

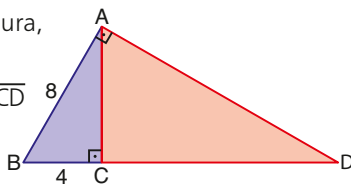
22 Um objeto percorre 8 m ao ser solto sobre um plano inclinado que forma um ângulo de 60° com a horizontal do solo. Determine a altura, em relação ao solo, da qual o objeto foi solto.

23 Obtenha o perímetro de um retângulo, sabendo que uma diagonal mede $5\sqrt{3}$ cm e forma ângulo de 30° com um dos lados do retângulo.

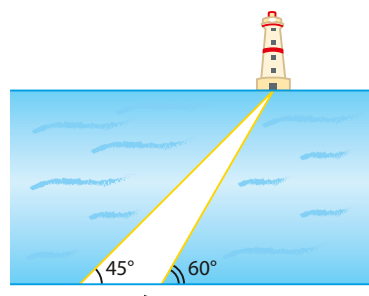
24 Determine o perímetro do paralelogramo ABCD.

25 Com base na figura, determine:

a) a medida de $\overline{CD}$

b) med($\hat{BAC}$)

c) tg ($\hat{BDA}$)

26 Um observador está situado a **x** metros do pé de um prédio. Ele consegue mirar o topo do prédio sob um ângulo de 60°. Afastando-se 40 m desse ponto, ele passa a avistar o topo do prédio sob um ângulo de 30°. Considerando desprezível a altura do observador, determine:

a) o valor de **x**; **b)** a altura do prédio.

27 Em um trecho de rio em que as margens são paralelas, um morador, à beira de uma das margens, avista um farol, situado à beira da outra margem, sob um ângulo de 45°. Caminhando 1 400 m no sentido indicado pela seta na figura, ele passa a mirar o farol sob um ângulo de 60°.

Considerando $\sqrt{3} \simeq 1,7$, obtenha, em quilômetros, a largura do rio nesse trecho.

28 Considere dois projetos hipotéticos de rampa para vencer um desnível de 6 m entre dois pisos:

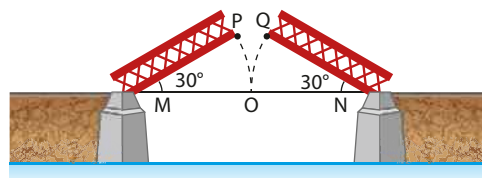
- Projeto I: rampa com declividade de 30%.
- Projeto II: rampa com inclinação de 30° em relação à horizontal.

a) Os dois projetos levam à construção de um mesmo tipo de rampa? Explique.

b) Se a resposta do item *a* for negativa, determine os comprimentos horizontais das rampas dos dois projetos.

c) Qual é (em caso de resposta negativa ao item *a*) a extensão das rampas dos dois projetos?

d) Quanto mede o ângulo de inclinação da rampa do projeto I?

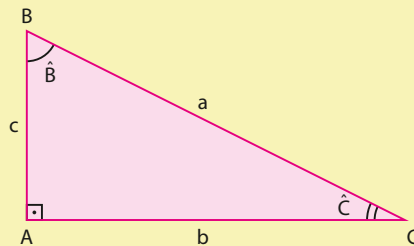
29 Em uma cidade há, sobre uma represa, uma ponte de 30 m de comprimento que se abre, algumas vezes ao dia, para dar passagem a pequenas embarcações. Na figura, **O** é ponto médio de $\overline{MN}$ e $\overset{\frown}{OP}$ e $\overset{\frown}{OQ}$ são arcos de circunferência com centros em **M** e **N**, respectivamente:

Com a ponte completamente aberta, forma-se um vão, representado pelo segmento $\overline{PQ}$. Qual é o comprimento desse vão?

Use $\sqrt{3} \simeq 1,7$.

TROQUE IDEIAS

Relações entre as razões trigonométricas

Nesta seção, vamos construir algumas relações importantes entre as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) estudadas. Essas relações serão retomadas e generalizadas no volume 2 desta coleção.

Considere o triângulo ABC, retângulo em **A**.

Consulte as repostas nas Orientações Didáticas.

Observe que $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

Dois ângulos cuja soma das medidas é 90° são chamados **complementares**.

- Faça o que se pede a seguir.

a) Determine os valores de sen $\hat{B}$, cos $\hat{B}$, sen $\hat{C}$ e cos $\hat{C}$. Qual é a relação entre os valores encontrados?

b) Observe a tabela trigonométrica na página 272 e compare os valores do seno e do cosseno de alguns pares de ângulos complementares. Qual é a relação entre os valores encontrados?

c) Obtenha os valores de tg $\hat{B}$ e de tg $\hat{C}$. Qual a relação existente entre esses valores?

d) Vamos agora descobrir a chamada relação fundamental da trigonometria. Calcule, para o ângulo $\hat{\mathbf{B}}$, a soma do quadrado de seu seno com o quadrado de seu cosseno, isto é, $(\text{sen } \hat{B})^2 + (\cos \hat{B})^2$. Faça o mesmo com o ângulo $\hat{\mathbf{C}}$. O que você observa?

e) Considerando α um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 5 cm e 12 cm, constate, para o ângulo α, a validade da relação encontrada no item *d*.

f) Se α é a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo e $\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$, qual é o valor de $\cos \alpha$? Desenhe ao menos dois triângulos retângulos que satisfazem essa condição.

g) Calcule a razão $\frac{\text{sen } \hat{B}}{\cos \hat{B}}$, e compare com tg $\hat{B}$. Faça o mesmo com o ângulo $\hat{\mathbf{C}}$. O que você observa?

DESAFIO

Em procedimento de descida para pouso num dia ensolarado e sem nuvens, o piloto de um pequeno avião avista a cabeceira da pista sob um ângulo de 35° com sua trajetória horizontal. Depois de 18 segundos, na mesma trajetória horizontal, passa a avistar a cabeceira dessa pista sob um ângulo de 56°. Sabendo que, nesse intervalo de tempo, o avião manteve uma velocidade constante de 300 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, determine, em metros, a altitude do avião nesse intervalo.

Use os valores: $\text{tg } 35° \simeq 0{,}7$ e $\text{tg } 56° \simeq 1{,}5$.

CAPÍTULO 12

Áreas de figuras planas

Introdução

Frequentemente recorremos a objetos do nosso cotidiano para compreender conceitos geométricos. A visualização e a medição desses objetos são estratégias para a descoberta e compreensão de propriedades geométricas.

Em situações tais como calcular a quantidade de pisos necessária na reforma de uma cozinha, o custo para envernizar a superfície de uma porta, ou, ainda, o custo envolvido na confecção de um quadro, as quantidades envolvidas dependem do cálculo de áreas de superfícies planas. As imagens desta página são exemplos de aplicações desses cálculos.

WILLIAM SAAR/ALAMY/FOTOARENA

Fotografias em exposição.

GETTY IMAGES/VSTOCK RF

Colocação de pisos.

SERGIO PEDREIRA/PULSAR IMAGENS

Fachada colorida, Pelourinho, Bahia, 2013.

Neste capítulo, vamos revisar um conteúdo estudado no Ensino Fundamental: o cálculo de **áreas de superfícies planas delimitadas**.

De modo geral, **área** é a medida da extensão de uma superfície, expressa em uma unidade padrão preestabelecida (correspondente à área de um quadrado de lado unitário, isto é, de um quadrado cujo lado mede 1).

Mas como são definidos os padrões de medida?

É o Sistema Internacional de Unidades (SI) que estabelece as unidades básicas de medidas e as unidades derivadas, as quais podem ser expressas a partir das unidades de base. Particularmente, estaremos nos referindo à unidade básica de comprimento – o metro – e às unidades dela derivadas, conforme mostrado ao lado.

Unidade (SI)

Grandeza	Nome	Símbolo
comprimento	metro	m
superfície	metro quadrado	m^2
volume	metro cúbico	m^3

O Sistema Métrico Decimal, criado durante a Revolução Francesa, e o depósito de dois padrões de platina nos Arquivos da República, em Paris, em 22 de junho de 1799, representando o metro e o quilograma, podem ser considerados como a primeira etapa que levou ao atual Sistema Internacional de Unidades. No Brasil, o sistema métrico decimal foi oficialmente introduzido em 1862.

Atualmente, usa-se a seguinte definição de metro, adotada pela Convenção Geral de Pesos e Medidas, em 1983:

Metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz, no vácuo, durante um intervalo de tempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ de segundo.

Vamos agora estabelecer algumas relações entre certas unidades de medida:

$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} \Rightarrow$

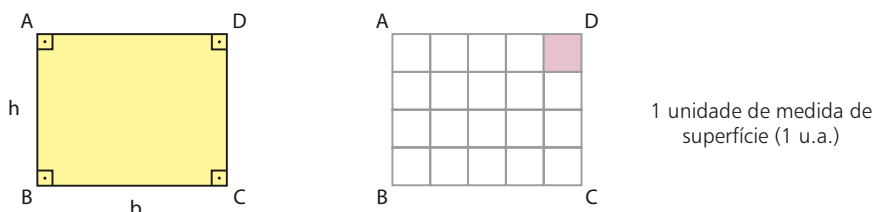
$$\Rightarrow \begin{cases} 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) = (10 \text{ dm}) \cdot (10 \text{ dm}) \Rightarrow 1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10^2 \text{ dm}^2 \\ 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) = (10 \text{ dm}) \cdot (10 \text{ dm}) \cdot (10 \text{ dm}) \Rightarrow 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ dm}^3 \end{cases}$$

$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) = (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ cm}) \Rightarrow 1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2 = 10^4 \text{ cm}^2 \\ 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) \cdot 1(\text{m}) = (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ cm}) \cdot (100 \text{ cm}) \Rightarrow 1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 \end{cases}$$

Área do retângulo

A figura à esquerda representa o retângulo ABCD. Supondo que o lado $\overline{AB}$ mede 4 u.c. e o lado $\overline{BC}$ mede 5 u.c. – em que u.c. é a unidade de medida de comprimento –, podemos dividir o retângulo em 20 pequenos quadrados, cada um dos quais com 1 unidade de medida de superfície (ou, simplesmente, unidade de àrea; indica-se por u.a.), conforme figura à direita.

1 unidade de medida de superfície (1 u.a.)

Assim, a área (**A**) do retângulo ABCD é: A = (5 u.c.) · (4 u.c.) = 20 u.a.

Se, num retângulo ABCD, chamamos:

- **A**: área da superfície limitada pelo retângulo ABCD ou, simplesmente, área do retângulo ABCD;
- **b**: medida da base $\overline{BC}$;
- **h**: medida da altura $\overline{AB}$;

temos:

$$A = b \cdot h$$

Professor, veja nas Orientações Didáticas a demonstração dessa fórmula no caso em que as dimensões do retângulo são números racionais.

A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

OBSERVAÇÃO

De modo geral e sem perda de generalidade, a expressão A = b · h também pode ser usada para calcular a área de retângulos nos quais as medidas dos lados são expressas por números reais positivos.

EXEMPLO 1

Vamos calcular a área de um retângulo cujas dimensões são: 13,4 cm e 0,25 m.

Como, para o cálculo da área, as dimensões devem estar em uma mesma unidade, então, lembrando que 1 m = 100 cm, temos:

$$b = 13,4 \text{ cm e } h = 0,25 \cdot 100 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

Assim, $A = b \cdot h \Rightarrow A = (13,4 \text{ cm}) \cdot (25 \text{ cm}) \Rightarrow A = 335 \text{ cm}^2$.

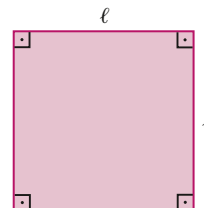
Ou, ainda, no caso de $b = 13,4 \cdot \frac{1}{100}$ m $= 0,134$ m e $h = 0,25$ m, temos:

$$A = (0,134 \text{ m}) \cdot (0,25 \text{ m}) \Rightarrow A = 0,0335 \text{ m}^2$$

Área do quadrado

Como todo quadrado é um retângulo cuja medida da base é igual à medida da altura, a fórmula da área do retângulo pode ser usada para obter-se a expressão da área de um quadrado.

Dessa forma, se ℓ é a medida do lado de um quadrado, então, se $b = \ell$ e $h = \ell$, temos:

$$A = b \cdot h \Rightarrow A = \ell \cdot \ell \Rightarrow \boxed{A = \ell^2}$$

A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado.

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

1 Um artesão pretende usar retalhos para fazer uma colcha de formato retangular com as seguintes dimensões: 2,40 m de comprimento por 1,80 m de largura. Se os retalhos forem recortados em pedaços quadrados, cada qual com 20 cm de lado, quantos pedaços serão necessários para compor tal colcha?

Solução:

- Determinemos a área $\mathbf{A_1}$ da superfície da colcha:

  $A_1 = b \cdot h = (2,40 \text{ m}) \cdot (1,80 \text{ m}) = 4,32 \text{ m}^2$
- Seja **n** o total de pedaços de retalho que deverão compor a colcha.

  Cada pedaço deverá ter a forma de um quadrado de 20 cm de lado, então a área $\mathbf{A_2}$ de sua superfície é dada por $A_2 = \ell^2 = (20 \text{ cm}) \cdot (20 \text{ cm}) = (0,2 \text{ m}) \cdot (0,2 \text{ m}) = 0,04 \text{ m}^2$.

Como as medidas de comprimento e largura da colcha são divisíveis pela medida do lado do retalho, a área da superfície dos **n** pedaços reunidos — que deverão revestir os 4,32 m² — será igual a $n \cdot A_2 = n \cdot 0,04 \text{ m}^2$.

Logo, como devemos ter $n \cdot A_2 = A_1$, então $n \cdot 0,04 = 4,32$, ou seja, $n = 108$ pedaços.

EXERCÍCIOS

1 Determine a área de:

a) um retângulo cujas dimensões são 6,5 cm e 12 cm;

b) um quadrado cujo lado mede $5\sqrt{3}$ m;

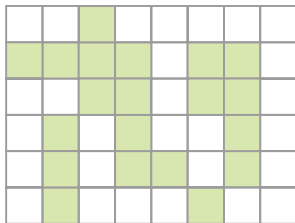
c) um retângulo cuja base mede 16 dm e cuja diagonal mede 20 dm;

d) um quadrado que tem 24 m de perímetro;

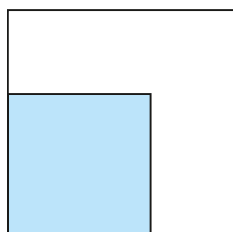
e) um retângulo cuja diagonal forma um ângulo de 30° com o lado que tem 12 dm de comprimento;

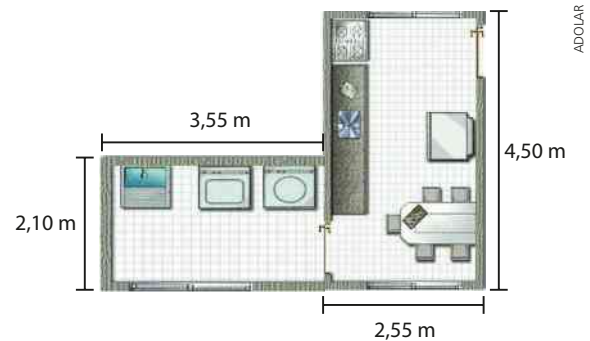
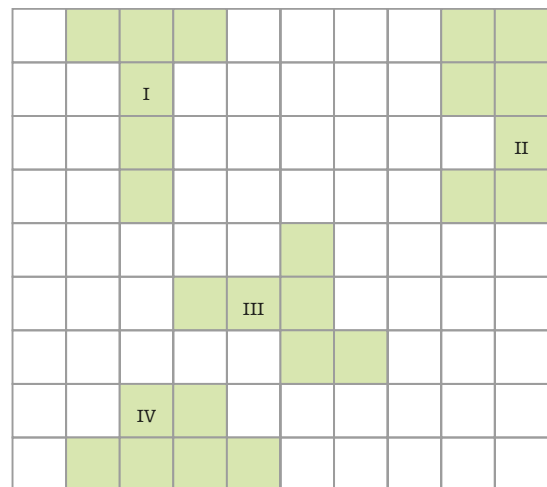
f) um quadrado cuja diagonal mede $5\sqrt{2}$ mm.

2 Um mapa de certa região foi construído na escala 1 : 20 000, isto é, cada centímetro no mapa corresponde a 20 000 cm = 200 m de medida real. Determine, em metros quadrados, a área real de uma chácara que, nesse mapa, é representada por um quadrado cujo lado mede 0,3 cm.

3 A figura apresenta uma malha quadriculada em que a medida do lado de cada quadradinho é 2,5 u.c. (unidades de medida de comprimento). Determine a área da região colorida.

4 Um jardim tem a forma de um retângulo cujas dimensões estão entre si na razão $\frac{3}{4}$. Se esse jardim tem 28 m de perímetro, determine sua área.

5 Um azulejo tem a forma de um quadrado cuja diagonal mede $15\sqrt{2}$ cm. Se as paredes de um salão de formato retangular, cujas dimensões são (54 m) × (4,5 m), deverão ser totalmente revestidas por tais azulejos, então, supondo que nenhum deles se quebre no ato da colocação, quantos azulejos serão usados?

6 Na figura, a região colorida representa uma piscina de formato quadrado, construída no quintal de uma casa. Pretende-se reduzir de 2 m as dimensões da superfície dessa piscina, de modo que ela passe a ocupar 36% da área do quintal. Se o quintal tem a forma de um quadrado cuja área é 225 m², determine quantos metros quadrados aumentará a superfície do quintal não ocupada pela piscina.

7 Sobre uma mesa plana de formato retangular, um arquiteto montou a maquete de um projeto de construção de um edifício. Sabendo que a superfície dessa mesa tem 52 dm de perímetro e área igual a 144 dm², determine suas dimensões.

8 A figura abaixo mostra a planta baixa da cozinha e da área de serviço de um apartamento. Considerando desprezível a espessura das paredes, determine a área total da superfície das dependências mostradas.

9 Na malha quadriculada apresentada abaixo, as regiões sombreadas – I, II, III e IV – representam as superfícies de quatro sítios planos onde, respectivamente, os irmãos – Artur, Lucas, Edson e Luiza – pretendem construir suas casas.

Sabendo que a área total da malha é 36 000 m², responda:

a) Quais sítios têm perímetros iguais?

b) Qual dos irmãos pretende construir no sítio que tem a superfície de maior área? Qual é a área dessa superfície?

10 Afrânio dispõe de um terreno plano e de formato retangular. Pretendendo vendê-lo, dividiu-o em 4 lotes retangulares cujas medidas das superfícies, em metros quadrados, são indicadas na figura seguinte:

750	300
600	X

Se o metro quadrado de cada lote for vendido por R$ 86,00, determine o preço de venda do lote cuja superfície tem X m² de área.

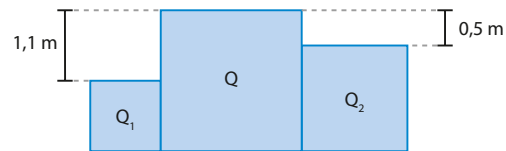
11 Para a apresentação de um espetáculo ao ar livre, foi destinada aos espectadores uma área retangular medindo 180 m de comprimento por 60 m de largura. Supondo que uma única pessoa ocupe uma área média de 2 500 cm², qual é o número máximo de pessoas que poderão assistir ao espetáculo na área reservada?

12 O piso retangular de uma sala, com 9,60 m de comprimento por 4,50 m de largura, deve ser revestido com ladrilhos quadrados. Admitindo-se que não haverá perda de material e que será utilizado o menor número de ladrilhos inteiros, pergunta-se:

a) Quantos ladrilhos deverão ser colocados?

b) Qual a área da superfície de cada ladrilho?

13 Paulo e Carlos possuem tabletes de chocolate de formas quadrada e retangular, respectivamente. O tablete de Paulo tem 12 cm de perímetro e o de Carlos tem a medida da base igual ao triplo da medida da altura e perímetro igual a 12 cm. Sabendo que os tabletes possuem a mesma espessura e que Paulo propôs a troca com Carlos, verifique se é vantagem para Carlos aceitar a troca.

14 Três mesas, cujos tampos têm a forma de um quadrado, foram justapostas lado a lado, conforme é mostrado na figura abaixo.

Sabendo que as áreas das superfícies dos tampos dessas mesas somam 7,06 m², determine a área de **Q** (superfície do tampo da maior mesa).

Área do paralelogramo

Determinemos a área do paralelogramo ABCD, representado na figura 1, em que **b** e **h** são as medidas da base e da altura, respectivamente.

Observe que, projetando-se os vértices **A** e **D** sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, obtêm-se os pontos **P** e **Q**, respectivamente, ficando assim determinado o retângulo APQD, como é mostrado na figura 2.

Note que os triângulos APB e DQC são congruentes e, portanto, têm áreas iguais.

Assim, a área do paralelogramo ABCD é igual à área do retângulo APQD, ou seja:

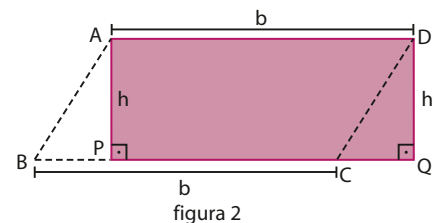
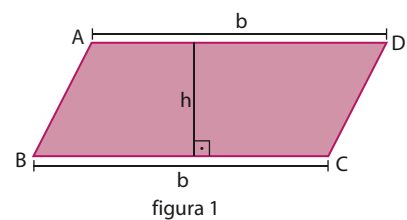
$$A = b \cdot h$$

A área de um paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

figura 1

figura 2

PENSE NISTO:

Se **Q** é o conjunto de todos os quadrados, **P** é o conjunto de todos os paralelogramos e **R** é o conjunto de todos os retângulos, é correto afirmar que Q ⊂ R ⊂ P?

- Como todo paralelogramo tem os lados opostos paralelos entre si, então: Q ⊂ P e R ⊂ P.
- Como em todo retângulo os lados adjacentes são perpendiculares entre si, então Q ⊂ R. Logo, se Q ⊂ R e R ⊂ P, temos Q ⊂ R ⊂ P.

EXEMPLO 2

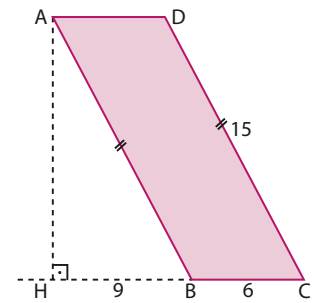
Vamos determinar a área do paralelogramo ABCD, representado na figura, considerando que a unidade das medidas seja o centímetro.

Note que a altura do paralelogramo é a perpendicular $\overline{AH}$ à reta suporte do lado $\overline{BC}$, traçada pelo vértice **A**.

Como o triângulo AHB é retângulo, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$AH^2 + HB^2 = AB^2 \Rightarrow AH^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow AH = 12 \text{ cm}$$

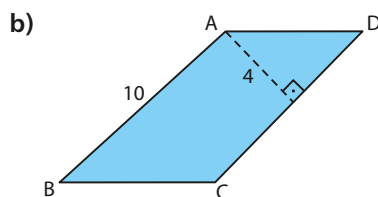
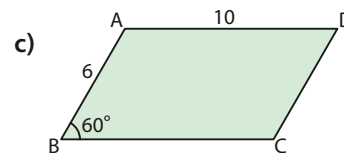
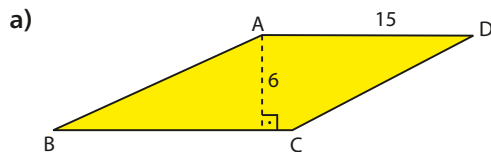
Logo, a área de ABCD é:

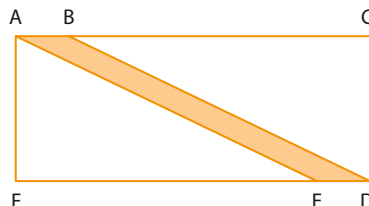
$$A = BC \cdot AH = (6 \text{ cm}) \cdot (12 \text{ cm}) = 72 \text{ cm}^2$$

EXERCÍCIOS

15 Em cada caso, determine a área do paralelogramo ABCD, considerando que a unidade das medidas indicadas é o centímetro.

a)

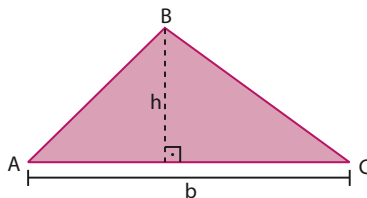
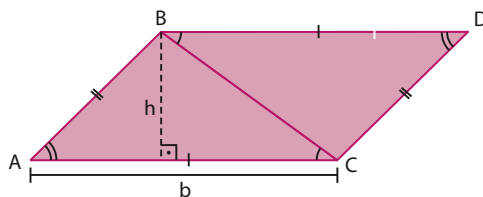
c)

b)

16 A superfície plana de um jardim, no formato de um paralelogramo cujos lados medem 8 m e 12 m e formam entre si um ângulo de 60°, deve ser coberta de grama. Qual é a área desse jardim?

17 A figura abaixo apresenta o esquema de um projeto para a construção de um jardim, em um terreno plano de formato retangular (ACDF), cuja superfície tem 504 m².

Nesse esquema, a região destacada (ABDE) é um paralelogramo que representa uma passagem para pedestres que dividirá o jardim em dois canteiros triangulares (AFE e DCB).

Se $AE = 30$ m e $AF = \frac{3}{4} \cdot FE$, qual será a área da passagem para pedestres?

Área do triângulo

Seja o triângulo ABC, cuja base $\overline{AC}$ mede **b** e a altura relativa a essa base mede **h**, representado na figura abaixo.

Note que as respectivas retas paralelas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, traçadas pelos vértices **B** e **C**, intersectam-se no ponto **D**, determinando assim o paralelogramo ABCD, cujas medidas da base e da altura são **b** e **h**, conforme mostrado na figura abaixo.

Como AB = DC, med($B\hat{A}C$) = med($B\hat{D}C$) e AC = DB, os triângulos ABC e DCB são congruentes e, portanto, suas áreas são iguais.

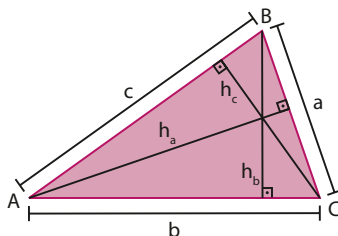
Logo, a área do triângulo ABC é igual à metade da área do paralelogramo ABCD, ou seja:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura.

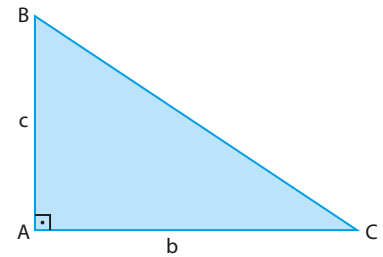
OBSERVAÇÃO

De modo geral, se h_a, h_b e h_c são as respectivas medidas das alturas relativas aos lados de medidas **a**, **b** e **c**, temos:

$$A = \frac{a \cdot h_a}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{b \cdot h_b}{2} \quad \text{ou} \quad A = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Casos particulares

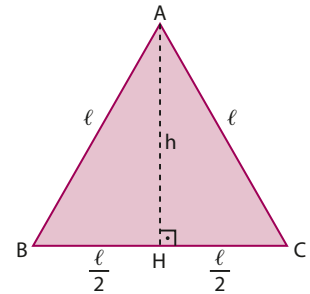
Área do triângulo retângulo

Observe na figura que, no triângulo ABC, o cateto $\overline{AB}$ é a altura relativa ao cateto $\overline{AC}$. Assim, se AB = c e AC = b, a área **A** do triângulo é dada por:

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

Área do triângulo equilátero

Se **ℓ** é a medida do lado do triângulo equilátero ABC, representado na figura, temos:

$\overline{AH}$ é altura e mediana relativas ao lado $\overline{BC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AH} \perp \overline{BC} \\ \textbf{H} \text{ é o ponto médio de } \overline{BC} \Rightarrow HC = \frac{BC}{2} = \frac{\ell}{2} \end{cases}$$

Aplicando-se o teorema de Pitágoras no △AHC, temos:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ $$A = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

2 Determine a área do quadrilátero ABCD representado na figura, sabendo que: AB = 6 cm; AD = 10 cm; a diagonal $\overline{AC}$ determina com os lados $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ ângulos de 60°; e o lado $\overline{BC}$ é perpendicular ao lado $\overline{AB}$.

Solução:

A área **A** do quadrilátero ABCD é tal que $A = A_1 + A_2$, em que $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ são as áreas dos triângulos ACD e ABC, respectivamente.

- Cálculo de $\mathbf{A_1}$:

  Como med($A\hat{C}D$) = med($D\hat{A}C$) = 60°, então med($A\hat{D}C$) = 60°, ou seja, o △ACD é equilátero e sua área é dada por:

  $$A_1 = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = 25\sqrt{3}$$

  Logo, a área do triângulo ACD é $25\sqrt{3}$ cm².

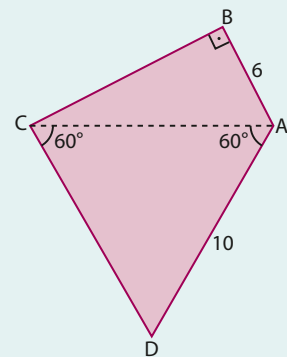
- Cálculo de $\mathbf{A_2}$:

  Como o △ABC é retângulo em **B**, então, pelo teorema de Pitágoras, temos:

  $$AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow 10^2 = BC^2 + 6^2 \Rightarrow BC = 8$$

  Assim, $A_2 = \frac{1}{2}(BC) \cdot (AB) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \Rightarrow A_2 = 24$

  Então, a área do triângulo ABC é 24 cm².

  Logo, a área do quadrilátero ABCD é $A = A_1 + A_2 = (25\sqrt{3} + 24)$ cm².

EXERCÍCIOS

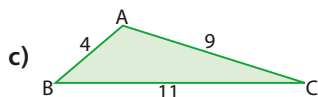
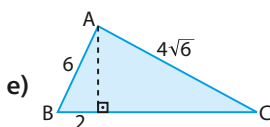
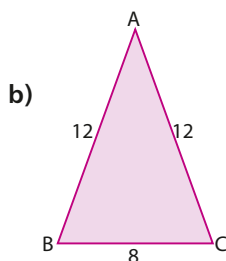
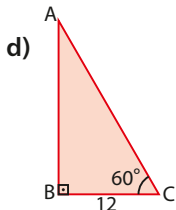
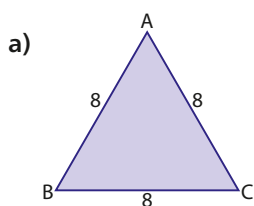
18 Determine a área de cada um dos triângulos representados nas figuras seguintes, nas quais a unidade das medidas indicadas é o metro.

a)

d)

b)

e)

c)

19 Calcule a área do triângulo em cada um dos seguintes casos:

a) A medida de um lado é 12 cm, e a altura relativa a esse lado mede 8 cm.

b) As medidas dos lados são 8 m, 10 m e 14 m.

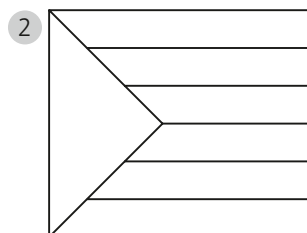
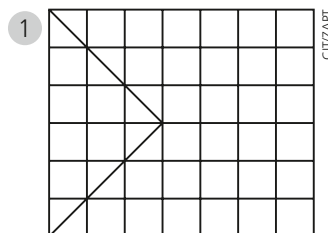
c) O triângulo é equilátero, e os lados medem 6 dm.

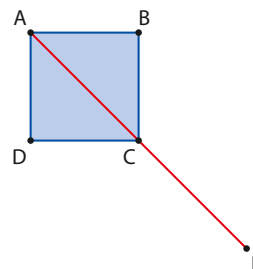
d) O triângulo é isósceles, os lados congruentes medem 12 m, e o outro lado mede 6 m.

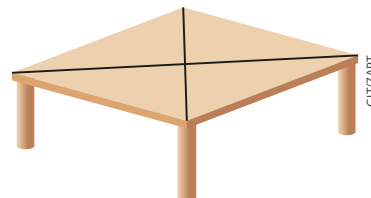
e) O triângulo é retângulo, e os catetos medem 3,6 cm e 4,8 cm.

f) O triângulo é retângulo, com um dos catetos e a hipotenusa medindo 12 dm e 18 dm, respectivamente.

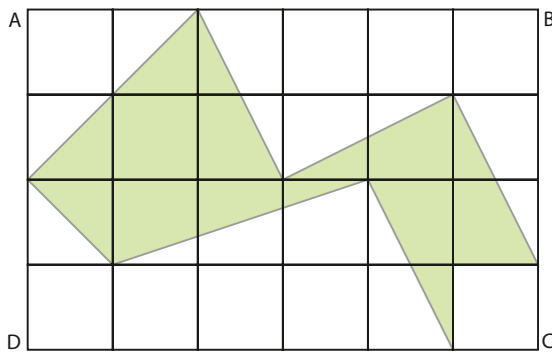
g) Dois lados, que medem 14 m e 18 m, determinam entre si um ângulo que mede 30°.

20 Sabe-se que para desenhar uma bandeira, inicialmente, Valentina dividiu uma folha de papel em quadradinhos congruentes e, depois, para poder pintá-la, apagou parte do quadriculado para que ela ficasse da forma como é mostrado na segunda figura.

Se as dimensões da folha eram (0,24 m) × (0,28 m), determine a área da superfície triangular da bandeira, em centímetros quadrados.

21 Sobre a figura ao lado sabe-se que ABCD é um quadrado, AB = 6 cm e **C** é ponto médio do segmento $\overline{AE}$.

Determine a área do triângulo BCE, em centímetros quadrados.

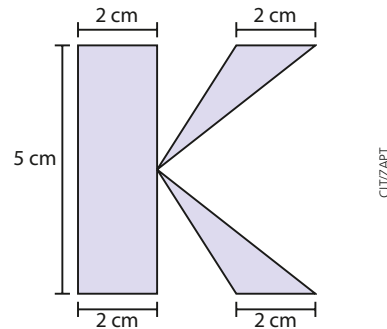
22 A superfície do tampo da mesa mostrada na figura é um quadrado, composto de quatro triângulos isósceles congruentes cujos lados congruentes medem $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ m.

Determine a área da superfície do tampo dessa mesa.

23 Determine a área de um triângulo retângulo tal que a soma das medidas dos catetos é igual a 28 cm e a soma dos quadrados das medidas dos três lados é igual a 800 cm².

24 Na figura abaixo, o retângulo ABCD foi dividido em quadrados de 2 cm de lado.

Qual é a área da região sombreada, em centímetros quadrados?

25 Em um terreno, com a forma de um triângulo retângulo cujos catetos medem 32 m e 27 m, pretende-se construir um edifício de base retangular, de lados paralelos aos catetos. Quais devem ser as dimensões da base desse edifício de modo a haver maior aproveitamento do terreno?

26 Um triângulo equilátero ABC tem 8 cm de lado. Se a medida de cada lado desse triângulo for acrescida de seus 25%, que porcentagem de acréscimo sofrerá a área de ABC?

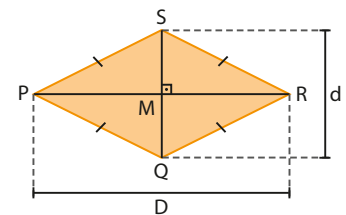
27 Kátia levou 20 peças de seu enxoval a uma costureira, para que ela confeccionasse e aplicasse, em cada peça, o monograma mostrado na figura abaixo.

Considerando que para fazer esse monograma a costureira cobra pelo tecido usado, ao custo de R$ 120,00 o metro quadrado, e pela sua mão de obra, R$ 7,50 por monograma confeccionado e aplicado, determine a quantia que Kátia deverá desembolsar pelo serviço contratado.

Área do losango

Considerando que o losango é um paralelogramo cujas medidas dos lados são iguais e as diagonais são perpendiculares entre si, observe na figura que ele pode ser decomposto em quatro triângulos retângulos congruentes e sua área é a soma das áreas desses triângulos.

Assim sendo, no losango PQRS, se **D** é a medida da diagonal maior e **d** é a medida da diagonal menor, a área **A** de sua superfície é tal que:

$$A = 4 \cdot A_{QMR} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{D \cdot d}{2}}$$

A área de um losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.

EXEMPLO 3

Vamos determinar a área do losango cujo lado mede 6 dm e um dos ângulos internos mede 120°.

Se **d** e **D** são as respectivas medidas das diagonais menor e maior do losango representado na figura da página seguinte, temos:

$$AO = \frac{d}{2} \text{ e } BO = \frac{D}{2}, \text{ ou seja, } d = 2 \cdot AO \text{ e } D = 2 \cdot BO$$

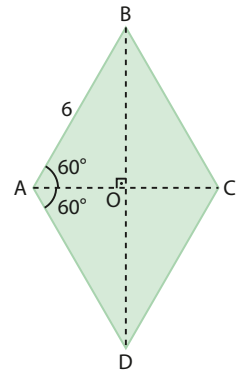
Como o triângulo AOB é retângulo em **O**, temos:

$$\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{AO}{AB} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AO}{6} \Rightarrow AO = 3 \\ \text{sen } 60° = \dfrac{BO}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{BO}{6} \Rightarrow BO = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Assim:

$d = 2 \cdot AO = 2 \cdot 3 = 6$ e $D = 2 \cdot BO = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

A diagonal menor mede 6 dm e a diagonal maior mede $6\sqrt{3}$ dm.

Logo, a área do losango ABCD é: $A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{(6\sqrt{3} \text{ dm}) \cdot (6 \text{ dm})}{2} \Rightarrow A = 18\sqrt{3} \text{ dm}^2$

OBSERVAÇÃO

Acompanhe outra opção de resolução do exemplo 3:
Observe na figura que o △ABC é um triângulo equilátero de lado 6 dm. Assim, temos:

$$A_{ABC} = \dfrac{AC^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{ABC} = \dfrac{(6 \text{ dm})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{ABC} = 9\sqrt{3} \text{ dm}^2$$

Como a área do losango é $A = 2 \cdot A_{ABC}$, então $A = 18\sqrt{3}$ dm².

PENSE NISTO:

Existem losangos que são retângulos?

Sim; se um quadrilátero for losango e retângulo, ele terá quatro lados congruentes e quatro ângulos retos, portanto, é um quadrado.

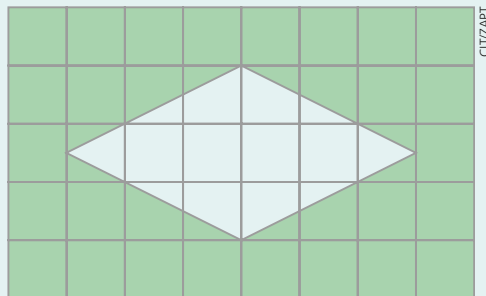
EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

3 Francineide usou uma folha de papel quadriculado para desenhar a bandeira do Brasil. Desconhecendo as reais dimensões da bandeira brasileira, ela iniciou o seu desenho construindo o losango central para, então, pintar de verde a sua parte externa, como é mostrado na figura abaixo.

CIT/ZAPT

PENSE NISTO:

Você conhece as normas para a confecção da Bandeira Nacional? Pesquise sobre os critérios relacionados a dimensão, cores e posicionamento das figuras geométricas, das letras e das estrelas.

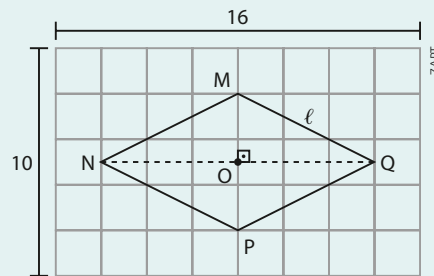
Professor, veja as normas para a confecção da Bandeira Nacional disponíveis em <www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L5700.htm>, acesso em 29 abr. 2016.

Se as dimensões da folha são 10 cm × 16 cm, determine:

a) a medida do lado do losango;

b) a área da região pintada de verde.

Solução:

a) Como as dimensões da folha são 10 cm × 16 cm, então a medida do lado de cada um dos 40 quadradinhos é 2 cm. Assim, D = 12 cm e d = 6 cm são as respectivas medidas da diagonal maior e menor do losango.

Considerando o triângulo retângulo MOQ, se ℓ é a medida do lado do losango, temos:

$$\ell^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{12}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 36 + 9 = 45 \Rightarrow \ell = 3\sqrt{5}$$

Logo, o lado do losango mede $3\sqrt{5}$ cm.

b) Se **A** é a área da região pintada de verde, **A_1**, a área da folha de papel, e **A_2**, a área do losango, temos:

$A_1 = (10 \text{ cm}) \cdot (16 \text{ cm}) = 160 \text{ cm}^2$

$A_2 = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{(12 \text{ cm}) \cdot (6 \text{ cm})}{2} = 36 \text{ cm}^2$

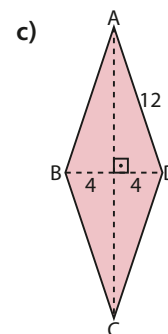
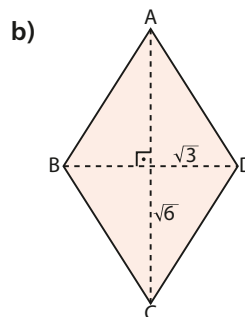
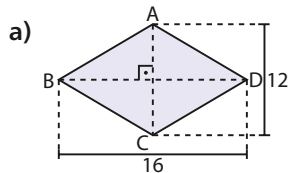
Como $A = A_1 - A_2$, então $A = (160 - 36) \text{ cm}^2 = 124 \text{ cm}^2$.

EXERCÍCIOS

28 Em cada caso, determine a área do losango ABCD, considerando que a unidade das medidas indicadas é o decímetro.

a)

b)

c)

29 Determine a área do losango sob as seguintes condições:

a) A medida do lado é 8 cm, e uma das diagonais mede 12 cm.

b) O perímetro é 40 dm e a diagonal maior mede 16 dm.

c) O perímetro é 60 cm, e dois lados formam entre si um ângulo de 120°.

d) As diagonais estão entre si na razão $\frac{3}{4}$, e o perímetro é 50 m.

30 Em um mapa, feito em uma escala de 1 : 9 000 000, certo município aparece representado por um losango cujo lado mede 1,25 cm. Sabendo que as medidas das diagonais estão entre si assim como 3 está para 4, determine a área real desse município, em quilômetros quadrados.

Área do trapézio

Considere o trapézio MNPQ da figura 1, no qual as bases $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ medem **b** e **B**, respectivamente.

Observe, na figura 2, que esse trapézio pode ser decomposto em dois triângulos $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$, de mesma altura e tais que a soma de suas áreas é igual à área **A** do trapézio MNPQ.

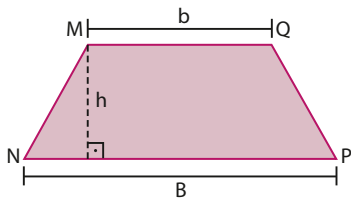



figura 1

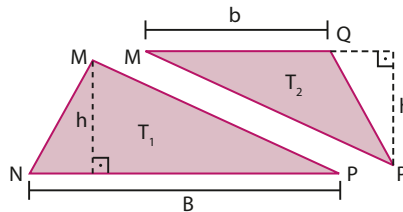



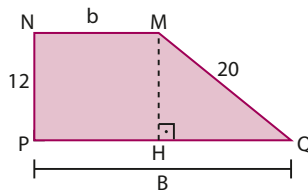
figura 2

Assim, temos: $A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = \frac{Bh + bh}{2}$, ou seja:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

A área de um trapézio é igual à metade do produto da soma das medidas das bases pela medida da altura.

EXEMPLO 4

Vamos determinar a área de um trapézio retângulo que tem 68 cm de perímetro e cujos lados não paralelos medem 12 cm e 20 cm.

Seja o trapézio MNPQ, no qual **b** é a medida da base menor e MH = NP = 12 cm a medida da altura, conforme é mostrado na figura. Temos:

$$\triangle MHQ \text{ é retângulo} \Rightarrow QH^2 = MQ^2 - MH^2 \Rightarrow QH^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \Rightarrow QH = 16$$

Assim, a medida **B** da base maior é tal que B = 16 + b. (1)

Como o perímetro é 68 cm, temos:

$$MN + NP + PQ + QM = 68 \Rightarrow b + 12 + (16 + b) + 20 = 68 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 10 \text{ e, de } (1),\ B = 26$$

Considerando que a área do trapézio é dada por $A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$, então:

$$A = \frac{(26 + 10) \cdot 12}{2} \Rightarrow A = 216$$

Logo, a área do trapézio MNPQ é 216 cm².

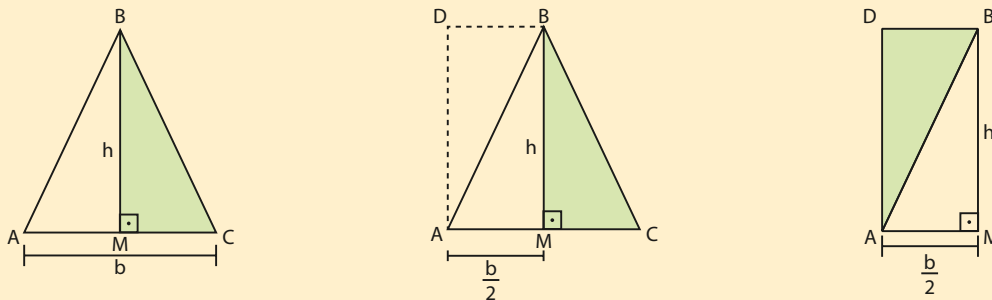
UM POUCO DE **HISTÓRIA**

Como obter a área de um triângulo isósceles a partir de um retângulo?

Henry Rhind. Detalhe da pintura de Alexander S. Mackay, 1874.

Um dos mais antigos documentos com registros sobre o estudo da Matemática é um rolo de papiro de origem egípcia, com cerca de 0,30 m de altura por 5 m de comprimento, que atualmente encontra-se no British Museum, em Londres. Em 1858, esse papiro foi comprado por um antiquário escocês chamado Henry Rhind e, por isso, é conhecido como Papiro de Rhind ou, menos frequentemente, como Papiro de Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou, por volta de 1650 a.C.

Entre os problemas de Geometria que lá se encontram, há um, o de número 51, que consiste em se obter a expressão da área de um triângulo isósceles a partir da área de um retângulo.

Ahmes descreve esse método sugerindo que todo triângulo isósceles pode ser dividido em dois triângulos retângulos congruentes, um dos quais pode ser deslocado para, junto com o outro, compor um retângulo, como mostram as figuras abaixo:

Assim, temos:

- $\triangle$ABC isósceles e h = medida da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ ⇒ **M** é ponto médio de $\overline{AC}$ ⇒ ⇒ $AM = \frac{b}{2}$;
- AMB e CMB são triângulos retângulos congruentes;
- AMBD é um retângulo cujas dimensões são:

$$AM = \frac{b}{2} \text{ e } BM = h$$

Logo: $A_{AMBD} = \frac{b}{2} \cdot h = \frac{b \cdot h}{2} = A_{ABC}$

Pense nisto:

Na figura 1:
- MNOP é um trapézio isósceles cujas bases e altura medem **b**, **B** e **h**, respectivamente.
- MRN e PSO são triângulos retângulos congruentes.

Na figura 2:
- MROT é um retângulo cujas medidas da base e da altura são b + x e **h**, respectivamente.
- $\triangle$PTO é congruente ao $\triangle$MRN, "deslocado" do trapézio para compor o retângulo MROT.

Assim, temos:

$$\begin{cases} B = b + 2x \Rightarrow x = \frac{B - b}{2} & (1) \\ A_{MNOP} = A_{MROT} \Rightarrow A_{MNOP} = (b + x) \cdot h & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$A_{MNOP} = \left(b + \frac{B - b}{2}\right) \cdot h \Rightarrow A_{MNOP} = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$$

PENSE NISTO:

Inspirando-se na solução apresentada para o problema 51, como você resolveria o problema 52, do Papiro de Rhind, em que a expressão da área de um trapézio isósceles é obtida a partir da área de um retângulo?

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

EXERCÍCIOS

31 Determine a área de cada um dos trapézios seguintes, nos quais a unidade das medidas de comprimento indicada é o metro.

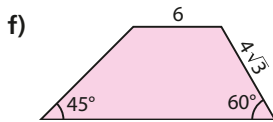
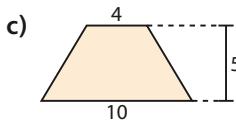
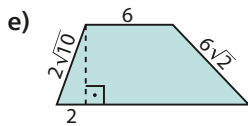
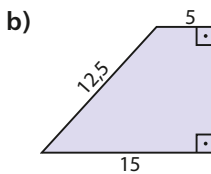
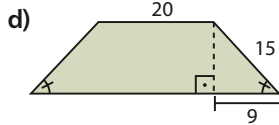
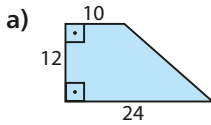
a)

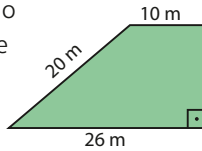
d)

b)

e)

c)

f)

32 Sabe-se que os lotes de um condomínio fechado são vendidos ao preço de R$ 350,00 o metro quadrado. Nessas condições, por quanto deverá ser vendido o lote representado na figura ao lado, sabendo que tem a forma de um trapézio retângulo com as dimensões indicadas?

10 m
20 m
26 m

33 Para a realização de um espetáculo ao ar livre, foi montado um palco cuja superfície tem a forma de um trapézio isósceles de 78 m de perímetro, com bases que medem 15 m e 33 m. Qual é a área da superfície desse palco?

VISIONS OF AMERICA, LLC/ALAMY/FOTOARENA

34 Considere um trapézio cuja altura mede 4 dm e no qual a medida da base maior excede a medida da base menor em 3 dm. Se a área desse trapézio é igual a 24 dm², determine as medidas de suas bases.

35 O jardim da casa de Teobaldo tem a forma de um trapézio isósceles em que a base menor mede 12 m, um dos ângulos internos mede 120° e a medida da altura é 6 m. Nessas condições, determine o perímetro e a área de tal jardim.

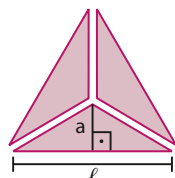
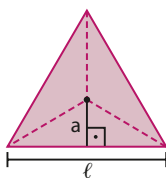
Área de um polígono regular

Considerando um polígono regular de **n** lados, vamos indicar por:

- ℓ: medida do lado;
- **a**: medida do apótema (segmento perpendicular a um lado do polígono cujas extremidades são o centro do polígono e o ponto médio desse lado);
- 2p: perímetro.

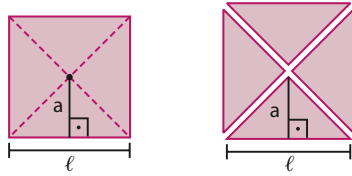
Assim, por exemplo:

- n = 3 ⇒ o polígono é um **triângulo equilátero**.

Esse polígono é constituído de três triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**.

Temos: $\begin{cases} A = 3 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = 3\ell \end{cases}$

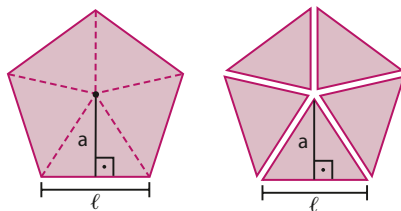
Logo, $A = (3\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (2p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = p \cdot a$

- $n = 4 \Rightarrow$ o polígono é um **quadrado**.

Esse polígono é constituído de quatro triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**.

Temos: $\begin{cases} A = 4 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = 4\ell \end{cases}$

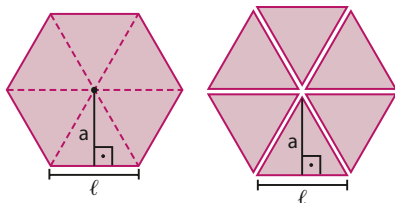
Logo, $A = (4\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (2p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = p \cdot a$

- $n = 5 \Rightarrow$ o polígono é um **pentágono regular**.

Esse polígono é constituído de cinco triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**.

Temos: $\begin{cases} A = 5 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = 5\ell \end{cases}$

Logo, $A = (5\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (2p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = p \cdot a$

- $n = 6 \Rightarrow$ o polígono é um **hexágono regular**.

Esse polígono é constituído de seis triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**.

Temos: $\begin{cases} A = 6 \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = 6\ell \end{cases}$

Logo, $A = (6\ell) \cdot \dfrac{a}{2} = (2p) \cdot \dfrac{a}{2} \Rightarrow A = p \cdot a$

Note que a área do hexágono regular é igual à soma das áreas de 6 triângulos equiláteros congruentes. Assim, podemos expressá-la também em função da medida do lado do hexágono, ou seja:

$$A = 6 \cdot \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

De modo geral, como um polígono regular de **n** lados é constituído de **n** triângulos congruentes, nos quais a altura mede **a**:

$$\begin{cases} A = n \cdot \dfrac{\ell \cdot a}{2} \\ 2p = n \cdot \ell \end{cases} \Rightarrow A = (n\ell) \cdot \frac{a}{2} = (2p) \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{A = p \cdot a}$$

A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pela medida do apótema.

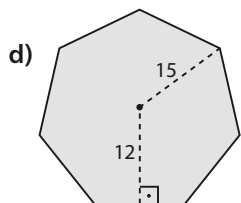
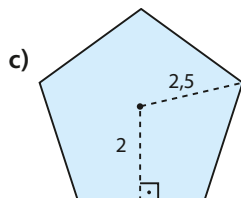
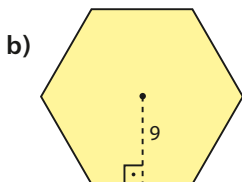
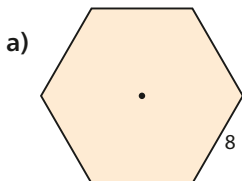
EXERCÍCIOS

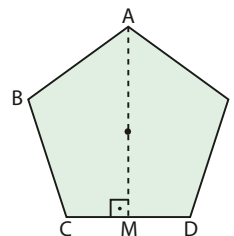
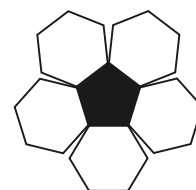
36 Determine a área dos polígonos regulares seguintes, nos quais a unidade das medidas indicadas é o centímetro.

a)

c)

b)

d)

37 O tampo de uma mesa tem a forma de um hexágono regular cujo lado mede 0,8 m. Determine a área da superfície desse tampo.

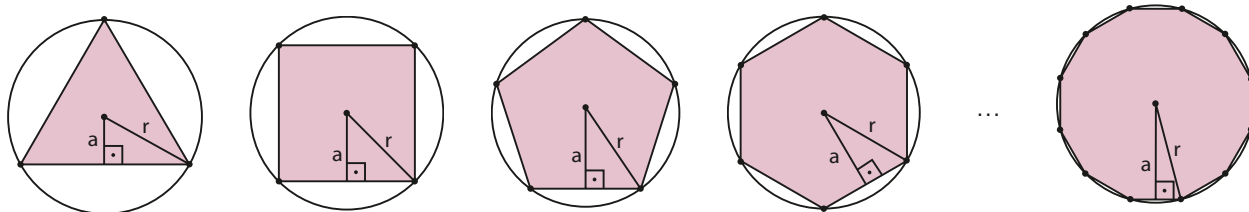
38 Na figura, ABCDE é um pentágono regular em que AM = 6 cm e AB = 4 cm. Determine a área desse pentágono.

39 Suponha que uma superfície seja formada de pentágonos regulares e hexágonos regulares. Considerando que o apótema de cada um dos hexágonos mede 3 cm, determine:

a) a área de cada hexágono;

b) o perímetro de cada pentágono.

Área do círculo e suas partes

Área do círculo

Considere a seguinte sucessão de polígonos regulares inscritos em círculos de raio de medida **r**.

...

Observe nessa sucessão que, se o número de lados do polígono aumenta, o comprimento do apótema também aumenta, ao passo que o comprimento do lado diminui. Dessa forma, quanto maior for o número de lados de um polígono, mais:

- o seu perímetro (2p) se aproxima da medida do comprimento da circunferência do círculo ($2\pi r$);
- a medida do seu apótema (**a**) se aproxima da medida do raio do círculo (**r**).

Quando o número de lados de um polígono é arbitrariamente grande:

$$\begin{cases} 2p = 2\pi r \Rightarrow p = \pi r \\ a = r \end{cases}$$

Como a área de um polígono regular é dada por $A = p \cdot a$, então, nesse caso, temos: $A = (\pi r) \cdot r = \pi r^2$, que é a expressão da área do círculo de raio de medida **r**. Assim: $A = \pi r^2$.

A área de um círculo é igual ao produto do número real π pelo quadrado da medida do seu raio.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4 Considere que Francineide, a garota citada no exercício resolvido 3, continuou aqui o desenho da bandeira do Brasil. Agora ela desenhou o círculo central da bandeira, tangente a dois segmentos na vertical do quadriculado, cujo centro **C** é o centro do retângulo, conforme é mostrado na figura.

Determine a área da superfície da bandeira pintada de amarelo por Francineide, lembrando que as dimensões da folha são 10 cm × 16 cm.

CIT/ZAPT

Solução:

A área (**A**) da superfície pintada de amarelo é igual à diferença entre a área do losango $\left(\mathbf{A}_L\right)$ e a área do círculo $\left(\mathbf{A}_C\right)$.

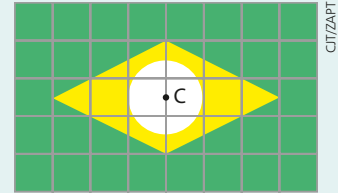
O cálculo de $\mathbf{A}_L$ encontra-se no exercício resolvido 3, ou seja, $A_L = 36 \text{ cm}^2$.

A medida do raio do círculo é igual à medida do lado de um quadradinho, ou seja, r = 2 cm. Assim, a área do círculo, em cm², é:

$$A_C = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

Logo:

$$A = A_L - A_C \Rightarrow A = 36 - 4\pi \Rightarrow A = 4(9 - \pi)$$

Portanto, a área da superfície da bandeira pintada de amarelo é $4(9 - \pi)$ cm².

EXERCÍCIOS

40 Determine a área do círculo, sob as seguintes condições:

a) A medida do raio é 11 dm.

b) A medida do diâmetro é 24 m.

c) O círculo tem 32π cm de perímetro.

41 Qual é a área do círculo inscrito em um quadrado cujo lado mede 12 dm?

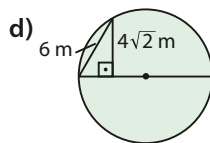
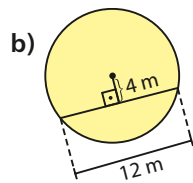
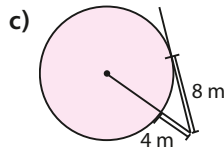
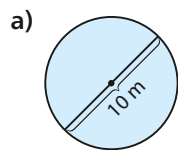
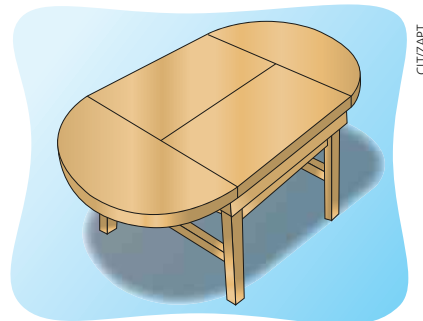
42 Determine a área do círculo cujo perímetro é igual ao perímetro do retângulo cujos lados medem 6π cm e 4π cm.

43 Calcule a área de cada círculo representado nas figuras seguintes:

a)

c)

b)

d)

44 Sabe-se que o tampo da mesa mostrada na figura é composto de duas tábuas retangulares, cada qual com 0,35 m de largura, e dois semicírculos, cada um com 0,80 m de diâmetro.

CIT/ZAPT

Elementos sem proporção entre si.

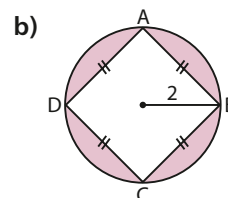
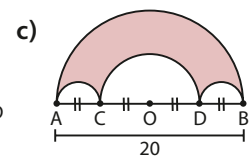
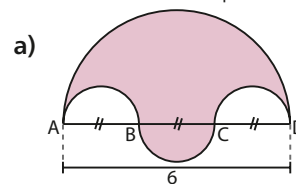
Nessas condições, qual é a área da superfície do tampo dessa mesa?

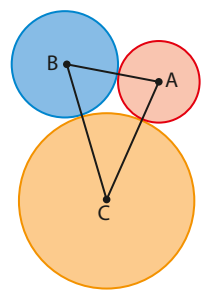
Use $\pi \simeq 3{,}14$.

45 Considere que nas figuras seguintes os segmentos assinalados são congruentes e a unidade das medidas está indicada em decímetros. Em cada caso, calcule a área da superfície da região sombreada:

a)

c)

b)

46 Certa noite, em que um *show* musical lotou uma praça circular de uma cidade, um jornal local noticiou que a ocupação média dos que foram "curtir" o som havia sido de 4 pessoas por metro quadrado. Nessas condições, sabendo que essa praça tem 49 m de raio e considerando $\pi \simeq \frac{22}{7}$, determine uma estimativa do número de pessoas presentes em tal *show*.

47 Na figura estão representados três círculos de centros nos pontos **A**, **B** e **C**, dois a dois tangentes exteriormente. Se AB = 16 cm, BC = 24 cm e AC = 22 cm, determine as áreas dos três círculos.

Área do setor circular

Na figura ao lado, temos:

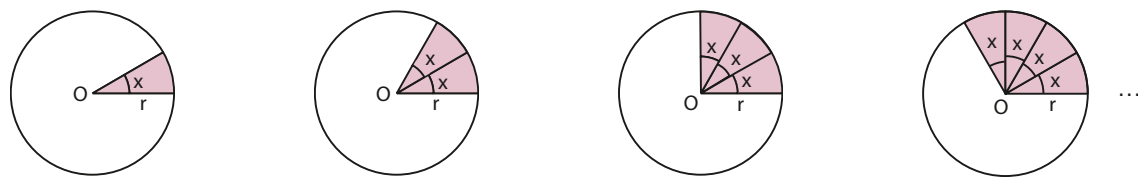
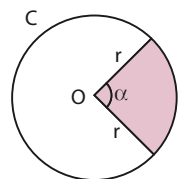
C: círculo de centro **O** e raio de medida **r**;

α: medida do ângulo de vértice **O**.

Chama-se **setor circular** de centro **O**, raio de medida **r** e ângulo central de medida α, a região determinada pela interseção de **C** com a região limitada pelos lados do ângulo.

Assim, na figura, a região colorida representa o setor circular definido.

Dado um setor circular de centro **O**, com raio de medida **r** e ângulo central de medida **x**, vamos comparar sua área com as áreas de outros setores de mesmo raio, mas cujas medidas dos ângulos centrais são sucessivamente aumentadas para 2x, 3x, 4x, ...

...

Podemos observar que, se a medida do ângulo central dobra, a área do setor dobra; se a medida do ângulo central triplica, a área do setor triplica e, assim, sucessivamente. Dessa forma, concluímos que a área de um setor circular é diretamente proporcional à medida do ângulo central (ou ao comprimento do correspondente arco). Assim:

- quando a medida do ângulo central é dada em graus, a área do setor circular pode ser calculada pela seguinte regra de três:

	área (u.a.)		ângulo central (graus)
setor:	A	——	x
círculo:	$\pi \cdot r^2$	——	360

$$\Rightarrow \frac{A}{\pi \cdot r^2} = \frac{x}{360}$$

Portanto: $A = \frac{x}{360} \cdot \pi \cdot r^2$

- quando o comprimento do correspondente arco é ℓ, a área do setor circular pode ser calculada pela seguinte regra de três:

	área (u.a.)		comprimento do arco (u.c.)
setor:	A	———	ℓ
círculo:	$\pi \cdot r^2$	———	$2\pi r$

$$\Rightarrow \frac{A}{\pi \cdot r^2} = \frac{\ell}{2\pi r}$$

Portanto:

$$A = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

OBSERVAÇÃO

Note que, nos dois casos, as expressões da área do setor foram obtidas por meio de regra de três. Para que não seja preciso decorar "novas fórmulas", o mesmo procedimento deve ser usado na resolução de problemas nos quais se necessita calcular áreas de setores circulares, conforme exemplificado a seguir.

EXEMPLO 5

Vamos calcular a área de um setor circular de ângulo central de medida 120° e cujo raio mede 10 cm. Para tal, estabelecemos a seguinte regra de três:

Como 120° é igual à terça parte de 360°, a área do setor é igual à terça parte da área do círculo. Professor, estimule, sempre que possível, o cálculo mental para determinação da área do setor.

	área (cm²)		ângulo central (graus)
setor:	A	———	120
círculo:	$\pi \cdot 10^2$	———	360

$$\Rightarrow \frac{A}{100\pi} = \frac{120}{360} \Rightarrow A = \frac{100\pi}{3}$$

Portanto, a área do setor circular é $\frac{100\pi}{3}$ cm².

PENSE NISTO:

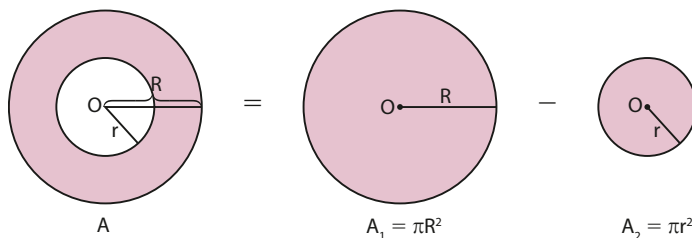
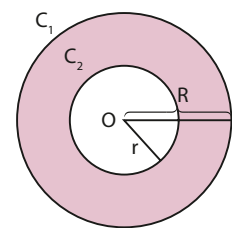
Como você pode calcular a área desse setor sem usar a regra de três?

Área da coroa circular

Sejam C_1 e C_2 círculos concêntricos cujos respectivos raios medem **R** e **r**, com $R > r$.

Chama-se **coroa circular** a reunião do conjunto de pontos que pertencem à região limitada pelas circunferências de C_1 e C_2 com o conjunto dos pontos que pertencem a tais circunferências, como mostra a figura ao lado.

Observe que a área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos cujos raios medem **R** e **r**.

A = $A_1 = \pi R^2$ − $A_2 = \pi r^2$

Logo: $A = A_1 - A_2 \Rightarrow A = \pi R^2 - \pi r^2$

EXERCÍCIO **RESOLVIDO**

5 Na cozinha da casa de Neuza há um relógio, no qual uma placa de metal plana, em forma de coroa circular, circunda o mostrador pintado de azul.

Determine a área da superfície da placa, sabendo que a circunferência maior da placa tem 32π cm de comprimento e o diâmetro do círculo interno mede 10 cm.

Elementos sem proporção entre si.

Solução:

Sabe-se que o comprimento da circunferência maior do relógio é 32π cm, ou seja:

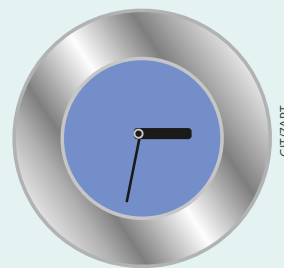
$$2\pi R = 32\pi \text{ cm} \Rightarrow R = 16 \text{ cm}$$

Logo, a área do círculo maior é: $A_1 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot (16 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_1 = 256\pi \text{ cm}^2$

O círculo interno tem 10 cm de diâmetro, ou seja: $D = 2r = 10 \text{ cm} \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$

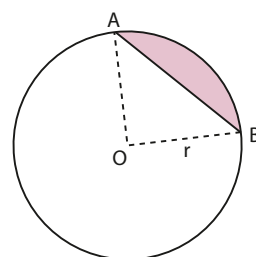
Logo, a área do círculo menor é: $A_2 = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_2 = 25\pi \text{ cm}^2$

Portanto: $A = A_1 - A_2 = 256\pi - 25\pi \Rightarrow A = 231\pi$

Logo, a área da placa é 231π cm².

Área do segmento circular

Seja $\overset{\frown}{AB}$ um arco de circunferência, contido em um círculo cujo raio mede **r**, como é mostrado na figura.

Chama-se **segmento circular** o conjunto de pontos que pertencem à parte do círculo limitada pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ e pela corda de extremidades **A** e **B** (destacados ao lado).

Assim, a área do segmento circular ($\mathbf{A}_{seg}$) é igual à diferença entre a área do setor circular ($\mathbf{A}_{set}$) e a área do triângulo AOB ($\mathbf{A}_{\triangle AOB}$).

$$A_{seg} = A_{set} - A_{\triangle AOB}$$

EXEMPLO 6

Vamos calcular a área de um segmento circular de um círculo cujas medidas do raio e do ângulo central são 4 cm e 150°, respectivamente.

Como a área do segmento circular ($\mathbf{A}_{seg}$) é igual à diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo AOB, temos:

- área do setor circular, $\mathbf{A}_1$:

	área (cm²)		ângulo central
setor:	A_1	———	150°
círculo:	$\pi \cdot 4^2$	———	360°

$$\Rightarrow \frac{A_1}{16\pi \text{ cm}^2} = \frac{150}{360} \Rightarrow A_1 = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}^2$$

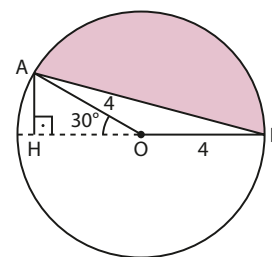
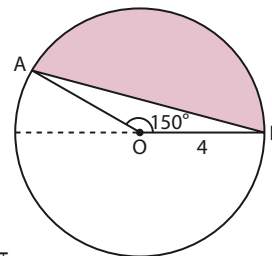
- área do triângulo AOB, $\mathbf{A}_2$:

Temos: AO = OB = 4 cm e med(AÔB) = 150° ⇒ med(AÔH) = 30°

$\triangle AHO$ retângulo $\Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{AH}{AO} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{4 \text{ cm}} \Rightarrow AH = 2 \text{ cm}$

Assim: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot (4 \text{ cm}) \cdot (2 \text{ cm}) \Rightarrow A_2 = 4 \text{ cm}^2$

Logo, $A_{seg} = A_1 - A_2 = \frac{20\pi}{3} - 4 \Rightarrow A_{seg} = \frac{4(5\pi - 3)}{3}$

Portanto, a área do segmento circular é $\frac{4(5\pi - 3)}{3}$ cm².

EXERCÍCIOS

48 Em cada caso, calcule a área do setor circular de raio **r** e ângulo central de medida θ.

a) $r = 4$ m e $\theta = 30°$

b) $r = 9$ dm e $\theta = 120°$

c) $r = 12$ m e $\theta = 45°$

d) $r = 6$ cm e $\theta = 90°$

e) $r = 10$ cm e $\theta = 150°$

f) $r = 2$ km e $\theta = 300°$

49 Em cada caso, calcule a área da superfície colorida.

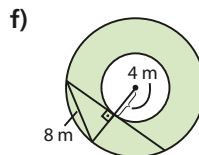
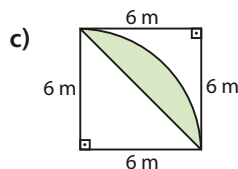
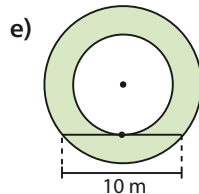
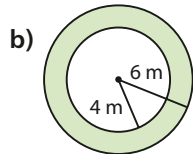
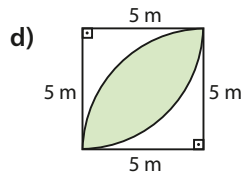
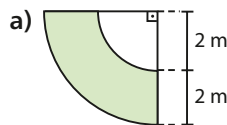
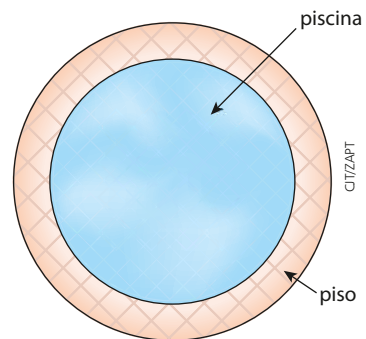
a)

b)

c)

d)

e)

f)

50 Na casa de Marina há uma piscina de formato circular, circundada por um piso, conforme mostrado na figura. Ela pretende trocar o revestimento do piso por outro, que custa R$16,00 o metro quadrado. Sabendo que a piscina tem 8 m de diâmetro e o piso tem 2,5 m de largura, determine a quantia mínima que Marina gastará na compra do novo revestimento para o piso. Use: $\pi \simeq \frac{22}{7}$.

Elementos sem proporção entre si.

51 Em cada caso, determine a área de um segmento circular em que a medida do raio é **r** e o ângulo central mede θ.

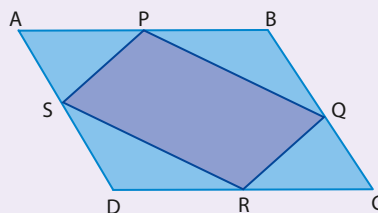
a) $r = 4$ cm e $\theta = 45°$

b) $r = 8$ dm e $\theta = 30°$

c) $r = 2$ m e $\theta = 90°$

d) $r = 12$ cm e $\theta = 120°$

DESAFIO

Relativamente ao quadrilátero ABCD, mostrado na figura abaixo, sabe-se que **P**, **Q**, **R** e **S** são pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, respectivamente.

Se a área de ABCD é igual a 48 cm², determine, em centímetros quadrados, a área do quadrilátero PQRS.

CAPÍTULO 13

Estatística básica

Entenda o papel da Estatística

ALEX SILVA

1

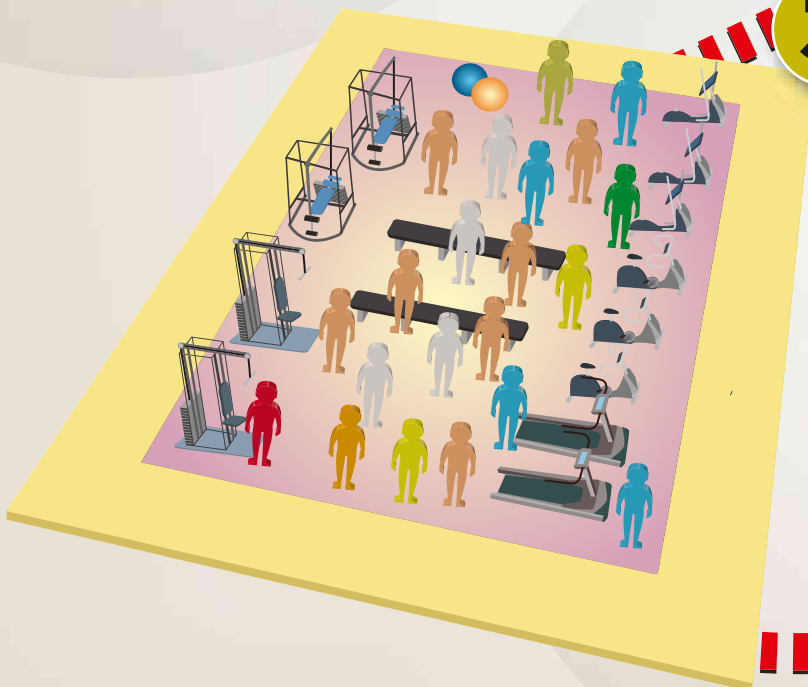
O dono de uma academia de ginástica com 4 mil alunos matriculados deseja conhecer um pouco mais sobre seus alunos e seu grau de satisfação com a academia.

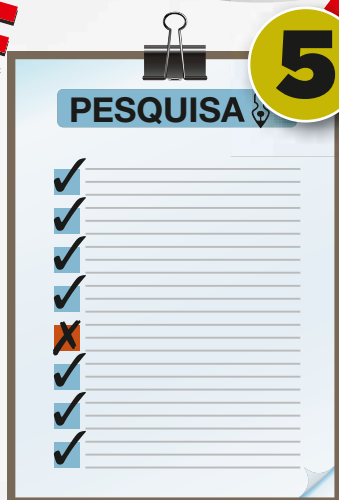
INSTITUTO DE PESQUISA

2

Com esse objetivo, o dono dessa academia encomendou uma pesquisa a um instituto especializado. O instituto ficará responsável pelo planejamento da pesquisa, coleta de dados seguida de sua apuração e organização, análise inferencial dos dados e divulgação dos resultados.

3

No início da pesquisa, o instituto estabeleceu o conjunto de pessoas que poderiam oferecer as informações que o dono da academia precisava saber: todos os alunos regularmente matriculados na academia. Note que cada uma dessas pessoas tem, ao menos, uma característica em comum – ser aluno da academia.

4

Devido ao tempo disponível para realizar a pesquisa e ao alto custo operacional, o instituto contratado selecionou uma pequena parcela (amostra) dos alunos matriculados na academia, formada por 90 pessoas, para aplicar a pesquisa. Note que essas pessoas formam um subconjunto inicial do conjunto de todos os alunos matriculados. Os alunos selecionados poderão responder os questionários elaborados pelo instituto por meio, por exemplo, de contato telefônico.

5

Para garantir a confiabilidade dos dados da pesquisa, o instituto selecionou as pessoas que responderão os questionários do seguinte modo: enumerou todos os alunos matriculados, atribuindo um número a cada um. Em seguida, por meio de um dispositivo aleatório, isto é, casual, não programado (que pode ser uma tabela de números aleatórios ou um programa computacional de geração de números randômicos, ou seja, sem critério de seleção), sorteou 90 números, que correspondem aos alunos que farão parte da amostra e fornecerão as informações investigadas sobre o grau de satisfação com a academia.

ALEX SILVA

6

Depois de coletadas as informações da amostra, os profissionais do instituto deverão apurar e contabilizar os dados brutos, organizando-os de maneira que o dono da academia contratante possa ter uma visão clara, simples e objetiva dos resultados obtidos. Surge, então, a necessidade de organizar os dados brutos em tabelas e gráficos, por meio de *softwares* computacionais.

7

Por fim, o instituto de pesquisa precisa tirar conclusões do todo a partir da análise de uma parte, isto é, é necessário levantar as características investigadas de todos os alunos com base nos resultados obtidos na amostra, estimando os erros provenientes da amostragem. Esse estudo é fundamental para o dono da academia e sua equipe gestora tomarem decisões e definirem investimentos e estratégias de propaganda.

Pesquisas estatísticas

Os levantamentos estatísticos de uma pesquisa costumam ser amplamente divulgados nos meios de comunicação, como TV, jornais, internet, revistas etc., e quase sempre têm relação direta com o cotidiano das pessoas, pois envolvem temas como hábitos de consumo, eleições, comportamento, saúde, desenvolvimento humano, economia, entre outros.

DIEGO HERCULANO/FOTOARENA

A análise estatística do mercado consumidor é fundamental para o lançamento de novos produtos.

Antes de apresentar as etapas de um levantamento estatístico, precisamos nos apropriar de alguns termos utilizados nele.

Chamamos de **universo estatístico** ou **população** o conjunto de pessoas ou elementos que podem oferecer as informações que serão investigadas. No exemplo da pesquisa sobre o grau de satisfação dos alunos com a academia, a população é composta por 4 000 pessoas, todas matriculadas na academia.

Em geral, numa pesquisa, é inviável coletar informações de todos os elementos do universo estatístico, devido, principalmente, ao elevado custo operacional e ao longo tempo de execução. Por isso, seleciona-se uma parcela (parte ou subconjunto) da população, à qual damos o nome de **amostra**. A escolha de uma amostra é complexa e depende de vários fatores. A amostra da população deve ser representativa e, assim, ter características similares às da população de onde foi retirada.

No exemplo inicial, a amostra era um subconjunto dos alunos matriculados na academia composto por 90 pessoas.

Podemos enumerar diversas situações em que se faz presente um planejamento estatístico:

- Um jornal de grande circulação na Bahia encomenda uma pesquisa a um instituto especializado a fim de conhecer a intenção de voto do baiano na próxima eleição para governador do estado. Observe que, nesse caso, a população (ou universo estatístico) da qual será escolhida a amostra é o conjunto de todos os eleitores que votam no estado da Bahia.
- A Secretaria de Saúde da prefeitura de Belo Horizonte deseja conhecer os hábitos sexuais dos jovens de 12 a 17 anos, visando criar campanhas de prevenção à aids e a outras doenças sexualmente transmissíveis. Para isso, encomenda uma pesquisa a um órgão especializado. Nesse caso, a população é formada por todos os jovens de 12 a 17 anos que residem em Belo Horizonte e dela será escolhida a amostra.
- Uma indústria fabricante de circuitos elétricos para computadores realiza testes de controle de qualidade para verificar a eficiência dos circuitos que ela produz ao longo de uma semana. Para isso, testa, por meio de uma amostra, a ocorrência ou não de defeitos nos circuitos nessa semana. Observe que, nessa situação, o universo estatístico é formado por todos os circuitos elétricos produzidos pela empresa na semana.

Etapas da pesquisa estatística

A pesquisa estatística é composta pelas seguintes etapas:

I. Planejamento:

O planejamento é uma das fases mais importantes de uma pesquisa; nela são definidos os objetivos da pesquisa (identificando as características que devem ser observadas ou medidas), o tipo de pesquisa (se será realizado com questionários ou entrevistas, por exemplo), a população, como a amostra será obtida e o planejamento de coleta de dados.

II. Coleta de dados:

A coleta de dados é a fase em que os dados são obtidos. Essa é uma fase mais procedimental na pesquisa.

III. Apuração ou contagem dos dados:

Em geral, os dados coletados não se apresentam devidamente organizados; por isso, é necessário contá-los e agrupá-los. Um recurso comumente utilizado nessa fase é a organização dos dados em tabelas.

IV. Exposição dos dados:

A exposição, ou apresentação, dos dados pode ser feita por meio de tabelas e gráficos. É comum também associarmos medidas, como a média, que resumem o conjunto de dados.

V. Interpretação dos dados:

A última fase do levantamento estatístico é a interpretação ou análise dos dados. É uma fase que exige muito cuidado e atenção, na qual as conclusões da pesquisa são deduzidas a partir dos dados coletados. Esse estudo é conhecido como **inferência estatística** e mostra, por exemplo, com que margem de erro os resultados da amostra podem ser estendidos a toda a população.

Considerando as etapas gerais dos procedimentos em uma pesquisa estatística, vamos, nesta coleção, enfocar principalmente a análise descritiva e quantitativa de um conjunto de dados, representando-os em forma de gráficos ou tabelas e associando a eles algumas medidas. Neste primeiro volume, daremos destaque ao tratamento da informação: organização e apresentação de dados em tabelas, construção e interpretação de gráficos.

Amostragem

Uma das principais características do planejamento estatístico (etapa I) de uma pesquisa é a definição do tipo de amostragem que será utilizado, isto é, como será obtida a amostra na pesquisa. Há vários métodos de seleção da amostra. Vamos conhecer a seguir dois dos métodos mais utilizados em pesquisas.

No exemplo sobre o grau de satisfação dos alunos matriculados na academia, a forma de selecionar a amostra é conhecida como **amostragem aleatória simples** e nela cada elemento da população tem a mesma probabilidade de participar da amostra. Essa técnica de amostragem é, em geral, um método simples de escolher uma amostra e bastante utilizado em pesquisas.

Outro método de amostragem também usado com frequência em pesquisas é a **amostragem proporcional estratificada**.

Esse método é usado quando o universo estatístico está subdividido em estratos (ou subpopulações) sem elementos comuns. Dentro de cada estrato, supõe-se que o objeto de estudo apresenta comportamento relativamente homogêneo. Assim, de cada estrato retiramos uma amostra aleatória simples cujo tamanho é proporcional ao número de elementos do estrato.

Por exemplo, suponha que se pretenda coletar informações sobre os estágios dos 500 alunos do curso de administração de empresas de uma faculdade, dos quais 360 são do curso matutino e 140 são do noturno. Observe que o universo estatístico já se encontra dividido em dois estratos. Se a amostra tiver 50 elementos, deverão ser sorteados 36 do curso matutino e 14 do noturno.

A amostragem aleatória simples e a amostragem proporcional estratificada são exemplos de métodos probabilísticos, isto é, métodos que permitem ao pesquisador calcular os erros provenientes de se usar uma amostra para tirar conclusões de toda a população, ao contrário de métodos em que os elementos da amostra são escolhidos intencionalmente ou por conveniência.

Variável

Vamos voltar à situação apresentada no infográfico da abertura do capítulo.

Suponha que cada entrevistado da amostra selecionada pelo instituto teve de responder às seguintes questões:

1)	Qual é a sua idade?
2)	Qual é o seu estado civil?
3)	Em qual período do dia você geralmente vai à academia? ( ) Manhã. ( ) Tarde. ( ) Noite.
4)	Geralmente, quantas vezes por semana você vai à academia?
5)	Com relação às instalações da academia (salas de treinamento, vestiário, área de convivência e lanchonete), você: (R) reprova (AR) aprova com ressalvas (A) aprova
6)	Numa escala de 1 a 5 (em que 1 significa ruim e 5 significa excelente), como você avalia os aparelhos de musculação?
7)	Numa escala de 1 a 5, como você avalia o suporte, orientação e acompanhamento dos professores?
8)	Qual o valor atual da sua mensalidade?
9)	Atualmente, você considera a possibilidade de trocar de academia? ( ) Sim. ( ) Não.

Essas questões devem ser respondidas por todos os elementos da amostra e permitirão levantar os dados necessários para a análise. Cada um dos itens investigados pela pesquisa é denominado **variável**.

Variáveis como: "estado civil" (2), "período de treino" (3), "avaliação das instalações" (5) e "possibilidade de troca de academia" (9) apresentam como resposta um atributo, qualidade, característica ou preferência do entrevistado. Variáveis dessa natureza são classificadas como **qualitativas**. Considerando, por exemplo, a variável "estado civil", dizemos que "solteiro", "casado", "divorciado" e "viúvo" são respostas, realizações ou valores assumidos por essa variável.

Já as variáveis "idade" (1), "frequência semanal" (4), "avaliação dos aparelhos" (6), "avaliação dos professores" (7) e "valor da mensalidade" (8) apresentam como resposta um número obtido por contagem ou mensuração. As variáveis desse tipo são classificadas como **quantitativas**.

No quadro abaixo têm-se, como exemplo, os dados de 25 questionários aplicados nessa pesquisa, já organizados a partir dos dados brutos coletados.

Idade	Estado civil	Período de treino	Frequência semanal	Avaliação das instalações	Avaliação dos aparelhos	Avaliação dos professores	Valor da mensalidade (em reais)	Possibilidade de troca de academia
27	solteiro	manhã	4	AR	4	4	240	não
38	casado	noite	2	AR	5	4	90	não
34	divorciado	noite	3	A	2	3	112	sim
22	casado	tarde	2	A	5	4	284	não
18	solteiro	manhã	3	A	4	4	130	não
35	casado	manhã	2	A	5	5	110	sim
30	casado	noite	3	A	5	5	106	não
41	solteiro	noite	4	R	4	5	104	não
52	viúvo	tarde	5	A	3	5	140	não
28	solteiro	manhã	2	AR	4	4	70	sim
29	casado	noite	3	AR	5	4	160	sim
45	solteiro	noite	4	R	4	4	120	não
31	casado	manhã	3	AR	5	5	92	sim
32	divorciado	tarde	1	A	2	2	128	não
20	solteiro	manhã	6	AR	4	5	188	sim
22	casado	manhã	2	A	5	5	144	não
38	casado	noite	3	A	5	4	116	não
34	casado	noite	3	R	5	4	272	sim
21	solteiro	manhã	1	AR	4	4	96	não
25	divorciado	noite	5	AR	2	3	82	sim
28	casado	noite	2	A	5	4	116	não
32	casado	noite	4	A	5	4	90	sim
43	solteiro	tarde	3	R	3	3	158	sim
28	casado	noite	5	A	4	4	78	não
51	viúvo	manhã	4	AR	5	4	164	não

Tabelas de frequência

A organização dos dados em tabelas possibilita uma leitura rápida e condensada dos resultados obtidos em uma pesquisa.

Para cada variável estudada, contamos o número de vezes que cada um de seus valores (realizações) ocorre. O número obtido é chamado **frequência absoluta** e pode ser indicado por Fa.

EXEMPLO 1

Considerando as realizações (ou, mais informalmente, as respostas) da variável "estado civil", vamos obter suas respectivas frequências absolutas:

solteiro: ⊠⊓ → Fa = 8
casado: ⊠⊠⌐ → Fa = 12
viúvo: ⌐ → Fa = 2
divorciado: ⊓ → Fa = 3

Observe que a soma das frequências absolutas deve ser igual ao número total de dados disponíveis. De fato, 8 + 12 + 2 + 3 = 25.

Em geral, quando os resultados de uma pesquisa são divulgados em jornais e revistas, os valores correspondentes às frequências absolutas são acompanhados do número total de dados obtidos, a fim de tornar a análise dos dados mais significativa. Por exemplo, em uma pesquisa eleitoral, a informação "2 705 pessoas vão votar no candidato **X**" só tem consistência se conhecermos o número total de pessoas entrevistadas. No exemplo da pesquisa sobre o grau de satisfação com a academia, no início do capítulo, algum tempo depois o instituto poderia repetir a pesquisa sobre a avaliação da academia e definir uma amostra com um número maior de entrevistados. Para comparar os resultados obtidos nas duas amostras, seria preciso levar em consideração que eles têm "tamanhos" diferentes.

Definimos, desse modo, para cada realização ou valor assumido por uma variável, a **frequência relativa** (indicaremos por Fr) como a razão entre a frequência absoluta (Fa) e o número total de dados (**n**), isto é:

$$Fr = \frac{Fa}{n}$$

Observe que, para cada valor assumido pela variável, $0 \leqslant Fa \leqslant n$.

Desse modo, temos que $\frac{0}{n} \leqslant \frac{Fa}{n} \leqslant \frac{n}{n}$, isto é, $0 \leqslant Fr \leqslant 1$. Por esse motivo, é comum expressar a frequência relativa em porcentagem.

Suponhamos que uma variável assuma **k** valores distintos, $a_1, a_2, ..., a_k$, com frequências absolutas respectivamente iguais a $n_1, n_2, ..., n_k$, com $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. As frequências relativas correspondentes a $a_1, a_2, ..., a_k$ são respectivamente iguais a $\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, ..., \frac{n_k}{n}$.

Somando, obtemos

$$\frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + ... + \frac{n_k}{n} = \frac{n_1 + n_2 + ... + n_k}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

Professor, se preferir, use a tabela de frequências referente ao estado civil dos entrevistados para explicar essa propriedade.

PENSE NISTO:

Você percebeu que a soma das frequências relativas das realizações (ou valores assumidos) por uma variável é igual a 1. Explique por que isso ocorre.

EXEMPLO 2

Vamos construir a tabela de frequências completa para a variável "estado civil".

Estado civil dos alunos da academia

Estado civil	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
solteiro	8	$\frac{8}{25}$ = 0,32 ou 32%
casado	12	$\frac{12}{25}$ = 0,48 ou 48%
viúvo	2	$\frac{2}{25}$ = 0,08 ou 8%
divorciado	3	$\frac{3}{25}$ = 0,12 ou 12%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

Dados elaborados pelo autor.

A construção das tabelas de frequência para as variáveis "período de treino", "frequência semanal", "avaliação das instalações", "avaliação dos aparelhos", "avaliação dos professores" e "possibilidade de troca de academia" segue o mesmo procedimento.

Para as demais variáveis quantitativas, no entanto, é possível perceber que, praticamente, não há repetição de valores. Por exemplo, quando observamos os valores assumidos pela variável "valor da mensalidade", notamos que eles variam de 70 a 284 reais. Construir uma tabela usando os 25 valores, cada um ocorrendo, em geral, uma única vez, seria impensável, pois não resumiria os dados colhidos. Nesse caso, podemos agrupar os dados em **classes** ou **intervalos de valores**.

Vejamos, no exemplo seguinte, um procedimento comum para a construção das classes (ou intervalos). Para isso, vamos definir para uma variável quantitativa a **amplitude da amostra**, ou seja, a diferença entre o maior e o menor valor obtido.

Se não arredondássemos, os intervalos seriam: 70 ⊢ 123,5; 123,5 ⊢ 177,0; 177,0 ⊢ 230,50 e 230,50 ⊢ 284. Nesse caso, de acordo com a convenção adotada, o maior valor da mensalidade (R$ 284,00) não estaria incluído. A mesma conclusão seria obtida se o arredondamento fosse "para baixo", isto é, para 53.

EXEMPLO 3

Vamos obter os intervalos para a distribuição dos valores referentes às mensalidades, a fim de construirmos uma tabela de frequências que resuma os dados obtidos:

- Calculamos a amplitude da amostra:

  R$ 284,00 − R$ 70,00 = R$ 214,00

- Escolhemos o número de intervalos que serão usados; nesse exemplo, vamos usar 4 intervalos para distribuir as mensalidades.
- Dividimos a amplitude da amostra por 4:

  R$ 214,00 ÷ 4 = R$ 53,50, que será arredondado para R$ 54,00 — esse valor representará o **comprimento de cada intervalo** (ou, ainda, a amplitude de cada intervalo).

- Assim, o primeiro intervalo "começa" em R$ 70,00 (menor valor) e "vai" até R$ 124,00 (pois 70 + 54 = 124). Convencionaremos que esse intervalo é fechado à esquerda e aberto à direita, isto é, trata-se do intervalo real [70, 124[, que será representado pela notação:

  70 ⊢ 124

- O segundo intervalo será 124 ⊢ 178 (pois 124 + 54 = 178); o terceiro será 178 ⊢ 232 (pois 178 + 54 = 232) e o quarto e último intervalo será 232 ⊢ 286 (pois 232 + 54 = 286).

PENSE NISTO:

Ao dividirmos a amplitude da amostra por 4, obtivemos o valor R$ 53,50 e arredondamos para R$ 54,00. Você saberia explicar o porquê do arredondamento "para cima"?

Observe a tabela de frequências correspondente:

Valor da mensalidade paga pelos alunos da academia

Mensalidade (em reais)	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
70 ⊢ 124	14	$\frac{14}{25}$ = 0,56 ou 56%
124 ⊢ 178	7	$\frac{7}{25}$ = 0,28 ou 28%
178 ⊢ 232	1	$\frac{1}{25}$ = 0,04 ou 4%
232 ⊢ 286	3	$\frac{3}{25}$ = 0,12 ou 12%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

Dados elaborados pelo autor.

OBSERVAÇÃO

Dependendo da natureza dos dados, podemos ter um número maior ou menor de intervalos (ou classes). É importante, entretanto, evitar intervalos de amplitude muito grande ou muito pequena, a fim de que não haja comprometimento na análise.

EXERCÍCIOS

1 A prefeitura de uma estância turística deseja obter informações sobre os hotéis da região. Para isso, sorteou uma amostra de vinte estabelecimentos, que responderam às seguintes questões:

I) Qual é o valor da diária para um casal?
II) O hotel oferece café da manhã incluído no valor da diária?
III) Quantos funcionários trabalham no estabelecimento?
IV) Há piscina no estabelecimento?
V) Qual é o número de quartos de hospedagem?
VI) Qual dos itens seguintes melhor caracteriza o hotel: turístico, turístico superior, superior ou luxo?

Cada um dos objetos de estudo investigado corresponde a uma variável. Classifique as variáveis em qualitativas ou quantitativas.

2 Em uma pesquisa feita em um curso pré-vestibular, foram sorteados, aleatoriamente, 50 nomes de uma relação de 2 475 alunos regularmente matriculados. Os estudantes responderam a um questionário do qual constavam, entre outras, as seguintes perguntas:

1. Qual é a área de carreira universitária pretendida?
2. Você cursou o Ensino Médio em escola particular, pública municipal ou pública estadual?
3. Qual é a sua renda mensal familiar?
4. Quantos irmãos você tem?
5. Qual é a sua disciplina favorita?
6. Quantas vezes você já fez cursinho?
7. Você trabalha/exerce alguma atividade remunerada?
8. Qual é o tempo aproximado gasto para vir ao cursinho?

a) Determine a população dessa pesquisa.
b) Qual é o tamanho da população e da amostra?
c) Entre os itens do questionário, destaque os que correspondem a variáveis qualitativas.
d) Em relação às perguntas 1, 5 e 6 do questionário, dê exemplos de possíveis respostas, isto é, possíveis valores assumidos pela variável.

3 Os governos dos estados de RJ e ES pretendem lançar uma campanha conjunta de prevenção à dengue em áreas rurais. Para isso, pretende-se conhecer, previamente, os hábitos de prevenção dos moradores. Decidiu-se, então, realizar uma pesquisa de campo, visitando um certo número de domicílios dessas áreas, escolhidas por amostragem, e coletando as informações desejadas.

a) Qual é o universo estatístico nessa pesquisa?
b) Quais perguntas seriam pertinentes de se fazer nessa pesquisa?

4 Em certa cidade, haverá 2º turno para eleições municipais. A cidade possui 1 764 835 eleitores registrados. Uma pesquisa feita com 2 650 eleitores sobre a intenção de voto para prefeito revelou que 1 715 pretendem votar no candidato **A**, 691 no candidato **B**, 141 estão indecisos e 103 irão votar em branco ou anular o voto.

a) Qual é a variável investigada na pesquisa? Classifique-a. Quais são as realizações (“respostas”) dessa variável?
b) Qual é o tamanho da população e o da amostra?
c) Construa uma tabela de frequências para representar os dados da pesquisa.

Para as questões de 5 a 9, use a tabela da página 255 deste capítulo.

5 Faça uma tabela de frequências para a variável “avaliação das instalações”.

6 Faça uma tabela de frequências para a variável “frequência semanal”.

7 Considerando a variável “possibilidade de trocar de academia”, determine:

a) a frequência absoluta correspondente à resposta “sim”;
b) a frequência relativa correspondente à resposta “não”.

8 Faça uma tabela de frequências para a variável “idade”, agrupando os dados em 5 classes de valores. Faça os arredondamentos a fim de trabalhar com valores inteiros nos intervalos.

9 O dono da academia esperava que ao menos 80% dos alunos avaliassem os professores como bons (nota 4) ou ótimos (nota 5). Os dados da amostra confirmam essa expectativa? Apresente os cálculos necessários que justificam a resposta.

10 A tabela seguinte refere-se aos resultados de uma pesquisa, realizada com 400 adolescentes, a respeito de seu lazer preferido.

Lazer preferido entre adolescentes

Lazer	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)	Porcentagem (%)
Instrumento musical	a	0,06	b
Internet	92	c	d
Esporte	e	f	9
Sair à noite	180	g	h
Outros	i	j	k
Total	**400**	**1,00**	**100**

Dados elaborados pelo autor.

THINKSTOCK/GETTY IMAGES

Quais são os valores de **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**, **g**, **h**, **i**, **j** e **k**?

11 Na tabela abaixo, estão representados os resultados de um levantamento realizado com 180 pessoas, na praça de alimentação de um *shopping center*, sobre seus gastos em uma refeição.

Gastos com alimentação

Gastos (em reais)	Número de pessoas
5 ⊢ 10	63
10 ⊢ 15	$x + 54$
15 ⊢ 20	$2x$
20 ⊢ 25	$\frac{x}{2}$

Dados elaborados pelo autor.

a) Qual é o valor de **x**?

b) Que porcentagem do total de entrevistados gasta de R$ 20,00 a R$ 25,00 por refeição?

c) Que porcentagem do total de entrevistados gasta menos de R$ 15,00 por refeição?

12 Realizou-se uma pesquisa sobre a renda mensal dos trabalhadores de um aeroporto. Por amostragem, foram sorteados 25 funcionários que informaram seus salários, como mostra a relação seguinte (valores em reais):

3 240 — 1 170 — 2 160 — 4 140 — 2 304 — 1 728 — 3 564 — 1 044 — 2 340 —
846 — 3 960 — 1 710 — 2 790 — 1 440 — 1 584 — 1 980 — 1 206 — 2 916 —
2 610 — 1 656 — 1 512 — 1 062 — 1 350 — 972 — 4 860

Construa uma tabela de frequências para representar esses valores, agrupando-os em 5 intervalos – faça o arredondamento necessário a fim de trabalhar com números inteiros.

13 As notas obtidas por 30 alunos de uma turma em uma prova de inglês estão relacionadas abaixo:

6,5 — 3,2 — 9,3 — 4,2 — 7,4 — 1,2 — 8,6 — 3,5 — 8,0 — 3,8 —
1,7 — 4,2 — 2,1 — 4,8 — 5,4 — 3,3 — 3,2 — 6,4 — 9,1 — 5,3 —
1,9 — 4,5 — 5,5 — 6,1 — 7,0 — 2,1 — 6,2 — 5,6 — 4,8 — 4,7

a) Agrupe as notas em seis classes de intervalo, cada uma com amplitude 1,5, a partir da nota 1,0, e faça uma tabela de frequências.

b) Usando os dados agrupados, determine a porcentagem de alunos com nota maior ou igual a 7.

Aplicações

Matemática, informática e trabalho

Construindo tabelas de frequência usando planilhas eletrônicas

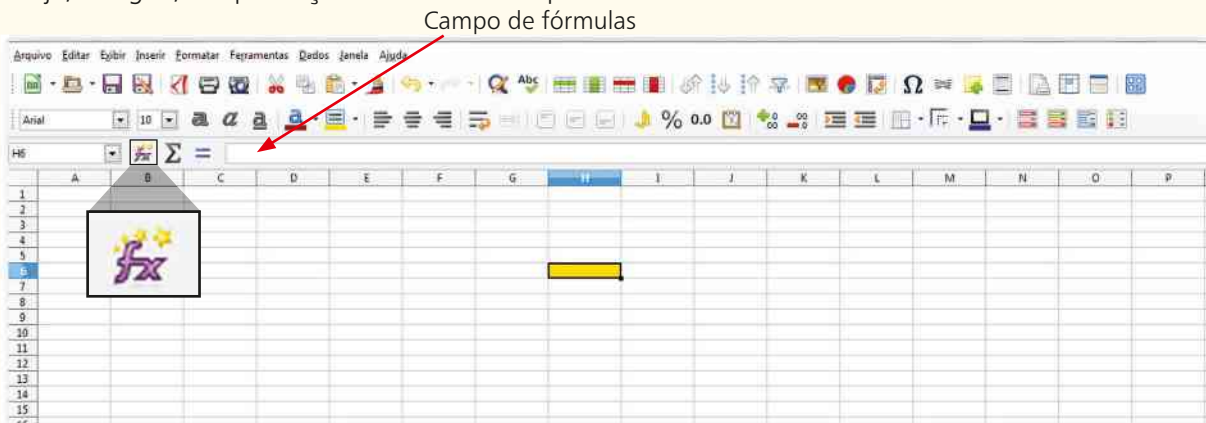
Consideremos a situação seguinte:

Uma grande indústria deseja conhecer os hábitos de seus funcionários com relação à prática de atividade física. Para isso, uma empresa especializada foi contratada para planejar e conduzir uma pesquisa. Foram selecionados, por amostragem, vários funcionários que responderam, entre outras, a seguinte questão: "Atualmente, qual é a atividade física que você pratica com maior regularidade?". Cada funcionário indicou um único esporte.

Foram obtidas as seguintes respostas:

- futebol: 53 funcionários;
- caminhada: 84 funcionários;
- musculação: 35 funcionários;
- vôlei: 11 funcionários;
- corrida: 27 funcionários;
- pilates: 5 funcionários;
- não praticam atividade física: 65 funcionários.

Já aprendemos a construir uma tabela de frequências para representar e organizar o conjunto de dados. Vamos, agora, construir a tabela usando programas de planilhas eletrônicas de uso amplamente difundido no mundo do trabalho.

Veja, a seguir, a reprodução da tela de uma planilha eletrônica de uso livre.

ILUSTRAÇÕES: COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Na imagem acima é possível visualizar 15 linhas (numeradas de 1 a 15) e 16 colunas (de **A** até **P**). Para cada cruzamento linha × coluna, obtemos uma célula. Observe que a célula H6 aparece destacada.

Bastante útil na construção de tabelas e planilhas é o campo de fórmulas, indicado pela seta em vermelho, logo ao lado do símbolo *fx*.

Vamos, inicialmente, inserir os dados obtidos na pesquisa.

O primeiro passo é escolher uma célula qualquer (no exemplo C3) para inserir a variável em estudo: atividade física. Nas células C4 a C10 digitamos as possíveis respostas ou realizações dessa variável. Ao lado da variável, na célula D3, digitamos "frequência absoluta" e, de D4 a D10, inserimos os valores correspondentes.

Para se obter o total, é preciso selecionar a célula D12 e, em seguida, digitar, no campo de fórmulas, = soma (D4 : D10). Serão somados os valores das células de D4 a D10, obtendo-se o valor 280, que ficará "guardado" na célula D12.

Atividade física	Frequência absoluta
Futebol	53
Caminhada	84
Musculação	35
Vôlei	11
Corrida	27
Pilates	5
Nenhuma	65
Total	=SOMA(D4:D10)

• Inserimos, na célula E3, “frequência relativa”.

Selecionamos a célula E4 e, no campo de fórmulas, digitamos = D4/280 (a divisão é indicada por /).

Aparecerá, na célula E4, o valor 0,189285714.

ILUSTRAÇÕES: COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Atividade física	Frequência absoluta	Frequência relativa
Futebol	53	0,189285714
Caminhada	84	
Musculação	35	
Vôlei	11	
Corrida	27	
Pilates	5	
Nenhuma	65	
Total	280	

Para que o cálculo da frequência relativa seja feito com todos os valores das células D5 a D10, procedemos da seguinte maneira:

- clicamos no ponto inferior direito da célula E4;
- arrastamos, com o *mouse*, até a célula E10;
- gradativamente, aparecerão os valores desejados da frequência relativa, como vemos abaixo:

Atividade física	Frequência absoluta	Frequência relativa
Futebol	53	0,189285714
Caminhada	84	0,3
Musculação	35	0,125
Vôlei	11	0,039285714
Corrida	27	0,096428571
Pilates	5	0,017857143
Nenhuma	65	0,232142857
Total	280	

• Inserimos, na célula F3, “porcentagem”.

Selecionamos a célula F4 e, no campo de fórmulas, digitamos = E4*100 (a multiplicação é indicada por *).

Atividade física	Frequência absoluta	Frequência relativa	Porcentagem
Futebol	53	0,189285714	18,9285714
Caminhada	84	0,3	
Musculação	35	0,125	
Vôlei	11	0,039285714	
Corrida	27	0,096428571	
Pilates	5	0,017857143	
Nenhuma	65	0,232142857	
Total	280		

Para que o cálculo da porcentagem seja feito com todos os valores das células E5 a E10, procedemos de modo análogo ao cálculo da frequência relativa: clicamos no ponto inferior direito da célula F4; arrastamos, com o *mouse*, até a célula F10. Aparecerão os valores desejados da porcentagem, conforme vemos na imagem abaixo, que mostra a tabela de frequências completa.

Atividade física	Frequência absoluta	Frequência relativa	Porcentagem
Futebol	53	0,189285714	18,92857143
Caminhada	84	0,3	30
Musculação	35	0,125	12,5
Vôlei	11	0,039285714	3,928571429
Corrida	27	0,096428571	9,642857143
Pilates	5	0,017857143	1,785714286
Nenhuma	65	0,232142857	23,21428571
Total	280	1	100

PENSE NISTO:

Por meio de quais comandos podemos obter o valor 1 encontrado na célula E12?

E o valor 100 encontrado na célula F12?

É preciso selecionar a célula E12. No campo de fórmulas, deve-se digitar = soma (E4 : E10).
Para a célula F12, deve ser digitado, no campo de fórmulas, = soma (F4 : F10).
Professor, não deixe de ver nas Orientações Didáticas, no item “Sugestão de atividades em grupo”, a construção de gráficos estatísticos com planilhas eletrônicas.

Representações gráficas

A representação gráfica constitui um importante recurso para reunião, análise e interpretação de um conjunto de dados.

Os vários tipos de gráficos estão presentes em diversos veículos de comunicação (jornais, revistas, internet), sendo associados aos mais variados assuntos do nosso dia a dia.

Sua importância está ligada sobretudo à possibilidade de facilitar e tornar mais rápida a absorção das informações por parte do leitor. Além disso, o recurso gráfico permite aos veículos de comunicação a elaboração de diversas ilustrações, que tornam a leitura mais atraente.

Neste capítulo, estudaremos cinco tipos de representações gráficas: gráfico de barras, histograma, gráfico de setores, gráfico de linhas e pictograma.

Gráfico de barras

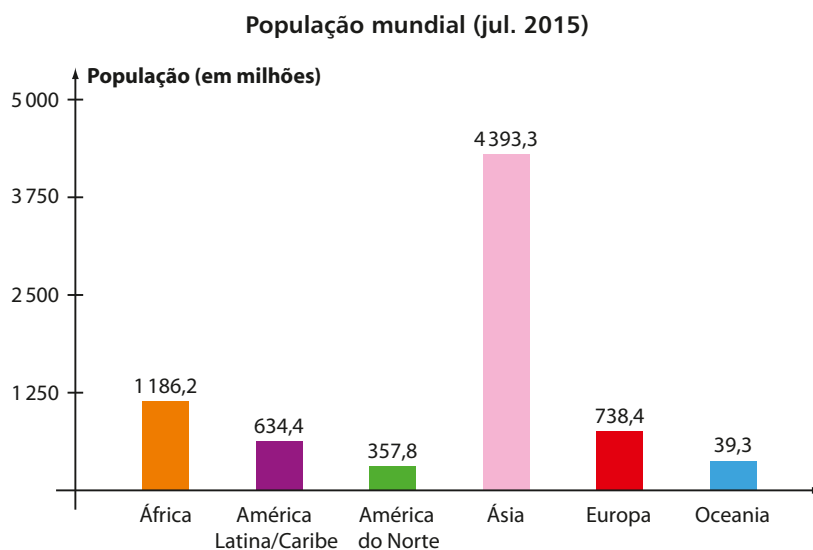
O gráfico abaixo mostra a população mundial e sua distribuição nos continentes (separando o continente americano em América do Norte, América Latina e Caribe).

População mundial (jul. 2015)

População (em milhões)

5 000
3 750
2 500
1 250

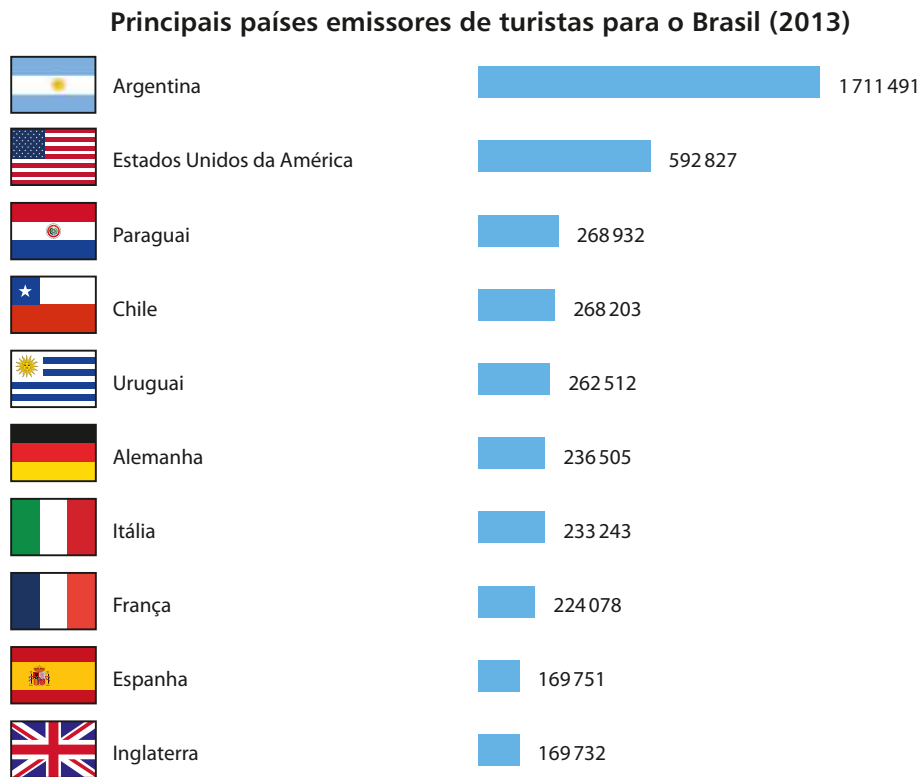
1 186,2
634,4
357,8
4 393,3
738,4
39,3

África
América Latina/Caribe
América do Norte
Ásia
Europa
Oceania

Fonte: World population prospects: the 2015 revision. Disponível em: <esa.un.org/unpd/wpp/dvd/Files/1_Indicators%20(Standartd)EXCEL_FILES/1_Population/WPP2015_POP_F01_1_TOTAL_POPULATION_BOTH_SEXES.XLS>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Para cada continente está representada uma barra vertical, cuja medida do comprimento é proporcional ao número de habitantes do continente. Essa representação gráfica recebe o nome de **gráfico de barras verticais**.

Da observação do gráfico podemos extrair algumas informações, por exemplo:

- Em 2015, a população mundial era de 7 349,4 milhões de habitantes (pois $1\,186{,}2 + 634{,}4 + 357{,}8 + 4\,393{,}3 + 738{,}4 + 39{,}3 = 7\,349{,}4$), ou seja, aproximadamente 7 bilhões e 349 milhões de habitantes.
- A soma das populações no continente americano ($634{,}4 + 357{,}8 = 992{,}2$) superava a população da Europa, mas não superava a população da África.
- A razão entre as populações dos dois continentes mais populosos é próxima de 3,7, pois $4\,393{,}3 : 1\,186{,}2 \simeq 3{,}704$; já a razão entre a população da Ásia e da Oceania (continentes mais e menos populosos, respectivamente) é próxima de 112, pois $4\,393{,}3 : 39{,}3 \simeq 111{,}789$.

É comum também utilizar a representação gráfica por meio de barras horizontais, como mostra o gráfico seguinte:

Fonte de pesquisa: Departamento de Polícia Federal e Ministério do Turismo. Disponível em: <www.dadosefatos.turismo.gov.br/dadosefatos/estatisticas_indicadores/principais_emissores_turistas/>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Histograma

O **histograma** é uma representação gráfica muito semelhante ao gráfico de barras verticais. Em geral, ele é usado para representar os valores assumidos por uma variável quantitativa quando estes estão agrupados em classes de intervalos.

O histograma é um gráfico formado por retângulos contíguos, isto é, que estão em contato entre si (os retângulos se "encostam"). A base de cada retângulo corresponde a um segmento cujas extremidades são os limites de cada classe de intervalo, e a altura de cada retângulo é proporcional à frequência (absoluta, relativa ou em porcentagem) da classe correspondente.

EXEMPLO 4

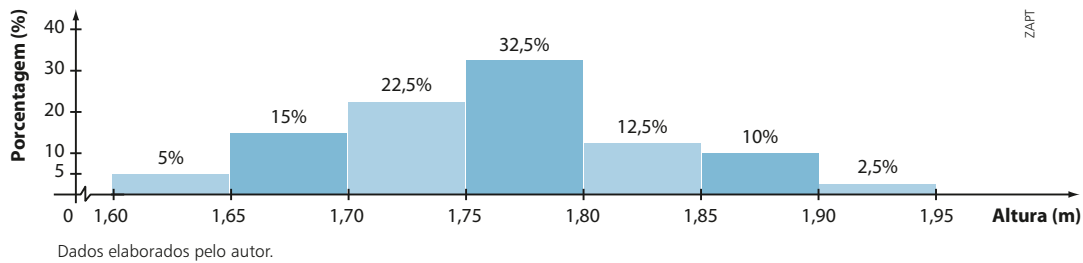
A altura de 80 alunos de uma escola de Ensino Médio está distribuída de acordo com a tabela abaixo.

Altura dos alunos do Ensino Médio

Altura (metros)	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
1,60 ⊢ 1,65	4	0,05 ou 5,0%
1,65 ⊢ 1,70	12	0,15 ou 15,0%
1,70 ⊢ 1,75	18	0,225 ou 22,5%
1,75 ⊢ 1,80	26	0,325 ou 32,5%
1,80 ⊢ 1,85	10	0,125 ou 12,5%
1,85 ⊢ 1,90	8	0,10 ou 10,0%
1,90 ⊢ 1,95	2	0,025 ou 2,5%
Total	**80**	**1,000 ou 100,0%**

Dados elaborados pelo autor.

Utilizando os dados da tabela, construímos o histograma seguinte:

Dados elaborados pelo autor.

A análise do histograma permite afirmar que:

- a classe que reúne a maior porcentagem de alunos corresponde ao intervalo de 1,75 m a 1,80 m;
- 75% dos alunos dessa escola têm altura menor que 1,80 m (observe que somamos: 5% + 15% + 22,5% + 32,5%);
- o intervalo de 1,65 m a 1,90 m concentra 92,5% das alturas dos alunos da escola.

Gráfico de setores

O gráfico ao lado mostra a distribuição aproximada da população brasileira, dividida em zona rural e zona urbana, segundo dados do último Censo Demográfico (2010).

Distribuição da população brasileira (2010)

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 2010.

Esta representação gráfica é conhecida como **gráfico de setores**, ou, informalmente, por gráfico de *pizza*.

Para construir o gráfico, dividiu-se o círculo em duas partes, ou melhor, em dois setores circulares, cujas medidas dos ângulos centrais são diretamente proporcionais às frequências correspondentes a cada setor (no caso, a frequência é dada pela porcentagem). Podemos obter tais medidas por meio, por exemplo, de uma regra de três:

- Zona urbana:

$$\left.\begin{array}{lcr} 100\% & \text{———} & 360° \\ 84\% & \text{———} & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 302{,}4° = 302°\ 24'$$

- Zona rural:

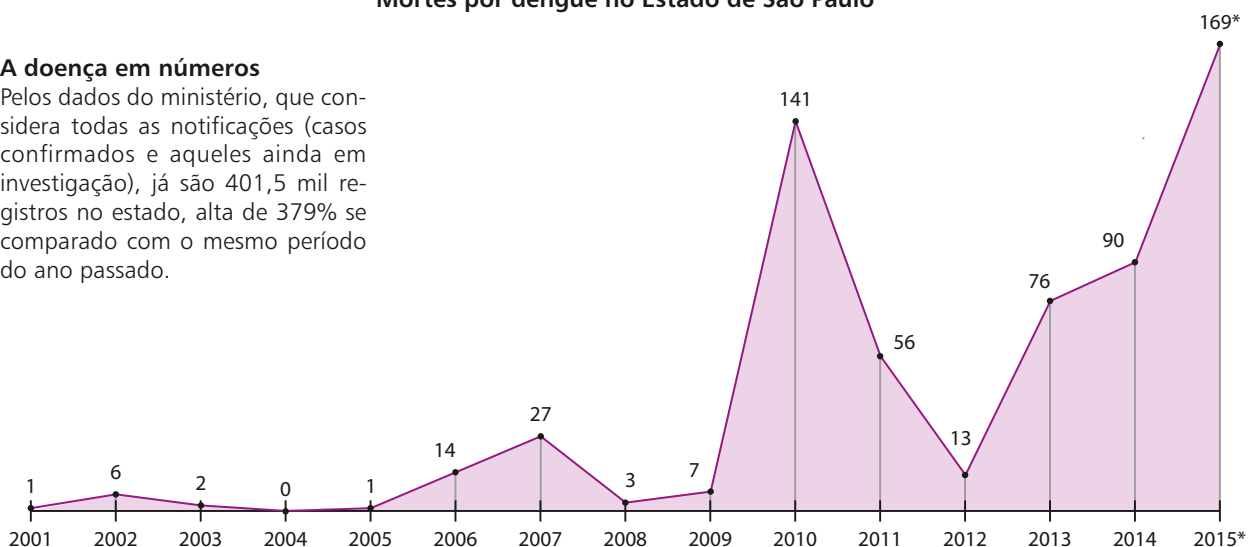
$$\left.\begin{array}{lcr} 100\% & \text{———} & 360° \\ 16\% & \text{———} & y \end{array}\right\} \Rightarrow y = 57{,}6° = 57°\ 36'$$ (ou poderíamos ter calculado $360° - 302{,}4° = 57{,}6°$)

O gráfico de setores pode ser construído com o auxílio de um transferidor ou de um *software* computacional.

Suponhamos que, de modo geral, a variável em estudo assuma **k** valores distintos. O processo de construção do gráfico de setores consiste em dividir um círculo em **k** partes (setores circulares) proporcionais às frequências das realizações observadas. Mais precisamente, as medidas dos ângulos dos setores circulares são proporcionais às porcentagens (ou frequências, em geral) de ocorrência das realizações da variável.

Gráfico de linhas

O gráfico a seguir mostra a variação do número de óbitos por dengue no Estado de São Paulo, de 2001 a 2015. Combater a dengue é um grande desafio para nossa sociedade!

Mortes por dengue no Estado de São Paulo

* Dados até 18 de abril.

Fonte: Ministério da Saúde, *O Estado de São Paulo*, 4 maio 2015.

A cada ano do período considerado está associado um número correspondente ao número de mortes por dengue, estabelecendo-se uma função entre essas duas grandezas (tempo, em anos, e número de mortes).

Unindo os pontos obtidos por segmentos de reta consecutivos, obtemos o **gráfico de linhas**. O uso do gráfico de linhas é especialmente útil quando se quer representar os valores assumidos por uma variável quantitativa no decorrer do tempo.

A leitura do gráfico nos permite concluir que:

- de 2012 a 2015, o número de óbitos por dengue cresceu;
- em todos os anos, a partir de 2005, houve mortes por dengue no Estado de São Paulo;
- em 2015, com os dados disponíveis até a data mencionada, o aumento do número de mortes já era maior que 80%, na comparação com o número de mortes por dengue em 2014 (observe que 80% de 90 é igual 72 e $90 + 72 = 162 < 169$).

Pictograma

Pictograma é uma representação gráfica em que são usadas figuras ou imagens que guardam relação com o assunto que está sendo tratado. As representações pictóricas possuem forte apelo visual, chamando prontamente a atenção e curiosidade do leitor, e, por isso, são amplamente utilizadas nos mais variados veículos de comunicação.

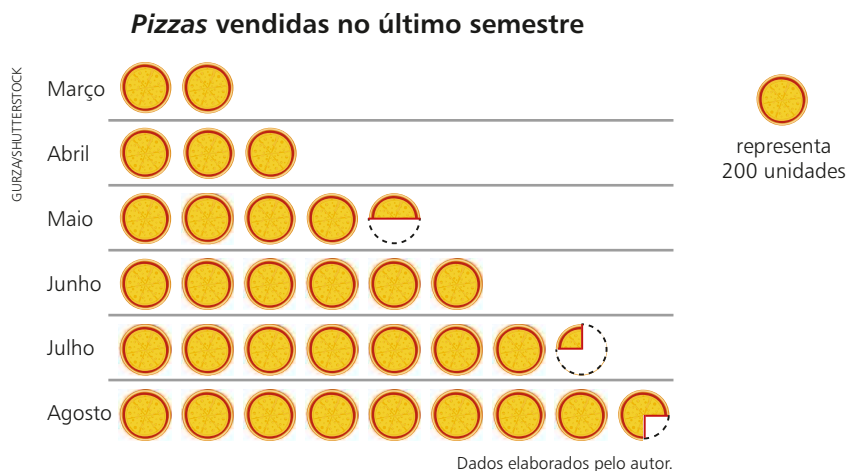
Uma pizzaria inaugurada há 6 meses pretende divulgar, como estratégia de *marketing*, o crescimento de suas vendas no último semestre, como mostra a tabela seguinte:

Mês	Março	Abril	Maio	Junho	Julho	Agosto
***Pizzas* vendidas**	400	600	900	1 200	1 450	1 750

O dono da pizzaria sugeriu que os resultados fossem apresentados em um pictograma a fim de chamar a atenção dos clientes.

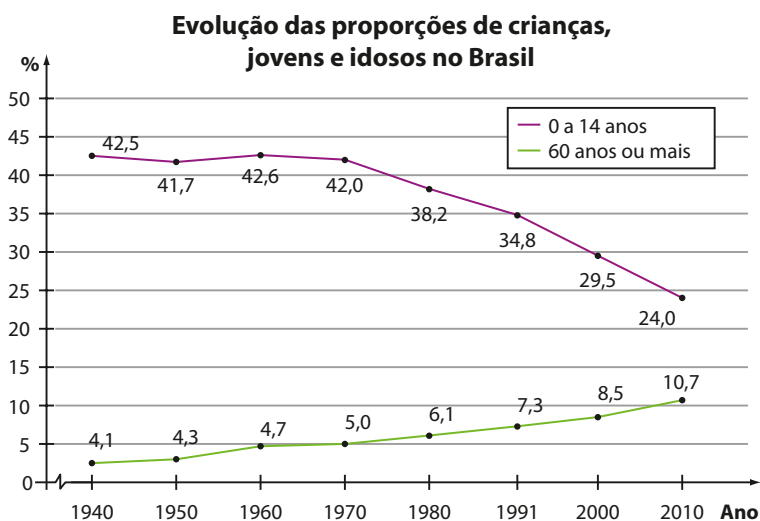
Observe o pictograma:

Pizzas vendidas no último semestre

Dados elaborados pelo autor.

É interessante notar os fracionamentos das *pizzas* desse pictograma: a *pizza* pela metade representa 100 unidades (maio); $\frac{1}{4}$ da *pizza* representa 50 unidades (julho) e $\frac{3}{4}$ da *pizza* representa 150 unidades (agosto).

EXERCÍCIOS

14 Analise o gráfico a seguir.

Evolução das proporções de crianças, jovens e idosos no Brasil

Fonte: IBGE, Censo demográfico 1940-2010. Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP22&t=populacao-grupos-idade-populacao-presente-residente>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Com base no gráfico, classifique as afirmações em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):

a) O percentual de jovens de até 14 anos vem caindo desde 1940.

b) A máxima diferença entre os percentuais de jovens de até 14 anos e adultos com 60 anos ou mais foi registrada no Censo de 1960.

c) Se a população brasileira em 2010 era de aproximadamente 190 milhões, então mais de 40 milhões de habitantes tinham até 14 anos.

d) Se o Censo de 2000 indicava uma população de 14 450 000 idosos no Brasil, então a população brasileira ultrapassava a barreira dos 175 milhões de pessoas.

15 A tabela seguinte informa o número de alunos inscritos, por região, no Enem de 2013.

Número de inscrições no Enem em 2013

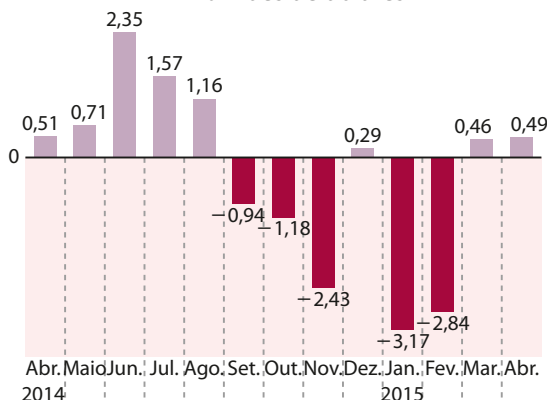
Região	Inscritos
Centro-Oeste	620 646
Norte	746 083
Sul	886 705
Nordeste	2 358 506
Sudeste	2 561 634
Total	**7 173 574**

Fonte: Indicadores Consolidados Enem 2013. Disponível em: <download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2013/indicadores_consolidados_dados_nacionais_estados_enem_2013.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

a) Represente esses dados em um gráfico de setores, indicando, para cada região, o respectivo percentual em relação ao total de alunos. Faça os arredondamentos necessários para usar números inteiros.

b) Considerando o gráfico obtido no item *a*, determine a medida aproximada (use um número inteiro de graus) dos ângulos dos setores correspondentes à região Sudeste e à região Norte.

16 O gráfico seguinte mostra a evolução mensal da balança comercial brasileira de abril de 2014 a abril de 2015. A balança comercial é a diferença (nesta ordem) entre as exportações e as importações de um país, em um determinado período.

Evolução do saldo da balança comercial
Em bilhões de dólares

Fonte: *O Estado de São Paulo*, 5 maio 2015.

a) Em que meses as importações brasileiras superaram as exportações?

b) Se, em abril de 2015, as exportações totalizaram 15,156 bilhões de dólares, determine o total das importações nesse mês.

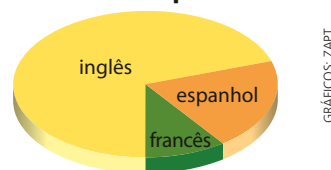
c) Em qual data do período considerado a diferença entre as exportações e importações (nessa ordem) foi máxima?

d) Considerando os meses de janeiro e fevereiro de 2015, determine, em bilhões de dólares, o aumento do saldo da balança comercial brasileira.

e) Representando por **x** o valor (em bilhões de dólares) das importações em fevereiro de 2015, qual é o valor das exportações nesse mesmo mês?

17 Numa escola, os alunos devem optar por um, e somente um, dos três idiomas: inglês, espanhol ou francês.

A distribuição da escolha de 180 alunos está indicada pelo gráfico a seguir.

Idioma escolhido pelos alunos

Dados elaborados pelo autor.

Sabendo que o ângulo do setor representado pelos alunos que escolheram inglês mede 252° e que apenas 18 alunos optaram por estudar francês, determine:

a) a medida do ângulo do setor correspondente a francês.

b) o número de alunos que optaram por espanhol e a medida do ângulo correspondente.

18 Na tabela seguinte vemos o número de medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos, desde os jogos de 1948, em Londres, até os de 2012, também em Londres.

Medalhas de ouro conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos

Ano	Medalhas de ouro
1948	0
1952	1
1956	1
1960	0
1964	0
1968	0
1972	0
1976	0
1980	2

Ano	Medalhas de ouro
1984	1
1988	1
1992	2
1996	3
2000	0
2004	5
2008	3
2012	3

Fonte: Portal oficial do governo federal sobre os jogos olímpicos e paralímpicos de 2016. Disponível em: <www.brasil2016.gov.br/pt-br/olimpiadas/as-edicoes>. Acesso em: 7 mar. 2016.

a) Considerando a variável "número de medalhas de ouro em Jogos Olímpicos", construa uma tabela de frequências.

b) Represente esse conjunto de dados em um gráfico de barras.

19 No pictograma seguinte está representada a quantidade de gols marcados em uma liga de futebol, durante os anos de 2011 a 2016. Cada bola de futebol representa 60 gols marcados.

Gols marcados

2011
2012
2013
2014
2015
2016

Dados elaborados pelo autor.

Determine:

a) a diferença entre o número de gols marcados em 2012 e em 2015.

b) o número total de gols marcados na liga nesses seis anos.

c) a média do número de gols marcados na liga nesses seis anos (a média é a razão entre o total de gols marcados e o número de anos considerados).

20 Na tabela abaixo, são apresentadas as temperaturas, hora a hora, em uma cidade da serra gaúcha em um dia de inverno no período de meia-noite (0h) às 13h.

Hora	Temperatura
0:00	1 °C
1:00	−2 °C
2:00	−1 °C
3:00	−3 °C
4:00	−5 °C
5:00	−4 °C
6:00	−1 °C
7:00	1 °C
8:00	2 °C
9:00	4 °C
10:00	4 °C
11:00	6 °C
12:00	9 °C
13:00	10 °C

Dados elaborados pelo autor.

a) Qual é a amplitude térmica registrada nesse período?

b) Qual dos gráficos – setores, pictograma ou linhas – é mais indicado para representar esse conjunto de dados? Faça a representação gráfica correspondente.

O enunciado a seguir refere-se às questões **21** e **22**.

O Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) é uma medida composta de indicadores de três dimensões do desenvolvimento humano: longevidade, educação e renda. O índice varia de 0 a 1; quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano.

O IDHM brasileiro segue as mesmas três dimensões do IDH Global, mas vai além: adequa a metodologia global ao contexto brasileiro e à disponibilidade de indicadores nacionais.

Na tabela seguinte, estão relacionados os índices de todos os estados brasileiros, além do Distrito Federal.

IDHM – Unidades da Federação – 2010

Estado	IDHM	Estado	IDHM
Acre	0,663	Paraíba	0,658
Alagoas	0,631	Paraná	0,749
Amapá	0,708	Pernambuco	0,673
Amazonas	0,674	Piauí	0,646
Bahia	0,660	R. de Janeiro	0,761
Ceará	0,682	R. Grande do Norte	0,684
Dist. Federal	0,824	R. Grande do Sul	0,746
Esp. Santo	0,740	Rondônia	0,690
Goiás	0,735	Roraima	0,707
Maranhão	0,639	Santa Catarina	0,774
Mato Grosso	0,725	São Paulo	0,783
M. Grosso do Sul	0,729	Sergipe	0,665
Minas Gerais	0,731	Tocantins	0,699
Pará	0,646		

Fonte: *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil 2013* (com dados do Censo 1991, 2000 e 2010). Disponível em: <www.pnud.org.br/atlas/ranking/Ranking-IDHm-UF-2010.aspx>. Acesso em: 3 nov. 2015.

21 Faça o que se pede:

a) Construa o histograma correspondente ao IDHM dos estados brasileiros, usando 5 intervalos de mesma amplitude (considere duas casas decimais para o valor da amplitude de cada intervalo).

b) Utilizando o gráfico construído no item anterior, determine o percentual de estados cujo IDHM é maior ou igual a 0,751.

22 Faça o que se pede:

a) Agrupe os valores do IDHM em intervalos de amplitude 0,1; a partir de 0,6, faça uma tabela de frequências e construa um histograma.

b) A partir do item *a*, determine a porcentagem de estados brasileiros (incluindo o Distrito Federal) que têm IDHM não inferior a 0,7.

23 O gráfico ao lado informa a distribuição, em certo mês, do número de faltas ao trabalho, por funcionário de uma empresa.

Faltas ao trabalho

Dados elaborados pelo autor.

Se essa empresa possui 2 400 funcionários, determine:

a) o número de funcionários que não faltaram ao trabalho nesse mês.

b) o número de funcionários que tiveram pelo menos duas faltas no mês.

24 No pictograma abaixo está representada a queda na área desmatada anualmente em uma floresta de certo país, devido à maior fiscalização dos órgãos governamentais, no período de 2012 a 2016. Cada árvore do gráfico representa 25 mil hectares de floresta desmatada.

Área desmatada anualmente

Dados elaborados pelo autor.

Sabendo que 1 hectare equivale a 10^4 m^2, determine:

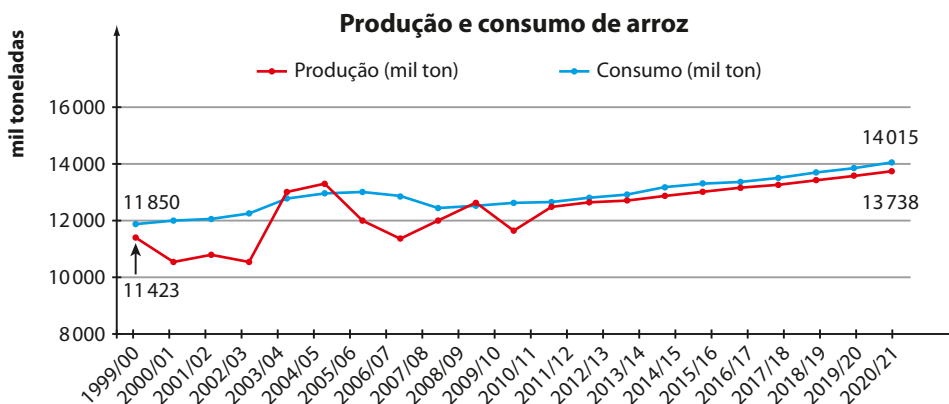
a) a área, em km^2, correspondente à superfície de floresta desmatada em 2013 e em 2015.

b) a queda percentual da área desmatada em 2014, na comparação com 2013.

c) a queda percentual da área desmatada em 2016, na comparação com 2012.

d) o número inteiro de campos de futebol equivalente à área de floresta desmatada em 2016, tomando como base um campo de futebol de 100 m de comprimento por 70 m de largura.

25 O gráfico informa a produção e o consumo de arroz registrados no Brasil desde 1999 e suas projeções até o biênio 2020/2021.

Produção e consumo de arroz

Fonte: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento – Projeções do agronegócio Brasil 2010/11 a 2020/21. Disponível em: <www.agricultura.gov.br/arq_editor/file/Ministerio/gestao/projecao/PROJECOES%20DO%20AGRONEGOCIO%202010-11%20a%202020-21%20-%202_0.pdf>. Acesso em: 7 mar. 2016.

Analise as afirmações seguintes, classificando-as em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**):

a) A projeção para o consumo de arroz no Brasil revela tendência de estabilidade a partir de 2010.

b) As projeções para a produção e o consumo de arroz no Brasil mostram que deverá haver necessidade de importação ou uso de estoques para suprir a demanda interna.

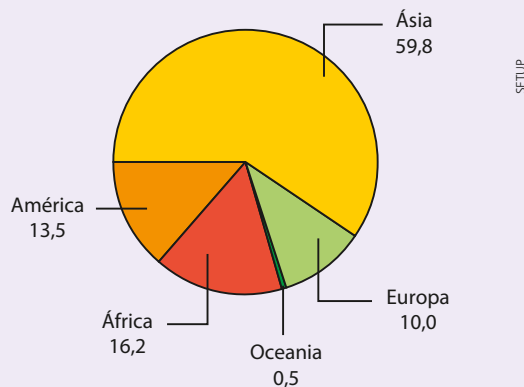
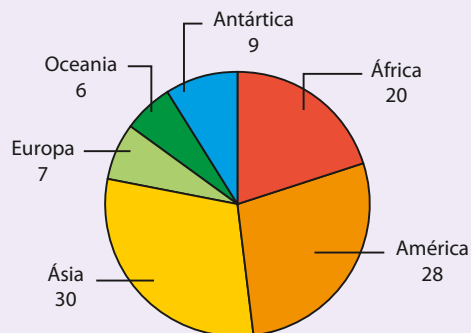
c) Em nenhum período considerado no gráfico a produção supera o consumo de arroz.

d) Do primeiro ao último biênio considerado, a produção de arroz terá crescido mais de 10%.

e) Do primeiro ao último biênio considerado, o consumo de arroz no Brasil terá aumentado em 2 165 toneladas.

DESAFIO

Com base nos gráficos a seguir, verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique suas respostas.

População* – 2015 (em %)
Total mundial: 7,349 bilhões de habitantes

Área* (em %)
Total mundial: 150 milhões de km²

* Distribuição nos continentes.

Fontes de pesquisa: World population prospects: the 2015 revision. Disponível em: <esa.un.org/unpd/wpp/dvd/Files/1_Indicators5%20 (Standartd)/EXCEL_FILES/1_Population/WPP2015_POP_F01_1_TOTAL_POPULATION_BOTH_SEXES.XLS>. Acesso em: 7 mar. 2016; The world factbook. Disponível em: <www.cia.gov/library/publications/resources/the-world-factbook/index.html>. Acesso em: 7 mar. 2016.

a) Em 2015, de cada 5 pessoas da Terra, praticamente 3 moravam na Ásia.

b) A Europa possui área inferior a 9 milhões de km^2.

c) Em 2015, as densidades demográficas dos continentes americano e africano praticamente coincidiam.

d) Em 2015, a densidade demográfica da Oceania era inferior a 5 habitantes por km^2.

e) Em 2015, apenas a Ásia possuía população superior a 1 bilhão de habitantes.

f) Se a população asiática fosse 10% maior, sua densidade demográfica também seria 10% maior.

Aplicações

Os censos demográficos

A Estatística também é utilizada para levantar informações sobre uma população inteira, como ocorre, por exemplo, nos censos demográficos.

Até 1872 não eram feitos levantamentos específicos de contagem do número de habitantes no Brasil. Havia apenas relatórios preparados com outras finalidades, como os de temática religiosa feitos pela Igreja, os relatórios dos funcionários da Colônia enviados às autoridades de Portugal ou, ainda, os levantamentos militares realizados pela Coroa Portuguesa visando à defesa do território.

O primeiro censo demográfico nacional, realizado em 1872, foi intitulado Recenseamento da População do Império do Brasil. Outros três ocorreram em 1890, 1900 e 1920.

Em 1935 foi criado o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), que implantou a periodicidade decenal e ampliou a abrangência temática dos questionários, introduzindo questões de cunho socioeconômico, como emprego, mão de obra, rendimentos, fecundidade etc.

EDSON GRANDISOLI/PULSAR IMAGENS

Equipamento de trabalho usado pelo agente do Censo.

Os censos coletam informações indispensáveis para a definição de políticas públicas estaduais e municipais e para a tomada de decisões de investimentos, tanto no âmbito público como no privado. Entre os principais usos dos resultados censitários, podemos citar:

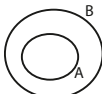
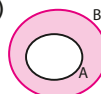
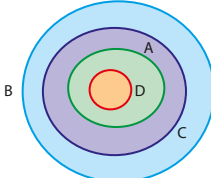
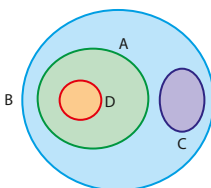
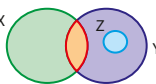
- acompanhar as taxas de crescimento, a distribuição geográfica e a evolução de características da população;
- identificar áreas que requerem investimentos prioritários em saúde, habitação, energia, educação, transporte, assistência ao idoso etc.;
- identificar áreas carentes em projetos sociais;
- fornecer informações precisas à União para o repasse de verbas para estados e municípios;
- analisar o perfil da mão de obra nos municípios e transmitir essas informações às organizações sindicais e profissionais, favorecendo decisões acertadas de investimentos do setor privado.

A sociedade brasileira cada vez mais necessita de informações detalhadas e geograficamente específicas. Assim, é importante que, no próximo Censo, cada cidadão receba bem os entrevistadores do IBGE e responda corretamente aos questionários.

No *site* do IBGE, no *link* <ces.ibge.gov.br/pt/base-de-dados/metadados/ibge/censodemografico>, podemos encontrar mais detalhes sobre a história dos censos no Brasil e sobre o último Censo de 2010, como metodologia, temas e subtemas, variáveis investigadas etc.

Fonte de pesquisa: IBGE, Censos demográficos. Disponível em: <memoria.ibge.gov.br/sinteses-historicas/historicos-dos-censos/censos-demograficos.html>. Acesso em: 7 mar. 2016.

TABELA TRIGONOMÉTRICA

Ângulo (graus)	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,01745	0,99985	0,01746
2	0,03490	0,99939	0,03492
3	0,05234	0,99863	0,05241
4	0,06976	0,99756	0,06993
5	0,08716	0,99619	0,08749
6	0,10453	0,99452	0,10510
7	0,12187	0,99255	0,12278
8	0,13917	0,99027	0,14054
9	0,15643	0,98769	0,15838
10	0,17365	0,98481	0,17633
11	0,19087	0,98163	0,19438
12	0,20791	0,97815	0,21256
13	0,22495	0,97437	0,23087
14	0,24192	0,97030	0,24933
15	0,25882	0,96593	0,26795
16	0,27564	0,96126	0,28675
17	0,29237	0,95630	0,30573
18	0,30902	0,95106	0,32492
19	0,32557	0,94552	0,34433
20	0,34202	0,93969	0,36397
21	0,35837	0,93358	0,38386
22	0,37461	0,92718	0,40403
23	0,39073	0,92050	0,42447
24	0,40674	0,91355	0,44523
25	0,42262	0,90631	0,46631
26	0,43837	0,89879	0,48773
27	0,45399	0,89101	0,50953
28	0,46947	0,88295	0,53171
29	0,48481	0,87462	0,55431
30	0,50000	0,86603	0,57735
31	0,51504	0,85717	0,60086
32	0,52992	0,84805	0,62487
33	0,54464	0,83867	0,64941
34	0,55919	0,82904	0,67451
35	0,57358	0,81915	0,70021
36	0,58779	0,80903	0,72654
37	0,60182	0,79864	0,75355
38	0,61566	0,78801	0,78129
39	0,62932	0,77715	0,80978
40	0,64279	0,76604	0,83910
41	0,65606	0,75471	0,86929
42	0,66913	0,74314	0,90040
43	0,68200	0,73135	0,93252
44	0,69466	0,71934	0,96569
45	0,70711	0,70711	1,00000
46	0,71934	0,69466	1,03553
47	0,73135	0,68200	1,07237
48	0,74314	0,66913	1,11061
49	0,75471	0,65606	1,15037
50	0,76604	0,64279	1,19175
51	0,77715	0,62932	1,23499
52	0,78801	0,61566	1,27994
53	0,79864	0,60182	1,32704
54	0,80903	0,58779	1,37638
55	0,81915	0,57358	1,42815
56	0,82904	0,55919	1,48256
57	0,83867	0,54464	1,53986
58	0,84805	0,52992	1,60033
59	0,85717	0,51504	1,66428
60	0,86603	0,50000	1,73205
61	0,87462	0,48481	1,80405
62	0,88295	0,46947	1,88073
63	0,89101	0,45399	1,96261
64	0,89879	0,43837	2,05030
65	0,90631	0,42262	2,14451
66	0,91355	0,40674	2,24604
67	0,92050	0,39073	2,35585
68	0,92718	0,37461	2,47509
69	0,93358	0,35837	2,60509
70	0,93969	0,34202	2,74748
71	0,94552	0,32557	2,90421
72	0,95106	0,30902	3,07768
73	0,95630	0,29237	3,27085
74	0,96126	0,27564	3,48741
75	0,96593	0,25882	3,73205
76	0,97030	0,24192	4,01078
77	0,97437	0,22495	4,33148
78	0,97815	0,20791	4,70463
79	0,98163	0,19087	5,14455
80	0,98481	0,17365	5,67128
81	0,98769	0,15643	6,31375
82	0,99027	0,13917	7,11537
83	0,99255	0,12187	8,14435
84	0,99452	0,10453	9,51436
85	0,99619	0,08716	11,43010
86	0,99756	0,06976	14,30070
87	0,99863	0,05234	19,08110
88	0,99939	0,03490	28,63630
89	0,99985	0,01745	57,29000

Esta tabela contém valores aproximados. Os arredondamentos utilizados são de cinco casas decimais.

RESPOSTAS

Noções de conjuntos

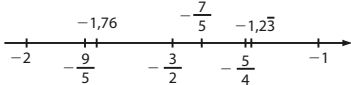
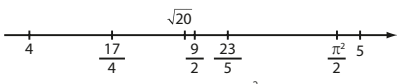
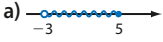
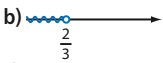
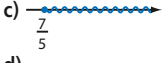
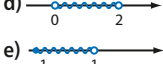
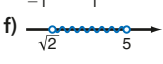
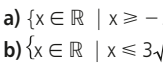
Exercícios

1. $-4 \in A$, $\frac{1}{3} \notin A$, $3 \in A$ e $0{,}25 \notin A$;
   $-4 \in B$, $\frac{1}{3} \in B$, $3 \notin B$ e $0{,}25 \in B$;
   $-4 \notin C$, $\frac{1}{3} \in C$, $3 \notin C$ e $0{,}25 \notin C$;
   $-4 \notin D$, $\frac{1}{3} \notin D$, $3 \notin D$ e $0{,}25 \in D$.
2. **a)** V **c)** F **e)** F
   b) F **d)** V **f)** V
3. A = {b, e, t, r, a}; B = {Pará, Piauí, Paraíba, Pernambuco, Paraná}; $C = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$.
4. A = {−1, 0}; B = {2}; C = {0, 4, 9}; D = {−1}; E = ∅.
5. **a)** F **c)** V **e)** V
   b) F **d)** V **f)** V
6. Unitários: **B**, **C** e **D**; vazios: **A**, **E** e **F**.
7. **a)** V **d)** V **g)** F
   b) F **e)** V **h)** F
   c) F **f)** F
8. **a)** **b)**
9. **a)**

b)

10. **a)** V **c)** V **e)** V
    b) F **d)** V **f)** F
11. {2, 4}
12. São verdadeiras: *c*, *e*, *f*.
13. **a)** {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4} e {2, 3, 4}.
    b) Entre outros, temos: {0, 2, 4, 6}, {0, 4, 6, 8} e {2, 4, 6, 8}.
    c) P(Z) = {∅, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}.
14. Todas são verdadeiras.
15. I. F II. V III. V IV. F
16. **a)** {p, q, r, s} **d)** {r}
    b) {p, q, r, s, t} **e)** {p}
    c) {p, r, s, t} **f)** {s}
17. **a)** {r, p, s, t} **c)** {p, s}
    b) ∅ **d)** {p, r, s, t}
18. **a)** {−1}
    b) U
    c) {−2, −1, 0, 1, 2, 3, 4}
    d) {−1, 0, 1}
19. 13
20. **a)** 6 **b)** 38
21. **a)** V **c)** V **e)** F **g)** F
    b) V **d)** F **f)** V **h)** V
22. X = {3}
23. Quatro.
24. **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F
25. **a)** V **d)** F **g)** F
    b) V **e)** V **h)** V
    c) F **f)** V **i)** V
26. **a)** {4, 8, 12, 14} **c)** ∅
    b) {5, 10, 15, 25} **d)** {2}
27. 2
28.

29. **a)** {−1, 1, 3} **h)** {−2, 0}
    b) A **i)** {−2, −1, 0, 2}
    c) {1, 2, 3} **j)** {−2, 0, 2, 5}
    d) {−2, 0} **k)** {4, 5}
    e) {1, 2, 3} **l)** {−2, 0}
    f) Não se define, pois A ⊄ B.
    g) {−2, 0, 2, 4}
30. X = {1, 3, 5}
31. **a)** 14 **d)** 15 **g)** 21
    b) 14 **e)** 21 **h)** 7
    c) 8 **f)** 29

Desafio

Alternativa *c*.

CAPÍTULO 2

Conjuntos numéricos

Exercícios

1. **a)** A ∩ B = {5, 6}; A ∪ B = ℕ.
   b) A ∩ B = B; A ∪ B = A.
   c) A ∩ B = B; A ∪ B = A.
   d) A ∩ B = {3}; A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5}.
2. **a)** A = {x ∈ ℕ | x < 5}, entre outros.
   b) B = {x ∈ ℕ | x ≤ 2 ou 7 < x < 11}, entre outros.
   c) C = {x ∈ ℤ | −2 < x < 5}, entre outros.
   d) D = {x ∈ ℤ | |x| = 3}, entre outros.
3. **a)** 1 **d)** −9 **g)** 1
   b) 11 **e)** −2 **h)** −10
   c) 6 **f)** 1
4. **a)** −18 ou 18.
   b) −2, −1, 0, 1 e 2.
5. 9
6. **a)** 2 **d)** −43 **g)** 11
   b) −30 **e)** −46 **h)** 14
   c) −3 **f)** 36
7. **a)** F **c)** F **e)** F
   b) F **d)** F
8. **a)** V **d)** V **g)** F **j)** F
   b) V **e)** F **h)** V
   c) F **f)** V **i)** F
9. **a)** $-5{,}0 = -\frac{5}{1}$
   b) $\frac{5}{12} = 0{,}41666... = 0{,}41\overline{6}$
10. **a)** $\frac{1}{20}$ **c)** $-\frac{51}{5}$ **e)** $\frac{33}{10}$
    b) $\frac{21}{20}$ **d)** $\frac{33}{100}$ **f)** $-\frac{9}{4}$
11. **a)** 2,4 **d)** 0,024
    b) 0,57 **e)** −2,8875
    c) 0,08
12. $\frac{1}{30}, -\frac{5}{13}, \frac{4}{11}, \frac{1\,000}{3}$.
13. $0{,}7\overline{3}$
14. Possíveis respostas: −3,32, −3,375, −3,38 etc.
15. **a)** $\frac{4}{9}$ **d)** $\frac{1\,714}{999}$ **g)** $\frac{34}{33}$
    b) $\frac{14}{99}$ **e)** $\frac{337}{300}$ **h)** $\frac{34}{33}$
    c) $\frac{25}{9}$ **f)** $\frac{23}{990}$
16. Não existe.
17. **a)** $\frac{16}{15}$ **b)** $\frac{4}{25}$
18.
    $-1{,}76$ $-\frac{7}{5}$ $-1{,}2\overline{3}$
    -2 $-\frac{9}{5}$ $-\frac{3}{2}$ $-\frac{5}{4}$ -1
19.
    $\sqrt{20}$
    4 $\frac{17}{4}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{23}{5}$ $\frac{\pi^2}{2}$ 5
    São irracionais: $\sqrt{20}$ e $\frac{\pi^2}{2}$.
20. **a)** Irracional. **g)** Racional.
    b) Racional. **h)** Racional.
    c) Irracional. **i)** Irracional.
    d) Irracional. **j)** Irracional.
    e) Racional. **k)** Racional.
    f) Racional.
21. **a)** F **b)** F **c)** F **d)** V **e)** F
22. **a)** Vazio. **c)** Unitário.
    b) Unitário. **d)** Vazio.

e) Vazio.
f) Unitário.
g) Unitário.
h) Vazio.

23. São irracionais: $A = \sqrt{2}$, $B = \sqrt{18}$ e $E = 4\sqrt{2}$.
São racionais: $C = 6$ e $D = 3$.

24. **a)** 1,73 e 1,74 **b)** 1,732 e 1,733

25. **a) V** **b) F** **c) V** **d) F** **e) F** **f) V** **g) F**

26.
a) −3 (aberta) a 5 (fechada): −3 5
b) até $\frac{2}{3}$ (aberta): $\frac{2}{3}$
c) a partir de $\frac{7}{5}$ (fechada): $\frac{7}{5}$
d) 0 (aberta) a 2 (aberta): 0 2
e) −1 (fechada) a 1 (aberta): −1 1
f) $\sqrt{2}$ (aberta) a 5 (aberta): $\sqrt{2}$ 5

27. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\sqrt{2}\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x \leqslant 1\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} < x \leqslant 0\right\}$

28. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} =]-3, +\infty[$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant \frac{4}{3}\right\} = \left]-2, \frac{4}{3}\right]$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4}{3}\right\} = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant -2\} =]-3, -2]$

29. Três.

30. $\left[-1, \frac{3}{2}\right[\cup [2, +\infty[$

31. **a)** 3,2 **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** 4 **d)** 20 **e)** 2 **f)** 5 **g)** $\frac{1}{12}$ **h)** 16

32. **a)** $\frac{9}{2}$ **b)** $\frac{5}{7}$ **c)** −1 **d)** 4

33. Região **Z**.

34. **a)** 120 **b)** 126 **c)** 60 **d)** 12,35 **e)** 675 **f)** 30 **g)** 262,5 **h)** 53,9 **i)** 2,7 **j)** 10,5

35. R$ 1 350,00; R$ 1 750,00.

36. **a)** 25 **b)** 5 **c)** 80 **d)** 34 **e)** 125

37. 33 g

38. **a)** $\frac{3}{10}$ **b)** $\frac{4}{3}$ **c)** 20 alunos.

39. **B** e **D**.

40. Aproximadamente 92,86%.

41. **a)** R$ 129,60 **b)** 35%

42. **a)** 27 **b)** 57,5%

43. **a)** 85% **b)** 6 750

Desafio

a) 462 **b)** 2 500

CAPÍTULO 3 Funções

Exercícios

1. **a)** R$ 7 000,00; R$ 17 500,00.
b) $y = 70 \cdot x$

2. **a)**

Nº de litros	Distância (km)
0,25	2,25
0,5	4,5
2	18
3	27
10	90
25	225
40	360

b) $d = 9 \cdot L$

3. **a)**

Tempo	Distância (km)
15 min = 0,25 h	225
0,5 h	450
2 h	1 800
5 h	4 500

b) 3 horas e 12 minutos.
c) $d = 900t$

4. **a)** 1 dia ⇒ R$ 86,73
5 dias ⇒ R$ 86,85
10 dias ⇒ R$ 87,00
30 dias ⇒ R$ 87,60
b) $y = 86{,}70 + 0{,}03 \cdot x$

5. **a)**

Lado (cm)	1	3,5	5	8	10
Perímetro (cm)	4	14	20	32	40
Área (cm²)	1	12,25	25	64	100

b) $p = 4\ell$
c) $a = \ell^2$
d) Sim; não.

6. **a)**

Nº de torneiras	1	4	6	8	10
Tempo (minutos)	40	10	$6,\overline{6}$	5	4

b) $t = \frac{40}{n}$
c) 25 torneiras.

7. **a)**

Nº de horas	1	2	3	4	5	6
Nº de células	2	4	8	16	32	64

b) 10 horas.
c) $n = 2^t$

8. **a)** Sim. **b)** Sim. **c)** Não. **d)** Não.

9. **a)** Sim; $y = x$ (entre outras).
b) Não
c) Sim; $y = 2x$.
d) Não.

10. **a)** Sim. **b)** Sim. **c)** Não. **d)** Sim.

11. **a)** Sim. **b)** Sim. **c)** Não.

12. **a)** 6 **b)** 8 **c)** 4 **d)** $\frac{17}{4}$ **e)** $10 - \sqrt{2}$

13. **a)** $f(0) = 6$; $f(-2) = 4$ e $f(1) = 4$.
b) $-2a$

14. **a)** 1 **b)** 1 **c)** 5 **d)** Não existe. **e)** 73

15. **a)** $\frac{16}{7}$ **b)** $-\frac{43}{2}$

16. **a)** 5 **b)** −7 **c)** Não existe. **d)** Não existe.

17. **a)** R$ 1 800 **b)** R$ 90 **c)** 6 anos.

18. **a)** $m = -10$ **b)** $-\frac{43}{4}$ **c)** $\frac{8}{3}$

19. **a)** 250 pagantes.
b) R$ 32,00
c) R$ 15 750,00

20. **a)** 3 **b)** 48

21. **a)** 8 000 pessoas. **b)** 9 500 pessoas. **c)** 100 pessoas. **d)** 19 anos.

22. **a)** 42 **b)** 23,2 cm **c)** 3,2 cm

23. $a = \frac{2}{3}$

24. 800

25. **a)** $D = A$; $CD = B$; $Im = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
b) $D = A$; $CD = B$; $Im = \{0, 1, 4\}$.
c) $D = A$; $CD = B$; $Im = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.
d) $D = A$; $CD = B$; $Im = \{0, 1, 2\}$.

26. 6

27. $\mathbb{Z}_-$

28. **a)** $\mathbb{R}$ **b)** $\mathbb{R}$ **c)** $\mathbb{R}^*$ **d)** $\mathbb{R} - \{1\}$

29. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
b) $\mathbb{R}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1 \text{ e } x \neq 0\}$

30. **a)** $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}\right\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, x \neq 0 \text{ e } x \neq 2\}$
d) $\mathbb{R}$

31. **a)** Das 10:00 às 12:00; das 12:30 às 14:00; das 15:30 às 16:00 e das 17:00 às 18:00.
b) Das 12:00 às 12:30; das 14:00 às 15:30; das 16:30 às 17:00.
c) Entre R$ 9,20 e R$ 12,00.
d) 15:00, um valor próximo das 16:00 e 17:00.
e) Alta; 2%.

32. **a)** Julho de 2013.
b) Fevereiro de 2015.
c) IPCA subiu: março a abril e julho a dezembro. IPCA caiu: janeiro a março e abril a julho.
d) 6 (jan 13; jan 15; fev 15; mar 15; abr 15 e jun 15).
e) Não.

33. **a) V**
b) F. Em 2009 a taxa em BH caiu (em relação a 2008) de 6,8% para 6,1% e a taxa em SP subiu de 8,3% para 8,9%.

c) V

d) F. Em 2013: RJ → 4,7% e BH → 4,3%.

e) F. Apenas a taxa era menor; para saber o número de desempregados é preciso conhecer as populações economicamente ativas das duas regiões.

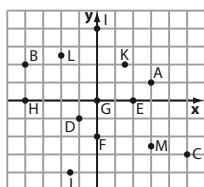
34. a) 1994 a 1995; 1997 a 1999; 2000 a 2003; 2005 a 2006 e 2009 a 2010.

b) 1994 e 1995; aumento superior a 1 000 km^2.

c) Maior área: 2003.

d) 2005 a 2006 e 2007 a 2008.

e) 67 714 campos.

35.

36. A(4, 2); B(−4, 6); C(−5, −3); D(4, −5); E(0, 4); F(−3, 0); G(0, −6); H(5, 0); I(0, 0).

37. a) x = 2 e y = − 5.

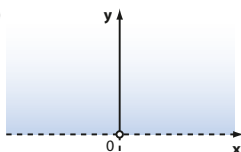
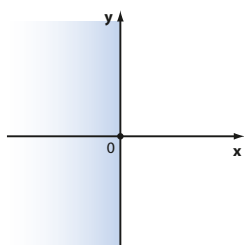
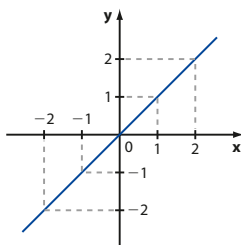
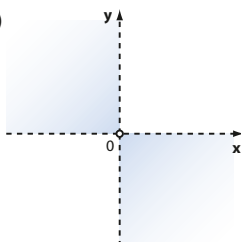
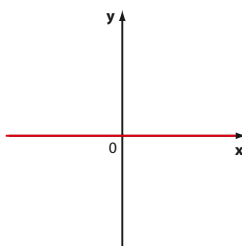
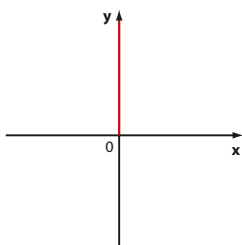
b) x = 1 e y = 4.

c) x = 4 e y = − 1.

38. m = −4

39. m = 3

40. m = −1 ou m = 1.

41. a)

b)

c)

d)

e)

f)

42. a) a < 0 e b > 0.

b) 1º quadrante.

43. a) a > 0 e b < 0.

b) 4º quadrante.

44. a)

b)

c)

d)

45. a)

b)

c)

46. a)

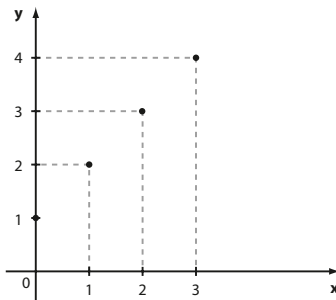
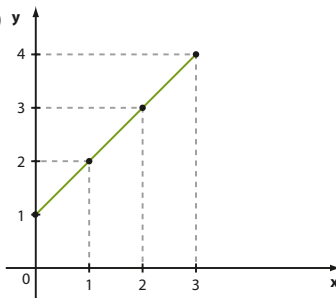
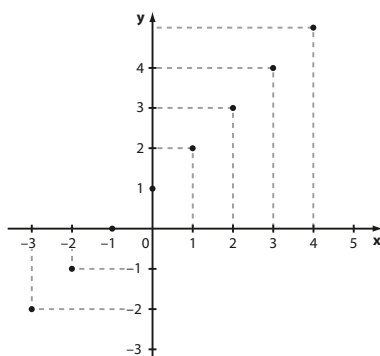
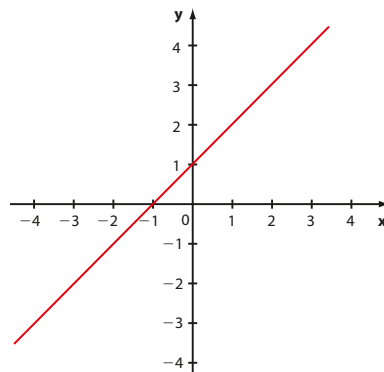
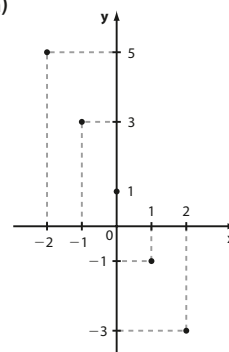
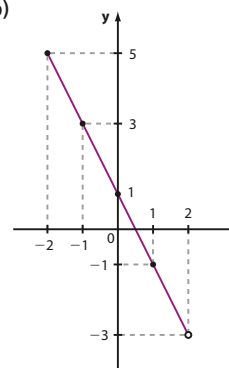
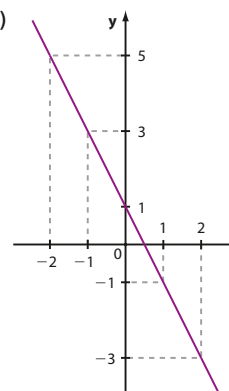
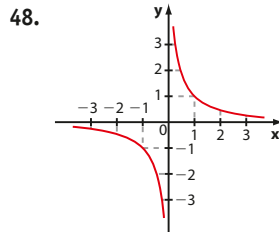
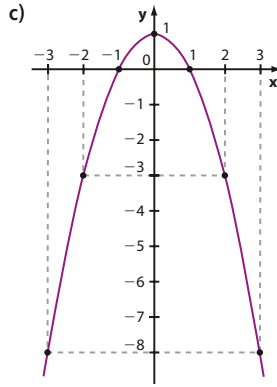
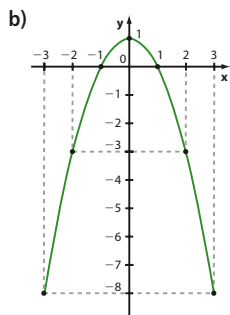
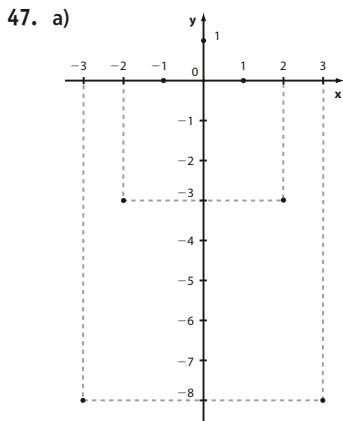
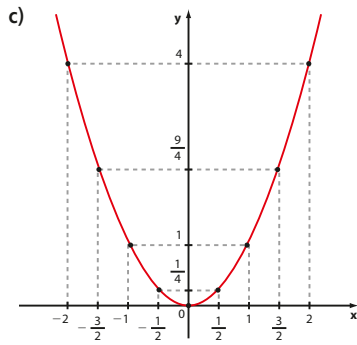
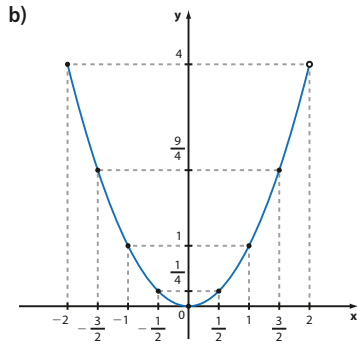
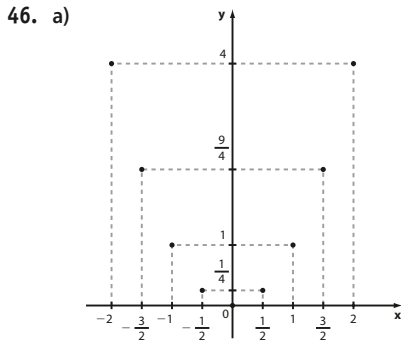
b)

c)

47. a)

b)

c)

48.

49. b = 3

50. a = 1 e b = 2.

51. **a)** a = −1 e b = 3.

b) A abscissa de **P** é $\frac{2}{3}$.

52. **c)** Qualquer $x < 0$ está associado a dois valores de **y**, não é gráfico de função.

d) $x = -3$ possui duas imagens: 1 e −1.

e) Quando $x \in]-1, 1[$, não há imagem correspondente.

g) $x = 1$ está associado a infinitos valores de **y**; $x \neq 1$ não possui imagem, não é gráfico de função.

53. **a)** **f** é crescente se $x > 0$; **f** é decrescente se $x < 0$.

b) **f** é crescente se $x > -3$; **f** é decrescente se $x < -3$.

c) **f** é constante se $x < 2$; **f** é crescente se $x > 2$.

d) **f** é crescente se $-2 < x < 4$; **f** é decrescente se $x < -2$ ou $x > 4$.

e) **f** é crescente em $\mathbb{R}$.

54. **a)** Raiz: −3

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -3 \\ y < 0, \text{ se } x < -3 \end{cases}$

b) Raízes: 0 e 2

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ y < 0, \text{ se } 0 < x < 2 \end{cases}$

c) Raízes: −1 e 1

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ y < 0, \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases}$

d) Raízes: −5, −3 e 1

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } -5 < x < -3 \text{ ou } x > 1 \\ y < 0, \text{ se } x < -5 \text{ ou } -3 < x < 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\ y < 0 \text{ não ocorre} \end{cases}$

Não há raízes reais.

f) Raízes: −3 e $\frac{15}{2}$

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } -3 < x < \frac{15}{2} \\ y < 0, \text{ se } x < -3 \text{ ou } x > \frac{15}{2} \end{cases}$

55. **a)** $f(-1) = 4$; $f(0) = 4$; $f(-3) = \frac{3}{2}$ e $f(3) = 0$.

b) $]-\infty, -2[$

c) $\left]\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right[$

d) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 3 \\ y < 0, \text{ se } 3 < x < \frac{9}{2} \end{cases}$

e) $\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{2} < y \leq 4\right\}$

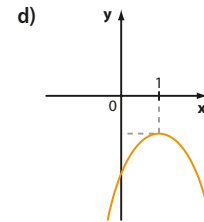
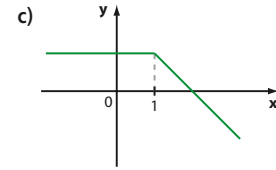
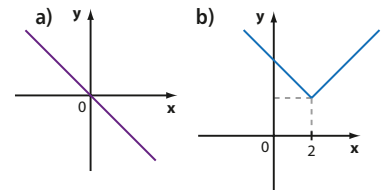
f) 3

56. Possíveis respostas:

a)

b)

c)

d)

57. **a)** $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

b) $\text{Im} = \{4\}$

c) $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 3\}$

d) $\text{Im} = \mathbb{R}^*_-$

58. **a)** P **b)** O **c)** I **d)** P

59. **a)** 0 **b)** 2 **c)** −3 **d)** 0

60. A taxa de variação nos cinco primeiros anos é o quádruplo da taxa de variação nos cinco últimos anos.

Assim, nos cinco primeiros anos o lucro cresceu quatro vezes mais rápido do que nos cinco últimos anos.

61. **a)** $4,\overline{6}$ **b)** 4 **c)** −2,5 **d)** −3

62. **a)** i) 118,6 municípios/ano

ii) 3,9 municípios/ano

iii) Aproximadamente 61,3 municípios/ano

b) 1960-1970

Desafio

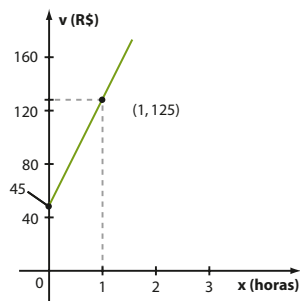
a) $D = \mathbb{R}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 3\right\}$

c) $D = \{0\}$

Função afim

Exercícios

1. **a)** R$ 245,00
b) Sim.
c) $v(x) = 45 + 80 \cdot x$

2. **a)** 76,26 kg
b) $m(n) = 75 + 0{,}18n$
c) Sim; após um mês ele terá 80,4 kg.

3. **a)** 1ª opção: $p(t) = 18$
2ª opção: $p(t) = 2{,}5 \cdot t$
b) R$ 5,50
c) 7 horas e 12 minutos.

4. **a)** 450 L
b) $y = 15x$
c) $y = 21\,000 - 15x$
d) 23 horas e 20 minutos.

5. **a)**

b)

c)

d)

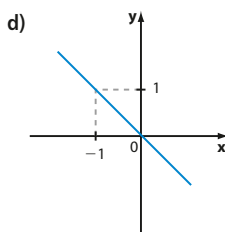
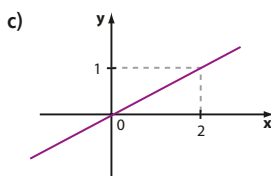
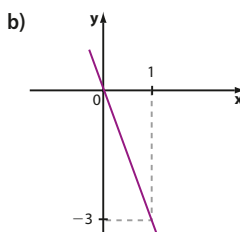
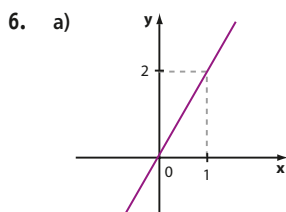
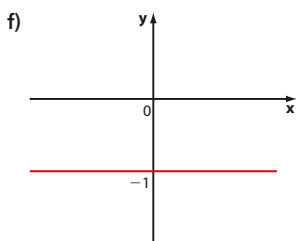
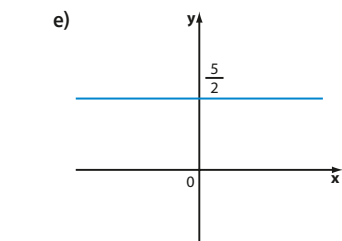
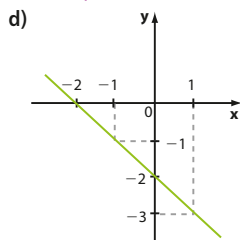
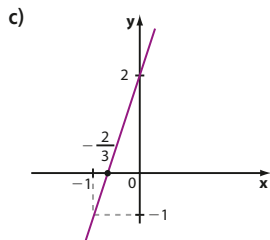
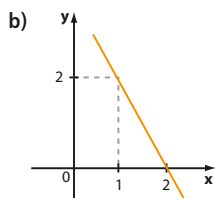
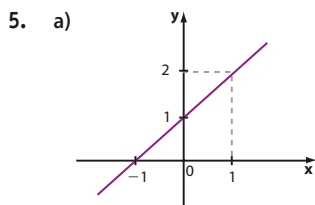
e)

f)

6. **a)**

b)

c)

d)

A propriedade é: todas as retas passam pela origem (0, 0).

7. $y = -3x + 2$

8. $y = \frac{1}{2}x + 4$

9. **a)** $y = -3x$ **b)** $y = 3x + 4$ **c)** $y = \frac{11}{3}$

10. R$ 82,40

11. **a)** 1 **b)** 2 **c)** 3,5

12. 7

13. **a)** $y = 0{,}04x + 900$
b) R$ 900,00
c) Não, pois a parte fixa não dobra.

14. **a)** (1, 3)
b) (3, 0)
c) Não existe ponto em comum; as retas **r** e **s** são paralelas.

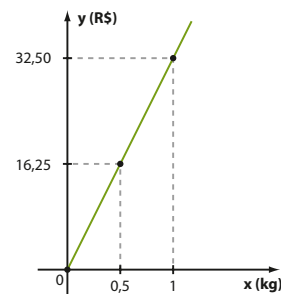
15. **a)** $a = 4{,}2$; $b = 1{,}7$; $c = 2$.
b) $a = 10$; $b = 40$.

16. R$ 3 000,00 a Paulo e R$ 2 400,00 a Roberto.

17. Sim; não.

18. **a)** Não. **b)** Sim.

19. **a)** Sim. **b)** 2,5 g/cm³ **c)** $m = 2{,}5 \cdot V$

20. **a)** R$ 9,75; R$ 19,50.
b) $y = 32{,}5 \cdot x$

c) 540 g

21. I, II e III.

22. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{5}{3}$ **d)** 0 **e)** $\frac{5}{6}$ **f)** 0

23. $-\frac{15}{2}$

24. **a)** $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$ **b)** $S = \{6\}$ **c)** $S = \{1\}$ **d)** $S = \varnothing$ **e)** $S = \{-1\}$ **f)** $S = \left\{\frac{15}{11}\right\}$

25. $med(\hat{A}) = 55°$, $med(\hat{B}) = 45°$ e $med(\hat{C}) = 80°$

26. **a)** André: 45 anos. Carlos: 49 anos.
b) Há 41 anos.

27. André: 15; Bruno: 18 e Carlos: 20.

28. Paulo: R$ 90,00
Joana: R$ 75,00

29. **a)** $a = 4 \Rightarrow S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$
$a = -3 \Rightarrow S = \{-1\}$
$a = 0 \Rightarrow S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$
b) Não; se $a = 2$ a equação não tem solução real.

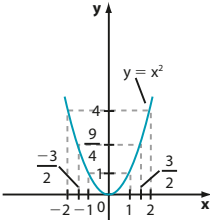
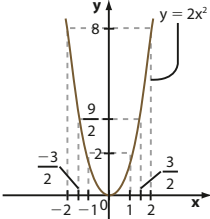
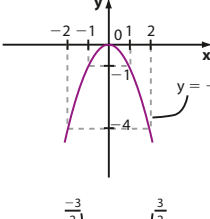
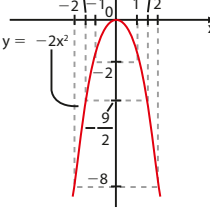
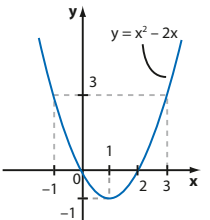
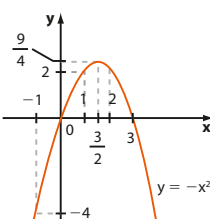
30. R$ 65,00

31. **a)** 4 **b)** −3 **c)** 1 **d)** −1

32. **a)** 37,5 kg **b)** 62,5 kg **c)** 93,75 kg

33. **a)** 125 milhões de m³.
b) 109,375 milhões de m³.
c) Dezembro de 2025.

34. R$ 6 000,00

35. **a)** R$ 4 000,00 é o custo fixo da empresa, que independe da quantidade produzida.
b) R$ 150,00
c) 20 litros.

36. **a)** 26,7 °C; 34,4 °C.
b) $y = 24{,}6 + 1{,}4x$

37. **a)** $a = 3$ e $b = -2$; crescente.
b) $a = -1$ e $b = 3$; decrescente.
c) $a = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{5}{3}$; decrescente.
d) $a = 9$ e $b = 0$; crescente.
e) $a = 4$ e $b = 8$; crescente.

38. **a)** $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 3$.
b) $a = 1$ e $b = -1$.

39. **a)** 1 300 L/h.
b) $a = 1\,300$ e $b = 0$.
c) $y = 1\,300x$, com **y** em litros e **x** em horas.
d) 20 horas.

40. **a)** $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -1 \\ y < 0, \text{ se } x < -1 \end{cases}$
b) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 2 \\ y < 0, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

41. **a)** $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -\frac{1}{4} \\ y < 0, \text{ se } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$
b) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < \frac{1}{3} \\ y < 0, \text{ se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$
c) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 0 \\ y < 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > 3 \\ y < 0, \text{ se } x < 3 \end{cases}$
e) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > 0 \\ y < 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$
f) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 3 \\ y < 0, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

42. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4}\right\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

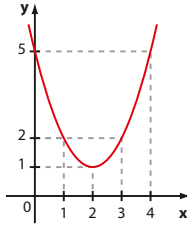
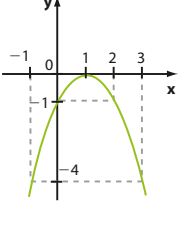
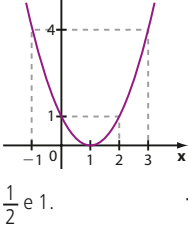
43. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -8\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{97}{34}\right\}$
c) $S = \varnothing$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{14}{3}\right\}$
e) $S = \mathbb{R}$

44. 1, 2 e 3.

45. **a)** B **b)** Acima de 5 horas.

46. **a)** $-732{,}20 + 40 \cdot n$
b) 14 meses.
c) 19 meses.

47. Maio de 2026.

48. **a)** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leq 2\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 6\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

49. **a)** Locadora 1: $y = 100 + 0{,}3 \cdot x$
Locadora 2: $y = 60 + 0{,}4 \cdot x$
Locadora 3 : $y = 150$
b) 401 km
c) 226 km

Desafio

Alternativa c.

CAPÍTULO 5 Função quadrática

Exercícios

1. **a)**

b)

c)

d)

2. **a)**

b)

3. **a)**

b)

c)

4. **a)** $\frac{1}{2}$ e 1.
b) 0 e 4.
c) 5 e −3.
d) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{3}$.
e) 3
f) 0
g) Não existem.
h) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.
i) −2 e 3.
j) −3 e 5.

5. **a)** $S = \{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$
b) $S = \{-1, 2\}$
c) $S = \left\{-1, -\frac{5}{2}\right\}$
d) $S = \left\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$
e) $S = \{-4, 2\}$

6. **a)** $S = \{-1, 1, 2\}$
b) $S = \{-5, 1\}$
c) $S = \left\{-\frac{2}{3}, 8\right\}$
d) $S = \{0, -3, -7\}$
e) $S = \{-2, -1, 1, 2\}$

7. $\frac{1}{2}$ e 2.

8. 100 cm

9. 10

10. **a)** **A**: R$ 4,20 e **B**: R$ 3,20.
b) **A**
c) 8 anos; R$ 6,20.

11. **a)** R$ 2,00 **b)** 90 **c)** 72

12. $p = 1$

13. $\left\{m \in \mathbb{R} \mid m < \frac{4}{5}\right\}$

14. $\begin{cases} m < 1 \Rightarrow \text{2 raízes reais e distintas} \\ m = 1 \Rightarrow \text{1 raiz real dupla} \\ m > 1 \Rightarrow \text{nenhuma raiz real} \end{cases}$

15. −1

16. **a)** $S = \frac{1}{3}$ e $P = -\frac{5}{3}$.
b) $S = 6$ e $P = 5$.
c) $S = 0$ e $P = -\frac{7}{2}$.
d) $S = 3$ e $P = -2$.
e) $S = -1$ e $P = -20$.

17. **a)** 3 **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** $\frac{39}{2}$ **d)** 2 **e)** 6

18. **a)** -8 e -3. **b)** $p = 24$

19. As raízes são 11 e 14; $p = 77$.

20. $m = 8$

21. **a)** $S = \{3, -1\}$ **b)** $S = \{-5, -1\}$ **c)** $S = \{-5, 1\}$ **d)** $S = \{-7, 5\}$

22. **a)** $S > 0$ e $P > 0$. **b)** $S < 0$ e $P > 0$. **c)** $S > 0$ e $P < 0$.

23. $m = -3$

24. **a)** $f(x) = x \cdot (x - 8)$
b) $f(x) = (x - 2) \cdot (x - 5)$
c) $f(x) = -2x \cdot (x - 5)$
d) $f(x) = -(x - 5)^2$
e) $f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 0,5) =$
$= (2x - 1) \cdot (x - 2)$

25. **a)** $(3, -5)$ **b)** $\left(-\frac{1}{4}, \frac{25}{8}\right)$ **c)** $(0, -9)$

26. **a)** Valor máximo = 450
b) Valor mínimo = 4
c) Valor máximo = -4
d) Valor mínimo = 2

27. **a)** $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -2\}$
b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 5\}$
c) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{9}{4}\right\}$
d) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$

28. $b = 30$; $c = -25$.

29. **a)** 35 m **b)** 3 s e 5 s. **c)** 80 m **d)** 8 s

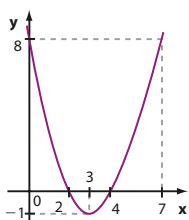
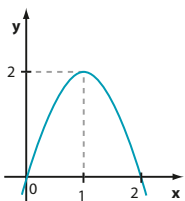
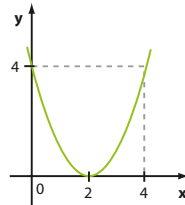
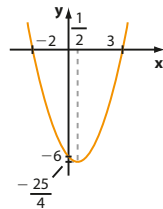
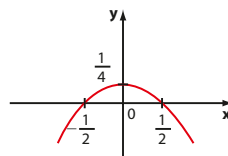
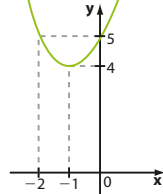
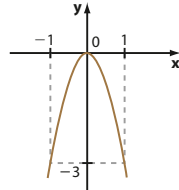
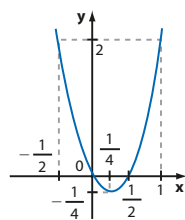
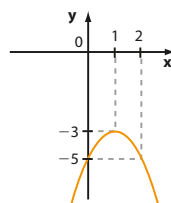
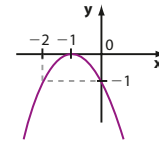
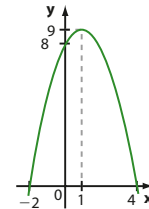
30. **a)** De 2010 a 2012.
b) R$ 3 600,00
c) Em 2020; R$ 42 000,00.

31. **a)** 36 semanas.
b) 18 semanas; 6 480 *downloads*.

32. **a)** $x = y = 25$ m
b) $x = 25$ m; $y = 12,5$ m; redução de 50%.

33. O retângulo de área máxima é um quadrado de lado de medida 5 cm; 25 cm².

34. $x = 1$, $y = -1$; a soma é igual a 2.

35. **a)** $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$

c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

d) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{25}{4}\right\}$

36. **a)** $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 4\}$

c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0\}$

37. **a)** **f** é crescente se $x > \frac{1}{4}$.
f é decrescente se $x < \frac{1}{4}$.

b) **f** é crescente se $x < 1$.
f é decrescente se $x > 1$.

c) **f** é crescente se $x < -1$.
f é decrescente se $x > -1$.

d) **f** é crescente se $x < 1$.
f é decrescente se $x > 1$.

38. **a)** 1 cm
b) $y = 2,5x$
c) 5º dia; 12,5 cm.
d) 2,5 cm/dia; 2,5 cm/dia.

39. $a < 0$; $b > 0$ e $c > 0$.

40. **a)** $y = 2x^2 + 2x - 4$
b) $y = 4x^2 - 12x + 5$

41. **a)** $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
b) $g(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{3}$
c) $\frac{5}{3}$

42. **a)** $y = -x^2 + 2x + 8$
b) $y = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$
c) $y = -2x^2 + 3x + 1$

43. **a)** $\begin{cases} x < 1 \text{ ou } x > 5 \Rightarrow y < 0 \\ 1 < x < 5 \Rightarrow y > 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} \forall x \neq 0 \Rightarrow y > 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \mid y < 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} \forall x \neq 2 \Rightarrow y > 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \mid y < 0 \end{cases}$
d) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y < 0$

44. **a)** $\begin{cases} x < -3 \text{ ou } x > \frac{1}{3} \Rightarrow y < 0 \\ -3 < x < \frac{1}{3} \Rightarrow y > 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} x < -\frac{5}{4} \text{ ou } x > 1 \Rightarrow y > 0 \\ -\frac{5}{4} < x < 1 \Rightarrow y < 0 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \Rightarrow y > 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \mid y < 0 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x < -\sqrt{2} \text{ ou } x > \sqrt{2} \Rightarrow y < 0 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow y > 0 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x \neq 1 \Rightarrow y < 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \mid y > 0 \end{cases}$
f) $\forall x \in \mathbb{R}, y > 0$
g) $\begin{cases} x \neq 0 \Rightarrow y > 0 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \mid y < 0 \end{cases}$
h) $\begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 0 \Rightarrow y > 0 \\ -2 < x < 0 \Rightarrow y < 0 \end{cases}$

45. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 14\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{3}\right\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$
d) $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$
e) $S = \mathbb{R}$
f) $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

46. **a)** $S = \varnothing$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$
c) $S = \varnothing$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 5\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant -1\}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

47. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 4\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$
d) $S = \mathbb{R}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$
f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < 0\right\}$

48. **a)** R$ 1 200 000,00
b) $0 < x < 20$ ou $x > 100$.
c) De 43 667 a 76 333.

49. **a)** 6 e −4.
b) $V_f\left(1, \frac{25}{6}\right)$
$V_g\left(\frac{5}{2}, -\frac{63}{80}\right)$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 6\}$

50. $\{m \in \mathbb{R} \mid m < -1\}$

Desafio

Alternativa *a*.

CAPÍTULO 6 Função definida por várias sentenças

Exercícios

1. **a)** −1 **b)** −1 **c)** −1 **d)** 1 **e)** 1

2. **a)** 1 **b)** 10 **c)** 41

3. **a)** −3 **b)** −4 **c)** −1

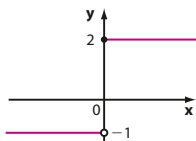
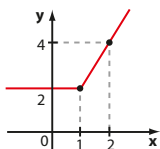
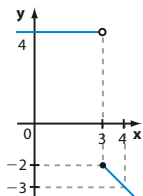
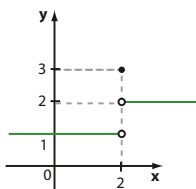
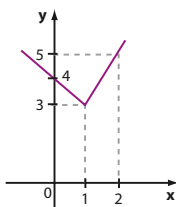
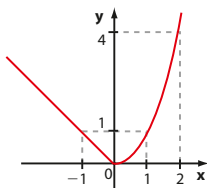
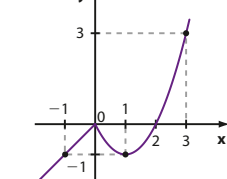
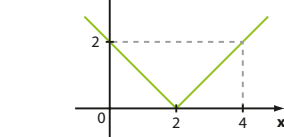
4. **a)** $-\frac{5}{2}$ ou $\frac{3}{2}$. **b)** −1

5. 100 minutos ou 160 minutos.

6. **a)** R$ 12,10
b) $p(x) = \begin{cases} 0{,}1x; & \text{se } 0 < x \leqslant 100 \\ 3 + 0{,}07x; & \text{se } x > 100 \end{cases}$
c) R$ 9,10
$p(x) = \begin{cases} 0{,}1x; & \text{se } 0 < x \leqslant 100 \\ 0{,}07x; & \text{se } x > 100 \end{cases}$

7. **a)** 2 unidades: R$ 13,60;
3 unidades: R$ 20,40;
4 unidades: R$ 21,60;
5 unidades: R$ 27,00.
b) $y = \begin{cases} 6{,}80 \cdot x; & \text{se } x \leqslant 3 \\ 5{,}40 \cdot x; & \text{se } x > 3 \end{cases}$ $(x \in \mathbb{N})$

8. **a)** $\mathbf{R_1}$: R$ 38,40 e $\mathbf{R_2}$: R$ 51,00.
b) 62 m³
c) $v(x) = \begin{cases} 1{,}20 \cdot x; & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 1{,}80 \cdot x - 12; & \text{se } 21 \leqslant x \leqslant 50 \\ 2{,}90 \cdot x - 67; & \text{se } x > 50 \end{cases}$

9. **a)** $Im = \{-1, 2\}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 4 \text{ ou } y \leqslant -2\}$

10. **a)** $Im = \{1, 2, 3\}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

d) $Im = \mathbb{R}$

e) $Im = \mathbb{R}_+$

11. **a)** $y = \begin{cases} 3, & \text{se } x \geqslant -1 \\ -2, & \text{se } x < -1 \end{cases}$
b) $y = \begin{cases} 3x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

12. **a)** $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geqslant 1 \\ -2x + 4, & \text{se } x < 1 \end{cases}$
b) $S = \left\{4, -\frac{1}{2}\right\}$
c) $k \geqslant 2$

13. **a)** I: plano Beta; II: plano Alfa.
b) Cliente **A**: R$ 80,00; cliente **B**: R$ 104,00.
c) 200 minutos.
d) Até 116 minutos ou de 131 minutos em diante.

14. **a)** 9 **b)** $\frac{5}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 0 **e)** $\sqrt{2}$ **f)** 0,83 **g)** 8 **h)** 8 **i)** $\frac{2}{9}$

15. **a)** 13 **b)** 6 **c)** 0,2 **d)** 0,2 **e)** $\frac{2}{5}$ **f)** $\frac{1}{3}$ **g)** $-\sqrt{7}$ **h)** 8 **i)** 8

16. **a)** $A = 0$
b) $B = 3\sqrt{2} - 1$
c) $C = \sqrt{10} - 3$

17. **a)** −1 **b)** 4 **c)** 2 **d)** 1

18. (I) e (II) são falsas; tome, por exemplo, $x = -5$ e $y = 4$.
(III) é verdadeira.
(IV) é falsa; tome, por exemplo, $x = -2$.

19. **a)**

b)

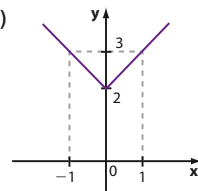
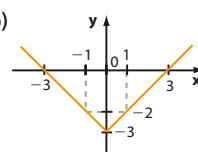
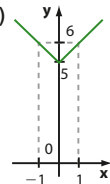
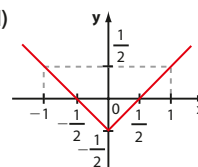
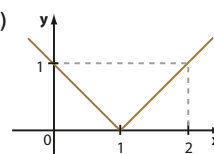
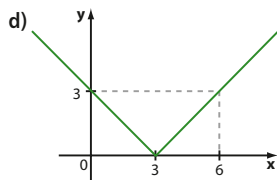
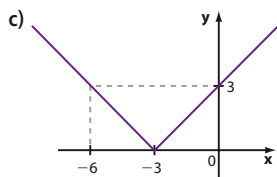
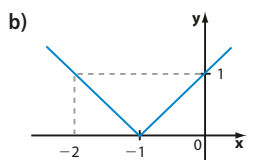
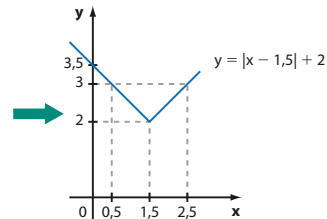
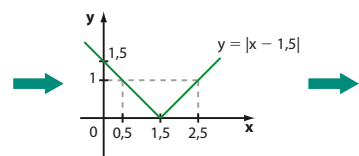
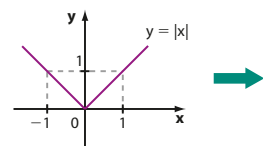
c)

d)

20. **a)**

b)

c)

d)

21.

22. **a)** 12 **b)** Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\}$

23. **a)** $S = \{-4, 4\}$ **b)** $S = \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$ **c)** $S = \{0\}$ **d)** $S = \varnothing$ **e)** $S = \varnothing$ **f)** $S = \{-3, 3\}$

24. **a)** $S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$
b) $S = \{-2, -10\}$
c) $S = \{-2, 4, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$
d) $S = \{-3, 3\}$
e) $5 = \{-2, 0, 1, 3\}$

25. **a)** $S = \left\{\frac{5}{3}, 5\right\}$
b) $S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$
c) $S = \left\{\frac{15}{4}\right\}$
d) $S = \{1, -4\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$
g) $S = \{-5, 5\}$

26. $\{p \in \mathbb{R} \mid p \geq 3\}$

27. **a)** 760 cupons; 460 cupons.
b) Dia 7 e dia 11.
c) Dia 9; 400 cupons.

28. **a)** Duplas: **B** e **C**.
b) 4,164 cm ou 4,188 cm.

29. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 6\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2}\right\}$
e) $S = \mathbb{R}$
f) $S = \varnothing$
g) $S = \{0\}$
h) $S = \mathbb{R}$

30. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10 \text{ ou } x > 4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{9}{5} < x < 3\right\}$

31. **a)** Nos meses de janeiro, novembro e dezembro.
b) Em junho; 3.

32. **a)** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$
b) $D = \mathbb{R}$

Desafio

2 unidades de área.

Função exponencial

Exercícios

1. **a)** 125 **b)** −125 **c)** $\frac{1}{125}$ **d)** $-\frac{8}{27}$ **e)** 2 500 **f)** 1 **g)** $\frac{3}{2}$ **h)** 1 **i)** 32 **j)** −100 **k)** $\frac{1}{1\,000}$ **l)** −4

2. **a)** 0,04 **b)** 10 **c)** 3,4 **d)** 1 **e)** 400 **f)** 0,8 **g)** 1,728 **h)** 10,24 **i)** 0,216 **j)** 12,5 **k)** $-\frac{10}{3}$ **l)** 10 000

3. **a)** −5 **b)** 7 **c)** $-\frac{15}{4}$ **d)** −5 **e)** $\frac{3}{2}$ **f)** $\frac{40}{9}$

4. **a)** 11^6 **b)** $2^0 = 1$ **c)** 10^{-1} **d)** 10^2 **e)** 6^3

5. $B < C < A \left(-\frac{3}{2} < -1 < -\frac{1}{8}\right)$

6. **a)** 2^{99} **b)** 3^{21} **c)** 2^{61} **d)** 5^{42}

7. 2^{19}

8. **a)** 13 **b)** 8 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{2}$ **e)** $\frac{1}{2}$ **f)** 10 **g)** 2

9. **a)** $3\sqrt{2}$ **b)** $3\sqrt{6}$ **c)** $3 \cdot \sqrt[3]{2}$ **d)** $12\sqrt{2}$ **e)** $2 \cdot \sqrt[4]{15}$ **f)** 10 000

10. **a)** $9\sqrt{2}$ **b)** $-8\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$ **c)** $4 \cdot \sqrt[3]{2}$ **d)** $21\sqrt{3}$ **e)** $2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$

11. **a)** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **c)** $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **d)** $\sqrt[3]{9}$ **f)** $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ **g)** $\frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$

12. **a)** 12 **b)** $4 \cdot \sqrt{3}$ **c)** $2 \cdot \sqrt{6}$ **d)** 256 **e)** 18 **f)** 4 **g)** $9 + 2\sqrt{14}$ **h)** $11 - 6\sqrt{2}$ **i)** $\sqrt[6]{32}$

13. **a)** 3 **b)** 16 **c)** 2 **d)** 4 **e)** 24 **f)** $\frac{1}{2}$ **g)** $\frac{3}{10}$ **h)** $\frac{1}{3}$ **i)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. **a)** 4 **b)** $\frac{1}{12}$ **c)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **d)** 1 024 **e)** 9 **f)** $\frac{10}{3}$ **g)** 8 **h)** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **i)** 100

15. 5

16. **a)** 1,84 m² **b)** 1,80 m **c)** 10

17. **a)**

b) Im = $\mathbb{R}^*_+$

c) Im = $\mathbb{R}^*_+$

d)

18. **a)** 3 **b)** 18 **c)** 3

19. **a)** a = 1 e b = 2.

b) Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

c) $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

d) **f**: não possui raízes reais.
g: 3

20. **a)**

b)

c)

d)

21. **a)**

t (horas)	0,5	1,0	1,5	2	3	5
Número de milhares de bactérias	30	90	270	810	7 290	590 490

b) $n(t) = 10 \cdot 3^{2t}$

22. **a)**

Anos	1	2	3	4	5
Saldo (R$)	2 120,00	2 247,20	2 382,03	2 524,95	2 676,45

b) $s(x) = 2\,000 \cdot 1{,}06^x$

c) Não.

23. **a)**

Anos	1	2	3	4
Valor (R$)	10 800	9 720	8 748	7 873,20

b) Aproximadamente R$ 5 740,00.

c) $v(t) = 12\,000 \cdot 0{,}9^t$

24. **a)** **F**; será de 144 000.
b) **F**; será de 175 000.
c) **F**; o município **A** terá 200 mil habitantes e o **B**, 207 360 habitantes.
d) **F**; y = 100 000 + 25 000x
e) **V**

25. **a)** 25 unidades. **b)** 4 unidades. **c)** 55 unidades.

26. **a)** S = {4} **b)** S = {8} **c)** S = {1} **d)** S = {5} **e)** S = {1} **f)** $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ **g)** S = {4} **h)** S = {−1} **i)** S = {2} **j)** S = ∅ **k)** S = ∅

27. **a)** $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$ **b)** $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ **c)** $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ **d)** S = {2} **e)** $S = \left\{-\frac{5}{6}\right\}$ **f)** $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ **g)** $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$ **h)** $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

28. 7,5 meses.

29. **a)** R$ 250 000,00
b) R$ 12 500,00
c) R$ 330 625,00
d) 37 anos.

30. **a)** a = 3 000 e b = 1,5.
b) 6 000 pessoas.
c) 192 000 pessoas.
d) 7 dias.

31. **a)** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **b)** S = {−14} **c)** S = {− 1} **d)** $S = \left\{-\frac{1}{2}; -2\right\}$

32. **a)** S = {3} **b)** S = {0} **c)** S = {2} **d)** S = {2}

33. **a)** S = {(1, −2)}
b) S = {(8, 18)}

34. **a)** **A**: 122 mil reais e **B**: 249,5 mil reais.
b) **B**
c) 8 anos.

35. **a)** k = −1 **b)** 33 750 habitantes.

36. **a)** R$ 5 000,00 **b)** 25 anos.

c)

Desafio

a) $\alpha = 54$ e $\beta = -\frac{1}{90}$.

b) 360 minutos.

Capítulo 8 Função logarítmica

Exercícios

1. **a)** 4 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 5 **f)** 2 **g)** 5 **h)** 3

2. **a)** −2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{7}{2}$ **e)** $\frac{1}{4}$ **f)** −2 **g)** $-\frac{3}{2}$ **h)** $-\frac{2}{3}$ **i)** −2 **j)** −1

3. B < D < C < A

4. **a)** 0 **b)** −2 **c)** 6 **d)** 5 **e)** $\frac{1}{3}$ **f)** $\frac{3}{2}$

5. **a)** −2 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** −1 **d)** 1 **e)** 3 **f)** −4

6. **a)** x = 16 **b)** $x = \frac{1}{3}$ **c)** x = 1 **d)** $x = \frac{11}{6}$

7. **a)** x = 81 **b)** x = 4 **c)** x = 2 **d)** x = 4 **e)** 0 < x e x ≠ 1. **f)** x = 5

8. **a)** −2 **b)** $\frac{1}{7}$ **c)** 12 **d)** $-\frac{4}{9}$ **e)** −1

9. m = 16; a raiz é −2.

10. **a)** 128 **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** 343 **d)** 16 **e)** $\sqrt{7}$

11. **a)** 1 **b)** 0 **c)** −1 **d)** 8 **e)** −1 **f)** 3 **g)** 8 **h)** 25 **i)** $2e^2$ **j)** −6

12. **a)** 1 **b)** −5 **c)** 0 **d)** 7 **e)** $-\frac{3}{2}$ **f)** 4

13. **a)** $1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$
b) $2 \log b - 1 - \log a$
c) $\log_3 a + 2 \log_3 b - \log_3 c$
d) $3 + \log_2 a - 3 \log_2 b - 2 \log_2 c$
e) $\frac{3}{2} + \log_2 a + \frac{3}{2} \log_2 b$

14. **a)** $a + b$ **b)** $b - a$ **c)** $1 - a$ **d)** $b + 1$ **e)** $-2a$ **f)** $3a + 2b$ **g)** $b - 1$ **h)** $\frac{1}{3}(a + 2b) - \frac{1}{3}$ **i)** $3a + b - 3$ **j)** $b - 2a$ **k)** $a + 4$

15. **a)** abc **b)** $\frac{a^3 \cdot c^2}{b}$ **c)** $\frac{a}{9b}$ **d)** $\frac{\sqrt{a}}{b}$

16. **a)** 1 **b)** 1 **c)** −2

17. **a)** 60 **b)** $\sqrt{12}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** 625

18. **a)** 3,48 **b)** −2,7 **c)** 0,24 **d)** 1,3 **e)** −1,22 **f)** 1,68 **g)** 2,1

19. **a)** 3,32 **b)** 8,96 **c)** 10,64 **d)** $-0{,}77\overline{3}$ **e)** −0,96

20. **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F **e)** V **f)** V

21. **a)** 68% **b)** 99 minutos.

22. **a)** $S = \{6\}$ **b)** $S = \{1\}$ **c)** $S = \left\{\frac{9}{8}\right\}$ **d)** $S = \{2\}$ **e)** $S = \left\{\frac{1}{10}\right\}$

23. **a)** $S = \{(8, 2), (2, 8)\}$ **b)** $\left\{\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

24. **a)** $\frac{\log_2 3}{\log_2 5}$ **b)** $\frac{\log_2 5}{\log_2 10}$ **c)** $\frac{2}{\log_2 3}$ **d)** $\frac{\log_2 3}{\log_2 e}$

25. **a)** 0,625 **b)** 0,686 **c)** $2,\overline{3}$ **d)** $4,1\overline{6}$ **e)** 2,1 **f)** $\simeq -0{,}1923$

26. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 1

27. **a)** $\frac{1}{a}$ **b)** $\frac{1}{2a}$ **c)** $\frac{1 + a}{a}$ **d)** $\frac{2}{3a}$

28. **a)** 1 **b)** $\log_6 2$ **c)** $\frac{3}{8}$ **d)** 11

29. **a)** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
d) $D = \mathbb{R}$
e) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{4}{3}\right\}$

30. **a)** V **b)** V **c)** F; $f(10x) = 1 + f(x)$ **d)** V **e)** V

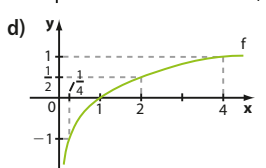
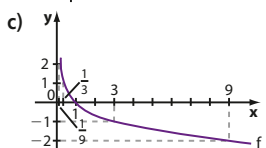
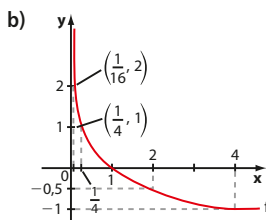
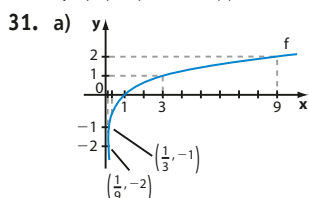
31. **a)**

b)

c)

d)

32. **a)** $D =]-1, +\infty[$ **b)** $a = 3$; $b = 2$.

33. **a)** $k = -1$ **b)** 3 u.a. **c)** 10

34. *b*, *d* e *f*.

35. **a)** 425 funcionários.
b) 25 funcionários.
c) 3,125 funcionários/ano.

36. $\frac{127}{8}$ u.a.

37. **a)** $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$
b) $x > 1$
c) $\frac{7}{2}$

38. **a)** $\log_{\frac{1}{3}} 4$ **b)** $\log_2 \pi^2$ **c)** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$

39. **a)** $S = \{2{,}08\overline{3}\}$ **b)** $S = \{0{,}8\}$ **c)** $S = \{4{,}8\}$ **d)** $S = \{0{,}78\}$ **e)** $S = \{2,\overline{3}\}$ **f)** $S = \{0{,}625\}$ **g)** $S = \{2{,}2\}$ **h)** $S = \{1{,}6\}$

40. 4,5 anos.

41. **a)** R$ 2 400,00; R$ 2 880,00.
b) 12 anos; 22 anos.

42. **a)** R$ 600 000,00 **b)** R$ 60 000,00 **c)** 10% **d)** 30 anos.

43. **a)** $p = 30\,000$ e $q = 0{,}9$.
b) 10 anos e 5 meses.

44. **a)** 24 anos. **b)** 35 anos.

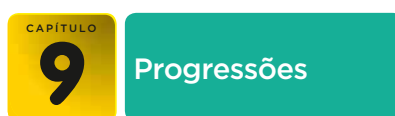
45. **a)** $\frac{1}{29}$ **b)** 67,28 anos.

46. 15 meses.

47. Alternativa *e*.

Desafio

5ª vez

Progressões

Exercícios

1. **a)** 7 **b)** 17 **c)** 52

2. (6, 18, 54, 162)

3. **a)** (6, 9, 12, 15, ...) **b)** (3, 4, 7, 12, ...)

4. **a)** 405
b) 71 pertence (18º termo);
−345 pertence (122º termo);
−195 não pertence.

5. (−5, −7, −11, −19, −35, ...)

6. 486

7. (3, 13, 37, 81, 151, 253, ...)

8. **a)** a_n: (−190, −187, −184, −181, −178, ...).
b_n: (216, 212, 208, 204, 200, ...).
b) 2; 65º termo.
c) −4; 56º termo.
d) −16; 59º termo.

9. *a*, *c*, *d* e *f*.

10. **a)** −3; decrescente. **b)** 6; crescente. **c)** 0; constante. **d)** −10; decrescente. **e)** $\frac{2}{3}$; crescente. **f)** 1; crescente.

11. **a)** 84 **b)** 172

12. **a)** 26
b) $a_n = 8 + 9n$; $n \in \mathbb{N}^*$

13. 1 600 m

14. **a)** (−9, 2, 13, 24, 35, 46, 57, ...)
b) 420

15. (−20, −8, 4, 16, 28, 40, ...)

16. −8

17. **a)** 6
b) 10
c) 4 ou $-\frac{1}{2}$.

18. **a)** 2 175 **b)** 8 025 **c)** 11 625

19. **a)** $a_n = -3 + 7n$, $n \in \mathbb{N}^*$
b) 347

20. **a)** $a_n = 7n + 124$; $n \in \mathbb{N}^*$
b) 63 termos.

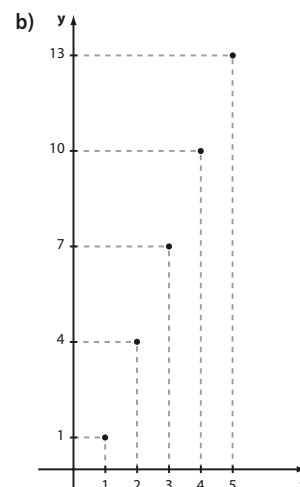
21. 198

22. 273

23. (20, 24, 28) ou (28, 24, 20).

24. 15°, 60° e 105°.

25. 20

26. **a)** {1, 4, 7, 10, 13, ...}
b)

27. A razão da P.A. é $-2 \cdot \log 2 = \log \frac{1}{4}$

28. **a)** 156 cm
b) 3 721 cm^2
c) $19\sqrt{2}$ cm

29. **a)** 47
b) 395 m
c) Voltar à última mesa.

30. Não.

31. **a)** Vigésima. **b)** Não; sim.

32. -255

33. 50,5

34. **a)** Plano alfa. **b)** R$ 325,00

35. (2, 7, 12, 17, 22, 27, ...)

36. **a)** 15 **b)** -6 **c)** -39

37. 26 fileiras.

38. 12,8 m

39. **a)** 2ª linha e 1ª coluna; 88º quadrado.
b) 898
c) 4 497
d) 1 125 250
e) 1 620 900

40. **a)** $f(x) = -2x + 5$
b) (3, 1, −1, −3, ...); $a_n = -2n + 5$, para $n \in \mathbb{N}^*$.

41. *a*, *b*, *d* e *e*.

42. **a)** 2 **c)** -3 **e)** $\frac{1}{2}$
b) 100 **d)** -1 **f)** $\frac{1}{10}$

43. 16 384

44. $-\frac{15}{2}$

45. -320

46. 54

47. **a)** $4^{17} = 2^{34}$ **b)** 2^{43}

48. **a)** P.G. de razão 1,2.
b) R$ 656,00

49. **a)** $x = -6$ ou $x = 6$.
b) $x = 10$
c) $x = 1$ ou $x = 5$.
d) $x = 16$ ou $x = \frac{1}{16}$.

50. As idades são 90, 60 e 40 anos.

51. **a)** 6,5 **b)** $\frac{1}{3}$

52. **a)** R$ 64,00 **b)** R$ 729,00

53. **a)** 21 **b)** 10

54. Sim; 16 u.c.

55. 125

56. (3, 6, 12)

57. $x = 4$ e $y = \pm 4$.

58. **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** Sim; 7º termo.

59. **f**: (7, 10, 13, 16, ...) P.A.; r = 3.
g: (2^7, 2^{10}, 2^{13}, 2^{16}, ...) P.G.; q = 8.

60. q = 3

61. a = b = c

62. 42

63. 637,5

64. 1 312 500 livros.

65. R$ 7 500,00

66. **a)** 6,5 **b)** 10

67. **a)** 2,4 m **b)** $\frac{25}{16}$ m = 1,5625 m **c)** 37 m

68. 1 275 pessoas.

69. **a)** 40 **d)** $-\frac{125}{4}$
b) 100 **e)** $\frac{27}{4}$
c) $\frac{1}{900}$

70. $\frac{9}{16}$

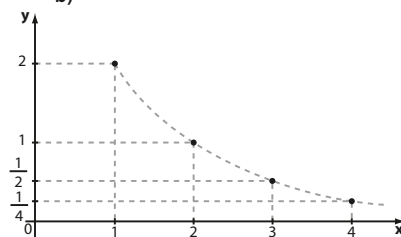
71. **a)** $\frac{4}{9}$ **c)** $\frac{3}{11}$
b) $\frac{16}{9}$ **d)** $\frac{71}{30}$

72. **a)** $\frac{400}{9}$ cm = $44,\overline{4}$ cm
b) $\frac{10\,000}{99}$ cm^2 = $101,\overline{01}$ cm^2

73. **a)** $S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$
b) $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$
c) $S = \{1\}$
d) $S = \{-3\}$

74. **a)** 72 cm
b) $48\sqrt{3}$ cm^2

75. 6 m

76. **a)** $\left\{2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right\}$
b)

77. **a)** k = −1
b) $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, ...\right)$
$a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{n-1}$; $n \in \mathbb{N}^*$
q = 3

Desafio

179 700

CAPÍTULO 10 Semelhança e triângulos retângulos

Exercícios

1. **a)** F **c)** F **e)** F
b) V **d)** V **f)** F

2. 9 cm e 15 cm.

3. Sim, pois eles têm dois ângulos congruentes.

4. A'B' = 2,4 cm; B'C' = 6,6 cm; C'D' = 4,4 cm; D'A' = 3,6 cm.

5. Não, pois, se os ângulos da base medem 40°, o outro ângulo mede 100° (40° + 40° + 100° = 180°). Mas também pode ocorrer que os ângulos da base meçam 70° e o outro 40° (70° + 70° + 40° = 180°). Se isso ocorrer, os triângulos não são semelhantes.

6. 24 cm; 6 cm; 18 cm.

7. x = 2,5 m; y ≃ 3,33 m; z = 3m; w = 2,52 m; t = 2,5 m.

8. AB = 40 m; BC = 80 m; CD = 100 m e AD = 54 m.

9. **a)** $x = \frac{10}{3}$ **c)** $x = \frac{10}{3}$ e $y = \frac{18}{5}$.
b) x = 6

10. Lote I: 80 m
Lote II: 60 m
Lote III: 40 m

11. 1 e 8 (LAL); 2 e 5 (LLL ou AA); 3 e 6 (LLL); 4 e 7 (AA).

12. **a)** x = 2; y = 3.
b) x = 8; y = 10.

13. **a)** 3,75 m
b) Aproximadamente 1,34 m.

14. $\frac{32}{3}$ cm

15. **a)** 67,5 m
b) Aproximadamente 6,22 m.

16. **a)** 12 cm **b)** 40 m

17. **a)** 6 **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** 21

18. $\frac{2}{3}$

19. 2,4 cm

20. 28 m

21. **a)** Demonstração.
b) $\sqrt{6}$ cm

22. **a)** 9,5 cm **b)** Demonstração.

23. **a)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{16}$
b) $\frac{1}{4}$ **d)** 96 cm^2

24. **a)** 6 cm
b) 7,5 cm^2 e 30 cm^2, respectivamente.

25. 16

26. 12 cm

27. $x = \frac{8}{3}$; $y = \frac{20}{3}$.

28. **a)** $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e $y = \frac{5}{2}$.
b) $x = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.
c) $x = 2$ e $y = 2\sqrt{5}$.

29. 2,4 m e 1,2 m.

30. 50,16 m

31. **a)** 8 cm **c)** $2\sqrt{2}$ cm
b) $3\sqrt{3}$ cm **d)** $3\sqrt{3}$ cm

32. Cateto: $2\sqrt{6}$ cm e $2\sqrt{10}$ cm; altura: $\sqrt{15}$ cm.

33. 44,6 m

34. 3 m

35. 24 m

36. 2,5 km

37. Comprimento: 1,8 m e altura: 2,4 m.

38. $9\sqrt{2}$ cm

39. 36 m

40. **a)** 10 **b)** $8\sqrt{2}$ **c)** 17 **d)** 2

41. 2,1 m

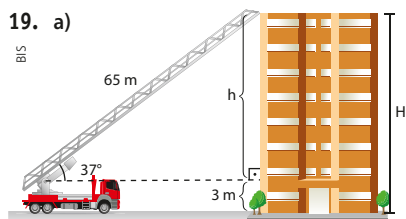
42. **a)** Aproximadamente 1 280 m.
b) Aproximadamente 707 m.

Desafio

a) 16 cm
b) 5,6 cm

CAPÍTULO 11 Trigonometria no triângulo retângulo

Exercícios

1. **a)** $\text{sen } \hat{A} = \frac{15}{17}$, $\cos \hat{A} = \frac{8}{17}$, $\text{tg } \hat{A} = \frac{15}{8}$.
   b) $\text{sen } \hat{C} = \frac{8}{17}$, $\cos \hat{C} = \frac{15}{17}$, $\text{tg } \hat{C} = \frac{8}{15}$.
2. **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** 9 m
3. **a)** $\text{sen } \hat{C} = \frac{2}{7}$ **c)** $\text{sen } \hat{A} = \frac{5\sqrt{41}}{41}$
   b) $\text{sen } \hat{B} = \frac{11}{61}$
4. **a)** $\cos \hat{B} = \frac{4}{5}$ e $\cos \hat{C} = \frac{3}{5}$.
   b) $\cos \hat{B} = \frac{\sqrt{95}}{12}$ e $\cos \hat{C} = \frac{7}{12}$.
5. **a)** 240 m **b)** 41°
6. Aproximadamente 100 m.
7. 38,4 m
8. **a)** Aproximadamente 5,57 m.
   b) $\text{tg } \alpha = 0,37$; não é acessível.
9. **a)** Aproximadamente 42°.
   b) Aproximadamente 4,48 m.
10. **a)** Trilha 2. **b)** 377 m
11. 30°
12. **a)** $x \simeq 3,36$ **c)** $x = 45°$
    b) $x \simeq 5,196$ **d)** $x \simeq 9,89$
13. Aproximadamente 8,77 km.
14. Aproximadamente 1 159 m.
15. Aproximadamente 100 m.
16. Como a hipotenusa corresponde ao lado de maior medida, a razão entre os catetos e a hipotenusa sempre será um número entre 0 e 1. A razão entre os catetos pode resultar em qualquer número real positivo.
17. **a)** 30 cm **b)** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
18. **a)** Aproximadamente 59°.
    b) Aproximadamente 40°.
    c) 45°
19. **a)**

b) 15 andares.

20. **a)** 8 **c)** $3\sqrt{2}$ **e)** 4,5
    b) $6\sqrt{2}$ **d)** $\frac{11}{4}$ **f)** 4
21. $3\sqrt{3}$ m; 3 m.
22. $4\sqrt{3}$ m
23. $5(\sqrt{3} + 3)$ cm
24. $(8\sqrt{3} + 30)$ cm
25. **a)** 12 **b)** 30° **c)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$
26. **a)** 20
    b) $20\sqrt{3}$ m (aproximadamente 35 m)
27. 3,4 km
28. **a)** Não; no projeto I a razão entre o desnível e o comprimento horizontal da rampa é 0,3; no projeto II é $\frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0,577$.
    b) Projeto I: 20 m; projeto II: $6\sqrt{3}$ m.
    c) Projeto I: $\simeq 20,88$ m; projeto II: 12 m.
    d) 17°
29. 4,5 m

Desafio

1968,75 metros.

CAPÍTULO 12 Áreas de figuras planas

Exercícios

1. **a)** 78 cm² **d)** 36 m²
   b) 75 cm² **e)** $48\sqrt{3}$ dm²
   c) 192 dm² **f)** 25 mm²
2. 3 600 m²
3. 125 u.a.
4. 48 m²
5. 10 800
6. 40 m²
7. 18 dm e 8 dm.
8. 18,93 m²
9. **a)** I, II e III. **b)** Lucas; 2 800 m².
10. R$ 20 640,00
11. 43 200 pessoas.
12. **a)** 480 ladrilhos. **b)** 900 cm²
13. Sim.
14. 4 m²
15. **a)** 90 cm² **c)** $30\sqrt{3}$ cm²
    b) 40 cm²
16. $48\sqrt{3}$ m²
17. 72 m²
18. **a)** $16\sqrt{3}$ m² **d)** $72\sqrt{3}$ m²
    b) $32\sqrt{2}$ m² **e)** $20\sqrt{2}$ m²
    c) $12\sqrt{2}$ m²
19. **a)** 48 cm² **e)** 8,64 cm²
    b) $16\sqrt{6}$ m² **f)** $36\sqrt{5}$ dm²
    c) $9\sqrt{3}$ dm² **g)** 63 m²
    d) $9\sqrt{15}$ m²
20. 144 cm²
21. 18 cm²
22. 1,44 m²
23. 96 cm²
24. 32 cm²
25. 13,5 m por 16 m.
26. 56,25%
27. R$ 153,60
28. **a)** 96 dm² **c)** $64\sqrt{2}$ dm²
    b) $6\sqrt{2}$ dm²
29. **a)** $24\sqrt{7}$ cm² **c)** $\frac{225\sqrt{3}}{2}$ cm²
    b) 96 dm² **d)** 150 m²
30. 12 150 km²
31. **a)** 204 m² **d)** 348 m²
    b) 75 m² **e)** 60 m²
    c) 35 m² **f)** $(9 + \sqrt{3})6$ m²
32. R$ 75 600,00
33. 288 m²
34. 4,5 dm e 7,5 dm.
35. $2p = 12(2 + \sqrt{3})$ m; $A = 12(6 + \sqrt{3})$ m²
36. **a)** $96\sqrt{3}$ cm² **c)** 15 cm²
    b) $162\sqrt{3}$ cm² **d)** 756 cm²
37. $0,96\sqrt{3}$ m²
38. $\frac{80}{3}$ cm²
39. **a)** $18\sqrt{3}$ cm² **b)** $10\sqrt{3}$ cm
40. **a)** 121π dm² **c)** 256π cm²
    b) 144π m²
41. 36π dm²
42. 100π cm²
43. **a)** 25π m² **c)** 36π m²
    b) 52π m² **d)** 81π m²
44. 0,7824 m²
45. **a)** 4π dm² **c)** $\frac{125\pi}{4}$ dm²
    b) $4(\pi - 2)$ dm²
46. 30 184 pessoas.
47. 49π cm²; 81π cm²; 225π cm².
48. **a)** $\frac{4\pi}{3}$ m² **d)** 9π cm²
    b) 27π dm² **e)** $\frac{125\pi}{3}$ cm²
    c) 18π m² **f)** $\frac{10\pi}{3}$ km²
49. **a)** 3π m² **d)** $\frac{25}{2}(\pi - 2)$ m²
    b) 20π m² **e)** 25π m²
    c) $9(\pi - 2)$ m² **f)** 48π m²
50. R$ 1 320,00
51. **a)** $2(\pi - 2\sqrt{2})$ cm²
    b) $\frac{16}{3}(\pi - 3)$ dm²
    c) $(\pi - 2)$ m²
    d) $12(4\pi - 3\sqrt{3})$ cm²

Desafio

24 cm²

CAPÍTULO 13 Estatística básica

Exercícios

1. São qualitativas: II, IV e VI.
   São quantitativas: I, III e V.
2. **a)** Todos os alunos regularmente matriculados nesse curso pré-vestibular.
   b) População: 2 475 alunos.
   Amostra: 50 alunos.
   c) Perguntas: 1, 2, 5, 7.
   d) Pergunta 1: exatas, humanas, biológicas.
   Pergunta 5: Física, Química, Matemática, História, Filosofia etc.
   Pergunta 6: 0, 1, 2, 3, ...
3. **a)** Todos os domicílios situados em áreas rurais dos estados de RJ e ES.
   b) Possíveis perguntas: "Você costuma deixar água parada em algum lugar da casa?" ou "Já houve algum caso de dengue na região onde mora?" ou "Você sabe como é transmitida a dengue?".
4. **a)** Intenção de voto para prefeito: variável qualitativa. Realizações: candidato **A**, candidato **B**, indeciso, branco ou nulo.

b) População: 1 764 835

Amostra: 2 650

c)

Intenção de voto	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
candidato A	1 715	0,647 ou 64,7%
candidato B	691	0,261 ou 26,1%
Indecisos	141	0,053 ou 5,3%
Brancos ou nulos	103	0,039 ou 3,9%
Total	**2 650**	**1,00 ou 100%**

5.

Avaliação das instalações	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
Aprova com ressalva	9	$\frac{9}{25}$ = 0,36 ou 36%
Aprova	12	$\frac{12}{25}$ = 0,48 ou 48%
Reprova	4	$\frac{4}{25}$ = 0,16 ou 16%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

6.

Frequência semanal/vezes na semana	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
1	2	$\frac{2}{25}$ = 0,08 ou 8%
2	6	$\frac{6}{25}$ = 0,24 ou 24%
3	8	$\frac{8}{25}$ = 0,32 ou 32%
4	5	$\frac{5}{25}$ = 0,20 ou 20%
5	3	$\frac{3}{25}$ = 0,12 ou 12%
6	1	$\frac{1}{25}$ = 0,04 ou 4%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

7. **a)** 10

b) $\frac{15}{25} = 0,60$

8.

Idade	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
18 ⊢ 25	5	0,20 ou 20%
25 ⊢ 32	8	0,32 ou 32%
32 ⊢ 39	7	0,28 ou 28%
39 ⊢ 46	3	0,12 ou 12%
46 ⊢ 53	2	0,08 ou 8%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

9. Sim; 84% dos entrevistados avaliam os professores como bons ou ótimos.

10. a = 24; b = 6%; c = 0,23; d = 23%; e = 36; f = 0,09; g = 0,45; h = 45%; i = 68; j = 0,17; k = 17%.

11. **a)** 18

b) 5%

c) 75%

12.

Renda mensal (em reais)	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
846 ⊢ 1649	10	$\frac{10}{25}$ = 0,40 ou 40%
1649 ⊢ 2452	7	$\frac{7}{25}$ = 0,28 ou 28%
2452 ⊢ 3255	4	$\frac{4}{25}$ = 0,16 ou 16%
3255 ⊢ 4058	2	$\frac{2}{25}$ = 0,08 ou 8%
4058 ⊢ 4861	2	$\frac{2}{25}$ = 0,08 ou 8%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

13. **a)**

Nota	Fa	Fr
1,0 ⊢ 2,5	5	$0,1\overline{6}$ ou $16,\overline{6}\%$
2,5 ⊢ 4,0	5	$0,1\overline{6}$ ou $16,\overline{6}\%$
4,0 ⊢ 5,5	8	$0,2\overline{6}$ ou $26,\overline{6}\%$
5,5 ⊢ 7,0	6	0,20 ou 20%
7,0 ⊢ 8,5	3	0,10 ou 10%
8,5 ⊢ 10,0	3	0,10 ou 10%
Total	**30**	**1,00 ou 100%**

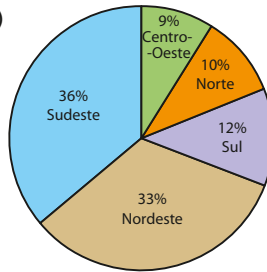
b) 20%

14. **a)** F

b) F

c) V

d) F

15. **a)**

b) Sudeste: 130°; Norte: 36°.

16. **a)** Setembro 2014, outubro 2014, novembro 2014, janeiro 2015 e fevereiro 2015.

b) 14,666 bilhões de dólares.

c) Junho de 2014.

d) 0,33 bilhão de dólares.

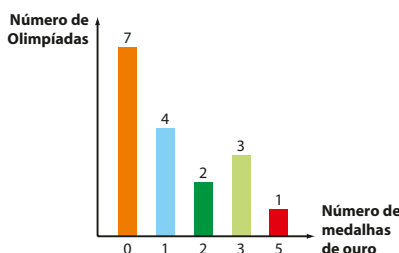
e) x − 2,84

17. **a)** 36°

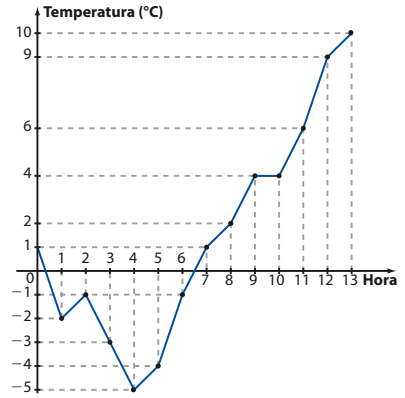
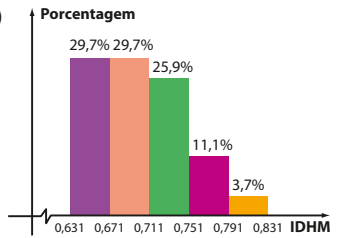
b) 36 alunos; 72°.

18. **a)**

Número de medalhas de ouro	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
0	7	≃ 0,412 ou 41,2%
1	4	≃ 0,235 ou 23,5%
2	2	≃ 0,118 ou 11,8%
3	3	≃ 0,176 ou 17,6%
5	1	≃ 0,059 ou 5,9%
Total	**17**	**1,000 ou 100%**

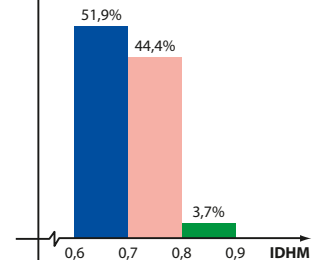
b)

19. **a)** 195 **b)** 3 120 gols **c)** 520 gols

20. **a)** 10 − (−5) °C = 15 °C

b) Gráfico de linhas, pois é necessário representar a variação da temperatura no decorrer do tempo.

21. **a)**

b) 14,8%

22. **a)**

IDHM	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
0,6 ⊢ 0,7	14	≃ 0,51852 ou 51,9%
0,7 ⊢ 0,8	12	≃ 0,44444 ou 44,4%
0,8 ⊢ 0,9	1	≃ 0,03703 ou 3,7%
Total	**27**	**1,00 ou 100%**

b)

c) Aproximadamente 48,1%.

23. **a)** 700 funcionários. **b)** 800 funcionários.

24. **a)** 2013: 2 500 km²; 2015: 625 km².

b) 60%

c) 95,83%

d) Aproximadamente 17 857.

25. **a)** F

b) V

c) F

d) V

e) F

Desafio

a) V

b) F

c) F

d) V

e) F

f) V

ÍNDICE REMISSIVO

SUGESTÕES PARA OS ESTUDANTES

- ***Aprendendo Matemática com o GeoGebra***
  Luís Cláudio Lopes de Araújo e Jorge Cássio Costa Nóbriga. 1. ed. São Paulo: Exato, 2010.
  Segundo os próprios autores, a ideia foi escrever um livro autoinstrutivo voltado para o estudante, um material no qual ele possa desenvolver, de maneira independente, as construções com o *software* educativo GeoGebra. No livro são abordadas construções em Geometria Plana (ângulos, triângulos, quadriláteros, Tales, pontos notáveis do triângulo), funções afim e quadrática e trigonometria.
- ***Equação do 2º grau***
  (Coleção Pra que serve Matemática?) Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17. ed. São Paulo: Atual, 2004.
  O livro apresenta métodos de resolução de uma equação do 2º grau, como o completamento de quadrados e o método geométrico de Al Khowarizmi. Há também interessantes problemas que podem ser resolvidos com o auxílio de equação do 2º grau.
- ***O diabo dos números***
  Hans Magnus Enzensberger, 1. ed. São Paulo: Seguinte, 1997.
  O livro conta a história de um herói (o menino Robert) e de um diabo, que, na verdade, é o medo que os números e a matemática provocam em algumas pessoas. Em um dos capítulos, o autor aborda a sequência de Fibonacci.
- ***O homem que calculava***
  Malba Tahan, 55. ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.
  Trata-se de um clássico da literatura infantojuvenil. Ela mostra as proezas matemáticas de um singular calculista persa nas resoluções de problemas curiosos e desafiadores, envolvendo conceitos gerais de Aritmética, Geometria e Álgebra.
- ***Os números:* história de uma grande invenção**
  Georges Ifrah, traduzido por Stella M. de Freitas Senra. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005.
  A obra fez um resgate histórico das representações dos números desde a pré-história, passando por várias civilizações (grega, egípcia, chinesa etc.) e mostrando que o homem sempre procurou utilizar a Matemática a serviço de seu desenvolvimento.
- ***Pitágoras e seu teorema em 90 minutos***
  (Coleção Cientista em 90 minutos)
  Paul Strathern. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.
  Com textos informativos, o livro traz citações, curiosidades, cronologias e prefácio que complementam a vida e a obra de Pitágoras.
- ***Razão áurea:* a história de Fi, um número surpreendente**
  Mario Livio, 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.
  O autor, astrofísico e matemático, esclarece as origens das ocorrências da razão áurea na natureza e seus usos na arquitetura, pintura e música. Pode servir de aprofundamento ao texto histórico do capítulo 2 deste volume.
- **Semelhança não é mera coincidência**
  (Coleção Vivendo a Matemática)
  Nilson José Machado. 7. ed. São Paulo: Scipione, 2006.
  O livro aborda o conceito geral de semelhança, apoiando-se em contextos cotidianos, não se limitando à semelhança de triângulos. Há também uma discussão sobre a razão entre as áreas e os volumes de figuras semelhantes.

Os vídeos seguintes pertencem à série: *Matemática na Escola* e estão disponíveis em <www.m3.ime.unicamp.br>. Acesso em: 22 abr. 2016.

- ***A razão dos irracionais***
  Assunto: Números irracionais
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 2 – Conjuntos numéricos
- ***A parte do leão***
  Assunto: Função afim por partes
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 6 – Função definida por várias sentenças.
- ***Afogando os zeros***
  Assunto: Notação científica e potências de dez
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 7 – Função exponencial
- ***Direitos do consumidor***
  Assunto: Função afim
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 4 – Função afim
- ***Esse tal de Bhaskara***
  Assunto: Equação do 2º grau
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 5 – Função quadrática
- ***Lembranças de Sofia***
  Assunto: Amostragem e planejamento estatístico
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 13 – Estatística básica
- ***O problema da cerca***
  Assunto: Função quadrática, máximos e mínimos
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 5 – Função quadrática
- ***Os suspeitos***
  Assunto: Logaritmos, exponencial e decaimento
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 8 – Função logarítmica
- ***Para correr a São Silvestre***
  Assunto: Progressão aritmética
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 9 – Progressões
- ***Roda de samba***
  Assunto: Função quadrática, lucro máximo
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 5 – Função quadrática
- ***Salvador, o hipocondríaco***
  Assunto: Função exponencial
  Quando assistir: ao estudar o capítulo 7 – Função exponencial

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* Tradução Elza F Gomide. 3. ed. São Paulo. Edgard Blucher, 2010.

BUSSAB, Wilton O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística Básica*. 8. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

CRESPO, Antonio A. *Estatística fácil*. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. *Fundamentos de Matemática Elementar 9*: Geometria Plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. e WALKER, J. *Fundamentos de Física 1*: Mecânica. 9. ed. São Paulo: LTC, 2012.

LIMA, Elon Lages. *Áreas e volumes*. Rio de Janeiro: SBM, 1979. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar)

_______. *Medida e forma em Geometria*: comprimento, área, volume e semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção Fundamentos da Matemática Elementar)

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton O. *Introdução ao Cálculo para administração, economia e contabilidade*. São Paulo: Saraiva, 2009.

WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. de O.; CARMO, Manfredo P. *Trigonometria e números complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção do Professor de Matemática)

Orientações Didáticas

APRESENTAÇÃO

O livro de Matemática é um importante material de apoio às atividades do estudante, tanto em sala de aula quanto em casa, servindo como fonte de informações teóricas, roteiro de exercícios e problemas, estimulador de reflexões e pesquisas, entre outros objetivos. Entretanto, o livro não substitui o professor, o principal mediador das atividades que conduzem à aprendizagem.

Nesse sentido, nossa intenção foi propor algo que realmente auxilie e complemente o trabalho do professor. Assim, para esclarecer os principais pontos do nosso livro, elaboramos as Orientações Didáticas que acompanham cada volume desta coleção.

As Orientações Didáticas são compostas de duas partes.

A primeira parte é geral, isto é, comum aos três volumes, e subdividida em tópicos. Em um primeiro momento, apresentamos os eixos de trabalho, os objetivos que buscamos atingir e a estrutura detalhada do livro.

Sugerimos a leitura de parte de dois documentos; um deles trata da escolha dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula e o outro, das três grandes competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

- representação e comunicação;
- investigação e compreensão;
- contextualização sociocultural.

A seguir, abordamos a avaliação, o que avaliamos e os instrumentos de avaliação. Para auxiliar o professor, procuramos mostrar exemplos de várias situações apresentadas no texto, além de propor um momento de estudo, com a leitura de fragmentos de dois textos sobre avaliação, de autores de referência no assunto.

O último tópico da parte geral das Orientações Didáticas traz uma ampla e atualizada lista com sugestões de leitura e consulta para o professor.

A segunda parte das Orientações Didáticas é específica para cada volume.

Em um primeiro momento, descrevemos os conteúdos e conceitos que serão apresentados, listando seus objetivos específicos.

Há também sugestões de abordagem para os conteúdos, com algumas possibilidades de avaliação. Procuramos destacar os assuntos mais importantes em cada volume.

Em seguida, para a seção *Troque ideias* é apresentado um comentário geral, com encaminhamentos, objetivos, competências relacionadas e sugestões para o professor mediar a atividade. Há também a solução de todos os exercícios propostos.

Por fim, há sugestões de atividades em grupo, devidamente detalhadas em seus objetivos, desenvolvimento, material e resolução comentada. Muitas dessas atividades podem servir como fontes de avaliação.

Como todos os livros desta coleção apresentam variadas listas de exercícios, problemas e desafios, inevitavelmente, os estudantes consultarão o professor. Assim, na última parte, encontra-se a resolução de todas as questões e atividades propostas.

Esperamos que estas Orientações Didáticas permitam uma melhor compreensão da nossa obra e possam otimizar o trabalho cotidiano do professor.

Os autores

SUMÁRIO

COMENTÁRIOS GERAIS

Conheça esta coleção

Ao elaborarmos esta coleção para o Ensino Médio, procuramos proporcionar ao estudante conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, visando à preparação para o trabalho, ao desenvolvimento de habilidades e competências, ao exercício da cidadania e à continuação de seus estudos em outros cursos.

Tivemos também o objetivo de contribuir com o trabalho do professor, pautando-nos em nossa prática pedagógica. Vale salientar que acreditamos na autonomia do educador, cuja prática docente não deve ser limitada pelo livro didático, o qual tem o papel de indicar caminhos, respeitando a proposta pedagógica da escola e do professor. No entanto, para que o livro didático seja um auxiliar confiável, é necessário que os conceitos sejam apresentados com precisão, a linguagem e o rigor sejam compatíveis com essa etapa da escolaridade, as propriedades sejam justificadas e aplicadas a exercícios e situações-problema, os conteúdos estejam integrados e os conhecimentos matemáticos possam ser aplicados em situações cotidianas ou usados em outras áreas do saber, construindo, dessa maneira, aprendizagens significativas.

Principais eixos

O programa desenvolvido nos três volumes pode ser pensado em grandes tópicos, a saber:

- Números;
- Funções;
- Geometria;
- Estatística, contagem e probabilidade;
- Álgebra.

Os conteúdos e os conceitos construídos em cada volume têm sua escolha com base nos seguintes critérios:

- favorecer a autonomia intelectual dos estudantes, solidificando e aprofundando conhecimentos já adquiridos;
- possibilitar a integração entre diversos tópicos do programa de Matemática;
- possibilitar a aplicação dos conhecimentos matemáticos a outras áreas do conhecimento;
- favorecer a aquisição de habilidades e competências;
- atender às sugestões da Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação (SEB/MEC) por meio dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM (2002), PCN+ (2002), e também pelo documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Conhecimentos de Matemática* (2006);
- atender às sugestões preconizadas na matriz curricular do Enem;
- levar em conta a prática pedagógica dos professores-autores desta proposta;
- respeitar as diferentes propostas pedagógicas presentes nas escolas brasileiras.

Antes de iniciarmos a explanação sobre os eixos de trabalho, vale destacar que logo no início do volume 1 há um capítulo sobre noções de conjuntos, em que são abordados, de maneira simplificada, os conceitos básicos, a linguagem simbólica e as operações com conjuntos. A apresentação desse tópico tem por objetivo familiarizar os estudantes com a linguagem matemática, auxiliando-os na construção dos conceitos que serão apresentados ao longo da coleção.

Números

Embora esse eixo seja trabalhado de maneira geral nos três volumes da coleção, dá-se maior ênfase a ele nos volumes 1 e 3. No primeiro deles, é feita uma revisão de conceitos já apresentados no Ensino Fundamental relacionados aos números naturais, números inteiros e números racionais nas formas decimal e fracionária. A seguir, são abordados os números irracionais e os números reais — campo fértil para a exploração dos intervalos reais. No volume 3 são apresentados os números complexos nas formas algébrica e polar e suas operações na forma algébrica.

Funções

Esse eixo é desenvolvido nos três volumes, com ênfase maior nos volumes 1 e 2. No volume 1 são estudados o conceito geral de função, a leitura e a construção de gráficos, a função afim, a função quadrática, a função definida por várias sentenças, incluindo-se aí a função modular, a função exponencial, a função logarítmica e as sequências. As progressões aritmética e geométrica são apresentadas como funções com domínio no conjunto dos naturais. No volume 2 abordam-se as funções trigonométricas, enfatizando-se o conceito de período de uma função e revisando-se outros conceitos como paridade, conjunto imagem etc. Todo esse estudo é precedido pela apresentação da circunferência trigonométrica. Nos textos de aplicações da Geometria Métrica Espacial revisamos a função afim, o conceito de proporcionalidade e a função quadrática. No volume 3 são introduzidas as funções polinomiais de grau maior ou igual a 2, ainda que, em seu estudo, sejam abordados vários aspectos algébricos.

Nos três volumes, há representações gráficas das funções construídas com o auxílio de *softwares* livres de Matemática como o GeoGebra e o Graphmática.

Com o estudo da Matemática Financeira, nesse último volume, são retomados conceitos ligados a função afim e progressões aritméticas; a função exponencial e progressões geométricas; à função logarítmica, com o uso de logaritmos e suas propriedades na resolução de equações exponenciais provenientes dos problemas de juros compostos.

Geometria

Esse eixo é trabalhado nos três volumes. No volume 1 é feita uma revisão de segmentos proporcionais e do teorema de Tales; de semelhança (em particular a semelhança de triângulos) e de relações nos triângulos retângulos, incluindo-se, naturalmente, o teorema de Pitágoras. A seguir são introduzidas as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Ainda nesse volume é feito um estudo completo sobre áreas de superfícies planas, consolidando-se conceitos construídos no Ensino

Fundamental. Alguns elementos da Geometria Analítica são abordados, especialmente no estudo da função afim e quadrática (plano cartesiano, determinação da equação de uma reta, interseção de retas, parábola etc.). No volume 2, a resolução de triângulos é estendida aos triângulos acutângulo e obtusângulo com o estudo da lei dos senos e da lei dos cossenos e cálculo da área de um triângulo. Em seguida, é realizado um estudo predominantemente intuitivo da Geometria Espacial de Posição, finalizando com a Geometria Métrica dos Sólidos, abordando de forma abrangente áreas e volumes dos principais poliedros e corpos redondos. No volume 3 é feito o estudo completo da Geometria Analítica: ponto, reta, circunferência e cônicas.

Estatística, contagem e probabilidade

Esse eixo é trabalhado nos três volumes.

No volume 1 iniciamos o estudo da Estatística, enfatizando sua importância social e as etapas de planejamento de uma pesquisa. Em seguida, destacamos a construção e interpretação de tabelas de frequência e representações gráficas.

No volume 2, em Análise Combinatória, destacam-se o princípio multiplicativo (ou princípio fundamental da contagem) e outros métodos de contagem com base nele. Em seguida, é feito o estudo completo de probabilidades.

No volume 3 complementamos o estudo da Estatística: revisamos tabelas de frequência e gráficos, e fazemos um estudo abrangente das medidas de centralidade (ou posição) e dispersão (ou variabilidade) para resumir e caracterizar um conjunto de dados.

Álgebra

Esse eixo é tratado nos três volumes. No volume 1, a Álgebra está disseminada no estudo de funções, uma vez que equações e inequações são partes integrantes do texto. No volume 2, é feito o estudo das matrizes e sistemas lineares, incluindo-se uma rápida "passagem" pelos determinantes. No volume 3, a Álgebra se faz presente no estudo dos polinômios e equações algébricas.

Objetivos gerais da coleção

- Consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental.
- Contribuir para a integração do estudante na sociedade em que vive, proporcionando-lhe conhecimentos significativos de teoria e prática da Matemática, indispensáveis ao exercício da cidadania.
- Proporcionar o desenvolvimento de competências e habilidades que lhe possibilitem competir no mercado de trabalho.
- Possibilitar ao estudante o reconhecimento das inter-relações entre os vários campos da Matemática, e desta com as outras áreas do conhecimento.
- Proporcionar ao estudante conhecimentos básicos que lhe permitam continuar seus estudos em cursos de tecnologia ou universitários, além de adquirir uma formação científica geral.

Nesta coleção

Ao elaborarmos esta coleção para o Ensino Médio – etapa final da educação básica –, procuramos atender às necessidades dos estudantes de hoje, com base em nossa experiência em sala de aula e nas orientações dos documentos oficiais do MEC, acompanhando as significativas mudanças desse ciclo nas escolas brasileiras, em particular no que diz respeito à Matemática.

Há importantes avanços da Educação Matemática nos processos de ensino e aprendizagem nesta área do conhecimento, objetivando que o "fazer Matemática com compreensão" seja estendido a todos os estudantes, de modo que eles reconheçam a Matemática como uma ciência de grande relevância social, que se organiza segundo características próprias e desenvolve importantes habilidades, favorecendo a autonomia intelectual.

A consecução dos objetivos da coleção listados anteriormente pressupõe um trabalho pedagógico planejado, articulado e organizado por parte do corpo discente do colégio. Acreditamos que nossa proposta nesta coleção possa viabilizar, orientar e facilitar esse desafiador trabalho do professor.

Dois grandes pilares norteiam e caracterizam a coleção:

- o caráter prático e utilitário da Matemática, presente nas necessidades cotidianas do cidadão e nas variadas atividades humanas, exibido na coleção em contextualizações relacionadas às práticas sociais, a outras áreas do conhecimento ou à própria História da Matemática;
- o desenvolvimento de habilidades e competências cognitivas específicas da Matemática, possibilitando ao estudante reconhecer e compreender as características particulares dessa ciência, que utiliza métodos próprios para a construção dos conhecimentos e validação das propriedades.

Com relação às escolhas metodológicas da coleção, destacamos que, de maneira geral, os conteúdos e conceitos são introduzidos por meio de um exemplo ou de uma situação-problema ou, ainda, de uma situação "motivadora", que é retomada no desenvolvimento do capítulo. Na sequência, ocorre a formalização e a sistematização teórica, em que optamos por manter, como características da coleção, a linguagem e o rigor matemático necessário (adequados à faixa etária), a clareza e a precisão nas definições e na construção dos conceitos, bem como as justificativas lógicas nas demonstrações. Atividades diversas como exemplos, exercícios resolvidos e problemas variados complementam tal organização.

Nessa estrutura de apresentação e desenvolvimento teórico, encontram-se, intencionalmente intercaladas às definições, exemplos, propriedades e exercícios, os boxes *Pense nisto* e a seção *Troque ideias*, que têm por objetivos convidar o estudante a participar mais ativamente das discussões que podem ser levantadas a partir do desenvolvimento teórico e colocá-lo em um papel mais ativo no processo de construção dos conhecimentos de Matemática.

A seguir, apresentamos alguns textos e detalhamentos sobre como entendemos alguns temas trabalhados nesta coleção.

Resolução de problemas

Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de um problema qualquer. O problema pode ser modesto, mas se ele

desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas, se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas.* (Prefácio.) Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

Na introdução de vários capítulos desta coleção são apresentadas situações-problema que têm por objetivo motivar o estudante para a construção dos conceitos que serão trabalhados e que poderão auxiliá-lo na busca de caminhos para resolver os problemas propostos. Frequentemente, esses problemas são retomados ao longo do capítulo, sendo apresentada uma solução.

A resolução de problemas aparece em muitas das séries de exercícios, incluindo os *Desafios* (dos quais falaremos adiante).

A seguir, apresentamos como exemplo para o leitor a resolução de um problema seguindo as quatro etapas de resolução sugeridas por Polya.

Problema: Uma escada de 25 dm de comprimento encontra-se apoiada em um muro, do qual seu pé dista 7 dm. Se o pé da escada se afastar mais 8 dm do muro, qual será o deslocamento vertical verificado pela extremidade superior da escada? Admita que o muro seja perpendicular ao solo.

1ª etapa: Compreender o problema.

É preciso identificar a incógnita, os dados e a condicionante, traçando, quando for pertinente, uma figura usando notação adequada.

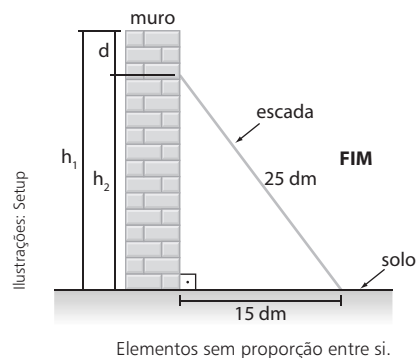
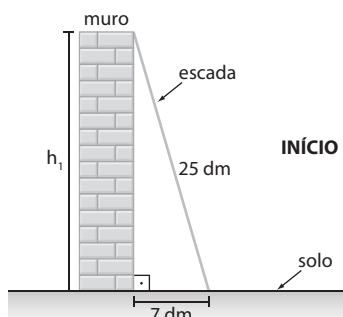
Qual é a incógnita?

O deslocamento vertical registrado pelo extremo superior da escada, isto é, a diferença entre os pontos mais altos atingidos pela escada; indicaremos pela letra **d**.

Quais são os dados?

- Comprimento da escada: 25 dm.
- Distância inicial do muro ao pé de apoio da escada: 7 dm.
- Distância final do muro ao pé de apoio da escada: 15 dm (7 dm + 8 dm = 15 dm).

Traçado da figura

Elementos sem proporção entre si.

2ª etapa: Estabelecer um plano.

Segundo Polya: *Consideramos que temos um plano quando, ao menos em linhas gerais, sabemos quais são os cálculos, construções etc. que devemos efetuar para encontrar a solução do problema considerado.*

Necessitamos encontrar uma conexão entre as informações fornecidas no enunciado e a incógnita (**d**) do problema.

O plano é determinar a altura do ponto mais alto que a escada atinge no muro ($\mathbf{h_1}$) e, em seguida, determinar a altura ($\mathbf{h_2}$) do ponto mais alto que a escada atinge depois de seu pé ter se afastado. É importante perceber que a hipotenusa dos dois triângulos retângulos é a mesma, pois sua medida corresponde ao comprimento da escada, que não se altera.

Basta fazer, em seguida, a diferença entre $\mathbf{h_1}$ e $\mathbf{h_2}$ para obter o deslocamento vertical (**d**).

3ª etapa: Executar o plano.

Usando o teorema de Pitágoras para a situação inicial e a final, temos:

Situação inicial:

$h_1^2 + 7^2 = 25^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1^2 = 625 - 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = \sqrt{576} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = 24$ dm

Situação final:

$h_2^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2^2 + 225 = 625 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = \sqrt{400} \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = 20$ dm

Deslocamento vertical (**d**):

$d = h_1 - h_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 24 \text{ dm} - 20 \text{ dm} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 4$ dm

4ª etapa: Fazer uma retrospectiva da resolução, revendo-a e analisando-a.

É importante mostrar aos estudantes que, ao chegar à solução do problema, não se deve acreditar que a atividade está finalizada e passar ao problema seguinte ou a outro assunto. É fundamental rever todas as etapas envolvidas na resolução, verificar o resultado obtido, a coerência da resposta encontrada, verificar o argumento usado na resolução (no caso, o argumento que torna a resolução possível é o teorema de Pitágoras), além de considerar outras possíveis formas de resolver o problema.

Acreditamos que a descrição acima, sem a pretensão de ser uma “receita mágica”, possa ajudar o professor na construção conjunta com os estudantes de uma rotina nas atividades de resolução de problemas, favorecendo gradativamente sua autonomia intelectual. Por fim, é preciso sempre lembrar que a resolução de problemas demanda tempo, e o professor deve ficar atento para não suprimir etapas.

História da Matemática

Em vários capítulos dos três volumes desta coleção são apresentados textos ou pequenas referências à História da Matemática, os quais têm por objetivo colocar o leitor em contato com a história da criação do conhecimento em Matemática ou simplesmente situá-lo na linha do tempo. Essa criação, em geral, está ligada às necessidades da humanidade ao longo da história. Por exemplo, as referências históricas no livro sobre a criação dos logaritmos revelam a necessidade histórica de um instrumento de cálculo capaz de auxiliar o desenvolvimento da astronomia, do comércio e da navegação nos séculos XVI e XVII. Com o desenvolvimento tecnológico do século XX (computadores, calculadoras etc.), tal finalidade perdeu sua importância.

É importante que o estudante perceba o caráter acumulativo da Matemática e o fato de que suas fronteiras estão em contínua expansão, como mostra o infográfico sobre geometria fractal, na seção *Aplicações* no volume 2. Nele, as referências históricas, bem mais recentes (século XX), revelam o surgimento desse ramo da Matemática associado à necessidade de compreender formas geométricas que a geometria euclidiana não explicava.

Integração de conteúdos

Muitas vezes são estabelecidas no livro-texto conexões entre o assunto em desenvolvimento e outros tópicos de Matemática já estudados em outros capítulos ou mesmo em volumes anteriores, favorecendo a não fragmentação dos conteúdos. Um currículo mais integrado tende a motivar os estudantes para a aprendizagem em Matemática. A seguir, vamos exemplificar alguns casos onde isso ocorre nesta coleção.

No volume 1, ao definirmos as progressões como um caso particular de função com domínio no conjunto dos números naturais, relacionamos a função afim à progressão aritmética e a função exponencial à progressão geométrica; o conceito de semelhança é usado na apresentação e definição das razões trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo; o sinal de uma função é usado para resolver inequações do 1º e do 2º grau etc.

No volume 2, é possível notar a integração da Trigonometria com a Geometria por meio da resolução de triângulos quaisquer com o uso da lei dos senos e da lei dos cossenos (nesse ponto, são usadas as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo e de seu suplementar) e de outras relações trigonométricas na resolução de problemas geométricos.

Além disso, o estudo da Geometria Métrica Espacial é ligado, nos textos de aplicações e nas atividades da seção *Troque ideias*, às funções polinomiais do 1º e 2º graus.

No volume 3, o estudo da equação da reta é associado à função afim; o estudo da parábola relaciona-se à função quadrática; e o estudo da hipérbole é associado, num caso particular, à função recíproca. Na apresentação dos polinômios, recorremos à Geometria para expressar a área de figuras planas e da superfície de figuras espaciais e o volume de alguns poliedros.

Na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, há outras propostas de atividades que promovem essa integração. No volume 1, citamos a atividade 9 do item *Sugestões de atividades em grupo,* que relaciona semelhança de triângulos e gráficos estatísticos; no volume 2, destacamos a atividade 4 que integra Álgebra e Geometria, na relação entre produtos notáveis e o volume do paralelepípedo, e a atividade 7 sobre fractais geométricos, que relacionam conceitos de sequências numéricas, área e perímetro.

No volume 3, a atividade 5, de Matemática Financeira, relaciona juros compostos às progressões geométricas e a atividade 3 integra matrizes, Geometria Analítica e semelhança.

Contextualização e aplicação a outras áreas do conhecimento

[...]

Contextualizar o conteúdo que quer ser aprendido significa em primeiro lugar assumir que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto. Na escola básica, o conhecimento é quase sempre reproduzido das situações originais nas quais acontece sua produção. Por esta razão quase sempre o conhecimento escolar se vale de uma transposição didática na qual a linguagem exerce papel decisivo.

O tratamento contextualizado do conhecimento é o recurso que a escola tem para retirar o aluno da condição de espectador passivo. Se bem trabalhado permite que, ao longo da transposição didática, o conteúdo do ensino provoque aprendizagens significativas que mobilizem o aluno e estabeleçam entre ele e o objeto do conhecimento uma relação de reciprocidade. A contextualização evoca áreas, âmbitos ou dimensões presentes na vida pessoal, social e cultural, e mobiliza competências cognitivas já adquiridas. As dimensões da vida ou os contextos valorizados explicitamente pela LDB são o trabalho e a cidadania. As competências estão indicadas quando a lei prevê um ensino que facilite a ponte entre a teoria e a prática.

[...] é possível generalizar a contextualização como recurso para tornar a aprendizagem significativa ao associá--la com experiências da vida cotidiana ou conhecimentos adquiridos espontaneamente. É preciso, no entanto, cuidar para que essa generalização não induza à banalização, com o risco de perder o essencial da aprendizagem escolar que é seu caráter sistemático, consciente e deliberado. Em outras palavras: contextualizar os conteúdos escolares não é liberá-los do plano abstrato da transposição didática para aprisioná-los no espontaneísmo e na cotidianeidade. [...]

Trechos do parecer nº 15/98 da Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional da Educação.

No início de vários capítulos desta coleção são propostos problemas ou situações presentes no contexto cotidiano, como forma de motivar o leitor na construção dos conceitos apresentados no capítulo. Em geral, no desenvolvimento do capítulo, tais problemas são retomados.

As séries de exercícios também contemplam uma grande variedade de problemas, nos quais se enfatiza a contextualização com situações reais e cotidianas.

Em diversos capítulos dos três volumes são apresentados textos complementares na seção *Aplicações*, alguns deles na forma de **infográficos**.

Há textos que possibilitam aplicar os conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física (taxa de variação de função e velocidade média, a intensidade dos sons e a escala logarítmica; elipse e gravitação); Matemática e Química (função exponencial e decaimento radioativo); Matemática e Programação linear (Geometria Analítica e problemas de maximização); Matemática e Geologia (logaritmos e escala Richter); Matemática e Arte (número de ouro; Geometria e arte fractal); Matemática e mercado de trabalho (construção de tabelas de frequência em planilhas eletrônicas; curvas de aprendizagem); Matemática e Astronomia (no infográfico que mostra o criativo método usado por Eratóstenes na estimativa para a medida do raio da Terra); Matemática e o mundo digital (matrizes e *pixels*) etc. Em alguns momentos, os textos abordam temas transversais como a Cidadania, por exemplo; nos capítulos de Estatística apresentamos textos sobre os Censos Demográficos e a interpretação de resultados de uma pesquisa eleitoral.

Em algumas atividades, como nas seções *Troque ideias*, os estudantes, trabalhando em equipe, são convidados a construir conceitos em outras áreas do conhecimento, no intuito de vivenciar aprendizagens significativas. Podemos citar atividades que relacionam a Matemática à Economia (funções custo, receita e lucro; problema de maximização de receita); Matemática e Biologia (meia-vida de medicamentos); Matemática e Química (sistemas lineares e o balanceamento de equações químicas); Matemática e Meteorologia (índices pluviométricos) etc.

Outros textos e atividades aprofundam os conceitos que estão sendo formados e auxiliam na construção de outros. Como exemplo, o texto que liga os jogos de azar à probabilidade (Matemática, futebol e loteria, no volume 2); a atividade sobre a Mega-Sena (volume 2); a atividade que ilustra o movimento de uma roda-gigante às funções trigonométricas (volume 2); os textos e as atividades sobre compras à vista ou a prazo (no capítulo de Matemática Financeira, volume 3).

Na parte específica destas Orientações Didáticas, há sugestões de atividades em grupos relacionadas a alguns desses textos e também a assuntos inéditos, para os professores que queiram ampliar e aprofundar a discussão sobre os temas envolvidos. Essas atividades também podem servir como instrumento diversificado de avaliação.

As propostas de atividades em grupo na seção *Troque ideias* visam ao fortalecimento, em sala de aula, das interações aluno-aluno, tendo o professor o papel de mediador. Nessas atividades pretende-se colocar os estudantes em situações mais investigativas.

As atividades propostas podem incluir:

- **Modelagem matemática**, por meio do uso de funções na descrição de fenômenos em outras áreas do conhecimento, como: o uso de função afim na representação dos custos, receitas e lucro de empreendimentos simples; o uso da função quadrática em problemas de maximização da receita; o uso da função exponencial na composição do conceito de meia-vida de medicamentos; ou o uso das funções trigonométricas para aproximar o movimento das marés.
- Atividades de **integração de conteúdos**, como: a que relaciona o volume de um cone e as funções; a que utiliza polinômios para representar a área de figuras planas e o volume e área de sólidos geométricos.
- **Resolução de uma situação-problema** (fazendo uso de régua e compasso), como a determinação de um ponto equidistante de três pontos dados.
- **Atividades motivadoras na introdução de um tópico**, como as que antecedem a formalização dos conceitos de P.A. e P.G.
- Atividades de **aplicação dos conceitos** que estão sendo construídos em contextos cotidianos e de interesse dos estudantes, como: as chances de ganhar na Mega-Sena; a compreensão do índice pluviométrico e a decisão entre a compra à vista ou a prazo.
- Atividades que visam **desenvolver uma habilidade ou competência específica**, como a leitura de escalas em mapas.
- Atividades que convidam o estudante a **participar de deduções de propriedades**, colocando-os à frente no processo de validação em Matemática, como: as atividades de investigação sobre números inteiros; a dedução da relação fundamental da Trigonometria (entre outras) no triângulo retângulo; a dedução da fórmula da área de um triângulo em um caso particular.

Em cada um dos três volumes, na parte específica das Orientações Didáticas, o professor encontrará um breve comentário geral para cada atividade com algumas orientações, objetivos a serem alcançados e competências mobilizadas, além da resolução de todas as questões propostas aos estudantes.

Para relacionar algumas competências a serem desenvolvidas nas atividades, usamos como referência as competências descritas no documento *PCN+, Matemática e suas Tecnologias*, MEC, SEB, 2002, cujas três grandes competências são: representação e comunicação, investigação e compreensão, e contextualização sociocultural. Veja os textos para estudo e reflexão no item *Textos complementares – Orientações Curriculares.*

Por fim, acreditamos que as atividades de interação aluno-aluno e aluno-professor, que têm como foco principal o processo de aprendizagem dos estudantes, podem ser usadas como um valioso instrumento de diversificação em sala de aula, ampliando e enriquecendo os processos de avaliações formais. Na parte específica das Orientações Didáticas, em cada volume, há outras propostas de atividades em grupo.

Uso da calculadora e do computador

Procuramos explorar e valorizar, em alguns pontos da coleção, o uso de calculadora (comum ou científica) e do computador.

Com a calculadora comum, por exemplo, pretendemos que o estudante se aproprie do uso da tecla de porcentagem % para resolver problemas de Matemática Comercial, tão presentes no dia a dia dos profissionais ligados ao comércio. Alguns desses problemas envolvem cálculo de porcentagens, cálculo do valor final de uma mercadoria após a concessão de um desconto (ou após um aumento de preços) etc.

Com a calculadora científica, por exemplo, procuramos utilizar algumas de suas funções, geralmente não conhecidas pelos estudantes nesta etapa da escolaridade. Entre as teclas que acionam essas funções, temos:

- as teclas de potenciação x^y ou ^;
- as teclas de logaritmos decimais LOG e neperianos LN;
- as teclas referentes às funções trigonométricas para obtenção de valores das razões trigonométricas, a partir de um ângulo medido em graus ou radianos (explora-se, neste momento, o ajuste de configuração usando, de forma associada, a tecla MODE: DEG ou RAD e o uso das teclas SIN, COS e TAN) e, reciprocamente, a partir de um valor conhecido referente a uma razão trigonométrica de um ângulo, como obter a medida do ângulo, explorando, desse modo, a segunda função de uma tecla (SHIFT ou 2ndF).

Com relação ao uso do computador, destacamos alguns pontos importantes presentes na coleção:

1º) O uso de *softwares* livres de Matemática:

Na coleção, são utilizados o *software* GeoGebra nos três volumes e o Graphmática no volume 3.

No estudo das funções, o uso de *softwares* possibilita ao estudante melhor visualização:

- do traçado da parábola e suas propriedades;
- dos gráficos obtidos por translação de outros gráficos. Os gráficos de $y = |x + k|$ e $y = |x| + k$, com $k \in \mathbb{R}$, por exemplo, são obtidos por translação horizontal e vertical, respectivamente, do gráfico de $y = |x|$. Ou ainda, a partir do gráfico de $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é possível construir os gráficos de $y = a^x + k$, com $k \in \mathbb{R}^*$ por translação.
- das alterações obtidas quando construímos o gráfico de funções do tipo $y = a \cdot \text{sen } x$ ou $y = a + \text{sen } x$ ou $y = \text{sen } (a \cdot x)$, com $a \in \mathbb{R}^*$, a partir dos gráficos das funções trigonométricas "básicas": $y = \text{sen } x$ ou $y = \cos x$;
- das funções polinomiais de grau maior que 2, no volume 3. O *software* é utilizado para a construção dos gráficos dessas funções, lembrando que, sem ele, a construção requer conceitos de Matemática da Educação Superior. A partir da leitura do gráfico, podemos obter informações sobre o polinômio (número de raízes reais, interseções com os eixos coordenados etc.);
- na Geometria Analítica, o uso de um *software* como o GeoGebra pode ajudar o estudante a compreender o traçado e os elementos das cônicas (circunferência, elipse, hipérbole e parábola) e relacioná-lo com suas respectivas equações.

2º) O uso de planilhas eletrônicas:

Pensando na futura inserção do jovem brasileiro no mercado de trabalho, são propostas atividades que dão suporte ao trabalho com Estatística.

No volume 1, é mostrada, passo a passo, a construção de uma tabela de frequências. Nessa atividade, o estudante terá a oportunidade de aprender a organizar um conjunto de dados em uma tabela de frequências, adicionar valores da tabela utilizando a planilha eletrônica, criar fórmulas para realização de operações utilizando a planilha eletrônica etc. Essas tarefas fazem parte da rotina de vários profissionais, nos mais variados campos de trabalho.

No volume 1, na parte específica das Orientações Didáticas, é proposta uma atividade de construção de gráficos estatísticos.

E, nas Orientações Didáticas do volume 3, o professor encontra um roteiro completo e detalhado de uma atividade de cálculo de medidas estatísticas de posição e dispersão, que serão usadas para caracterizar e resumir um conjunto de dados, por meio, novamente, do uso de planilhas eletrônicas.

Uso de régua e compasso

As construções geométricas com régua e compasso também estão presentes na coleção. Dois momentos em que elas ocorrem são:

- na parte específica das Orientações Didáticas do volume 1, em uma atividade que permite revisar a construção da bissetriz de um ângulo, o traçado da perpendicular e a obtenção do incentro de um triângulo com o intuito de deduzir a fórmula do cálculo da área de um triângulo, em uma situação particular;
- no volume 3, na seção *Troque ideias*, em uma atividade em grupo desenvolvida a partir de um problema, os estudantes deverão construir, com régua e compasso, o circuncentro de um triângulo e conferir, por meio da Geometria Analítica, a resposta obtida.

Estrutura da coleção

Cada volume foi organizado em capítulos nos quais a apresentação e o desenvolvimento teórico encontram-se intencionalmente intercalados às definições, exemplos, propriedades e exercícios. O início de cada capítulo recebe destaque especial e, sempre que possível, traz situações do cotidiano, que aproximam o leitor do conteúdo que será apresentado.

A seguir são descritas as principais características das seções da coleção.

Aplicações

Na seção *Aplicações* são apresentados textos que aprofundam alguns conceitos e auxiliam na construção de outros. Eles ilustram o emprego de conhecimentos matemáticos a outros campos, estabelecendo, por exemplo, um elo entre a Matemática e a Física ou entre a Matemática e a Economia.

Troque ideias

A seção *Troque ideias*, presente em vários capítulos dos três volumes, propõe atividades em grupo que favorecem as interações aluno-aluno e aluno-professor. Tais atividades buscam despertar a curiosidade e levar o estudante a construir novos conceitos, ou a aprofundar conteúdos já apresentados, além de favorecer a autonomia e instigar a busca pelo conhecimento.

Um pouco de História

Nesta seção, o trabalho com a História da Matemática coloca os estudantes em contato com um processo de construção do conhecimento e com os encaminhamentos na resolução de problemas enfrentados pela humanidade no decorrer do tempo, situando também os conhecimentos ao longo do tempo.

Exemplos, exercícios resolvidos e exercícios

Todos os capítulos da coleção apresentam séries de exercícios intercaladas ao texto. Em geral, cada série é precedida de *exemplos* e *exercícios resolvidos*. Os exercícios estão organizados em ordem crescente de dificuldade, iniciando, sempre que julgamos conveniente, por alguns de reconhecimento ou de aplicação direta de conceitos, sem, contudo, explorar caminhos artificiais ou excessivamente algébricos e tampouco limitar-se a eles. De modo geral, são exercícios que envolvem relações mais simples.

Intercaladas a esses exercícios, propomos situações-problema com contextos cotidianos, aos quais o estudante possa aplicar e relacionar os conceitos construídos para a resolução desses problemas.

Os exercícios finais da série geralmente requerem leitura e interpretação mais cuidadosas do enunciado por parte dos estudantes, na busca por soluções mais elaboradas para os problemas propostos.

Desafios

Todos os capítulos desta coleção são encerrados com um desafio. Em geral, são problemas que podem envolver conceitos de outros capítulos, inclusive de outros volumes.

Nossa intenção, ao propor esses desafios, é proporcionar aos estudantes mais uma oportunidade de vivenciar e aperfeiçoar a resolução de problemas, colocando-os em situações de atividades investigativas e motivando-os na busca de estratégias e procedimentos diversos de resolução.

Todos os desafios encontram-se resolvidos na parte específica destas Orientações Didáticas.

Um pouco mais sobre

Alguns conteúdos podem ser complementados ou aprofundados a partir da leitura de textos no final de determinados capítulos.

Observações

Os boxes *Observações*, encontrados em diversos momentos nos livros, trazem informações sobre o conteúdo estudado e estão intercalados em meio ao texto para ajudar o estudante na compreensão dos conceitos.

Pense nisto

Nos três volumes desta coleção, estão inseridas chamadas curtas ao longo do texto intituladas *Pense nisto*.

Em geral, elas podem referir-se a uma observação relacionada ao texto, a um exemplo ou a um exercício resolvido ou proposto.

Nossa intenção, ao apresentar essas chamadas, foi tornar a linguagem do texto menos impessoal, chamando o estudante para refletir sobre algum detalhe do texto, alguma propriedade ou sobre uma resolução apresentada para um problema.

Nessas chamadas, o estudante pode ser questionado do porquê de determinada passagem, sobre os conceitos que estão sendo construídos ou pode ser convidado a propor outra solução para um problema.

Muitas vezes, as chamadas do *Pense nisto* podem orientar o professor na condução das discussões em sala de aula que levem à reflexão dos estudantes, possibilitando o compartilhamento de ideias e descobertas.

Acreditamos que as discussões propostas nessas chamadas podem encaminhar os estudantes para um papel de protagonistas no processo de aprendizagem, uma vez que assumem uma postura mais ativa e reflexiva na construção dos conceitos.

Textos complementares – Orientações Curriculares

A seguir, reproduzimos parte do documento do Ministério da Educação: *Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Conhecimentos de Matemática*. O documento enfoca três aspectos principais: a escolha dos conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. Por se tratar de um artigo extenso, selecionamos a parte que trata da escolha dos conteúdos.

Orientações Curriculares para o Ensino Médio

Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
Conhecimentos de Matemática

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o Ensino Médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos.

Nessa definição de propósitos, percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas. O trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Visando à contribuição ao debate sobre as orientações curriculares, este documento trata de três aspectos: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular.

Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino que valorize tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da Matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica.

Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações curriculares para o Ensino Médio. Brasília: MEC, 2006. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 9 maio 2016.

A fim de contribuir para o estudo e a reflexão do professor, reproduzimos a seguir o trecho de outro documento do Ministério da Educação, o qual aborda especificamente as três competências a serem desenvolvidas no Ensino Médio:

- representação e comunicação;
- investigação e compreensão;
- contextualização sociocultural.

Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias — *PCN+ — As competências em Matemática*

A área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias elegeu três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:

- *representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;*
- *investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;*
- *contextualização das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.*

No entanto, a escola que tem como objetivo preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida precisa refletir sobre o significado dessas competências para decidir sobre quais delas trabalhar, em que disciplinas e de que forma. Ou seja, é necessário compreender a proposta, aproximando-a das ações e das possibilidades características dos afazeres escolares. Para isso, apontamos e detalhamos o sentido dessas competências no âmbito da Matemática, explicitando o que se espera do aluno em cada uma delas, com exemplos que procuram auxiliar a compreensão de como, nessa disciplina, é possível desenvolver as competências eleitas na área.

Representação e comunicação	
Na área	**Em Matemática**
Símbolos, códigos e nomenclaturas de ciência e tecnologia	
Reconhecer e utilizar adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica.	• Reconhecer e utilizar símbolos, códigos e nomenclaturas da linguagem matemática; por exemplo, ao ler embalagens de produtos, manuais técnicos, textos de jornais ou outras comunicações, compreender o significado de dados apresentados por meio de porcentagens, escritas numéricas, potências de dez, variáveis em fórmulas. • Identificar, transformar e traduzir adequadamente valores e unidades básicas apresentados sob diferentes formas como decimais em frações ou potências de dez, litros em metros cúbicos, quilômetros em metros, ângulos em graus e radianos.
Articulação dos símbolos e códigos de ciência e tecnologia	
Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas.	• Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas. • Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra; por exemplo, transformar situações dadas em linguagem discursiva em esquemas, tabelas, gráficos, desenhos, fórmulas ou equações matemáticas e vice-versa, assim como transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações. • Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas; por exemplo, escolher entre uma equação, uma tabela ou um gráfico para representar uma dada variação ao longo do tempo, como a distribuição do consumo de energia elétrica em uma residência ou a classificação de equipes em um campeonato esportivo.
Análise e interpretação de textos e outras comunicações de ciência e tecnologia	
Consultar, analisar e interpretar textos e comunicações de ciência e tecnologia veiculadas em diferentes meios.	• Ler e interpretar diferentes tipos de textos com informações apresentadas em linguagem matemática, desde livros didáticos até artigos de conteúdo econômico, social ou cultural, manuais técnicos, contratos comerciais, folhetos com propostas de vendas ou com planta de imóveis, indicações em bulas de medicamentos, artigos de jornais e revistas. • Acompanhar e analisar os noticiários e artigos relativos à ciência em diferentes meios de comunicação, como jornais, revistas e televisão, identificando o tema em questão e interpretando, com objetividade, seus significados e implicações para, dessa forma, ter independência para adquirir informações e estar a par do que se passa no mundo em que vive.
Elaboração de comunicações	
Elaborar comunicações orais ou escritas para relatar, analisar e sistematizar eventos, fenômenos, experimentos, questões, entrevistas, visitas, correspondências.	• Expressar-se com clareza, utilizando a linguagem matemática, elaborando textos, desenhos, gráficos, tabelas, equações, expressões e escritas numéricas – para comunicar-se via internet, jornais ou outros meios, enviando ou solicitando informações, apresentando ideias, solucionando problemas. • Produzir textos analíticos para discutir, sintetizar e sistematizar formas de pensar, fazendo uso, sempre que necessário, da linguagem matemática. Redigir resumos, justificar raciocínios, propor situações-problema, sistematizar as ideias principais sobre dado tema matemático com exemplos e comentários próprios. • Expressar-se da forma oral para comunicar ideias, aprendizagens e dificuldades de compreensão; por exemplo, explicando a solução dada a um problema, expondo dúvidas sobre um conteúdo ou procedimento, propondo e debatendo questões de interesse.
Discussão e argumentação de temas de interesse de ciência e tecnologia	
Analisar, argumentar e posicionar-se criticamente em relação a temas de ciência e tecnologia.	• Compreender e emitir juízos próprios sobre informações relativas à ciência e à tecnologia, de forma analítica e crítica, posicionando-se com argumentação clara e consistente sempre que necessário, identificar corretamente o âmbito da questão e buscar fontes onde possa obter novas informações e conhecimentos. Por exemplo, ser capaz de analisar e julgar cálculos efetuados sobre dados econômicos ou sociais, propagandas de vendas a prazo, probabilidades de receber determinado prêmio em sorteios ou loterias, ou ainda apresentadas em um dado problema ou diferentes sínteses e conclusões extraídas a partir de um mesmo texto ou conjunto de informações.

Investigação e compreensão	
Na área	**Em Matemática**
Estratégias para enfrentamento de situações-problema	
Identificar em dada situação--problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la.	• Identificar os dados relevantes em uma dada situação-problema para buscar possíveis resoluções; por exemplo, em situações com uma diversidade de dados apresentados por meio de tabelas, gráficos, especificações técnicas, reconhecer as informações relevantes para uma dada questão que se busca resolver. • Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema; por exemplo, para obter uma dada distância, saber optar por medi-la diretamente, utilizar uma planta em escala, usar semelhança de figuras, fazer uso de propriedades trigonométricas ou utilizar um sistema de eixos cartesianos e abordar o problema através da geometria analítica. • Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática, ou seja, decidir-se pela utilização das formas algébrica, numérica, geométrica, combinatória ou estatística. Por exemplo, para calcular distâncias ou efetuar medições em sólidos, utilizar conceitos e procedimentos de geometria e medidas, enquanto, para analisar a relação entre espaço e tempo no movimento de um objeto, optar pelo recurso algébrico das funções e suas representações gráficas.
Interações, relações e funções; invariantes e transformações	
Identificar fenômenos naturais ou grandezas em dado domínio do conhecimento científico, estabelecer relações, identificar regularidades, invariantes e transformações.	• Identificar regularidades em situações semelhantes para estabelecer regras, algoritmos e propriedades; por exemplo, perceber que todas as funções do segundo grau possuem o mesmo tipo de gráfico, o que implica propriedades de sinal, crescimento e decrescimento. Da mesma forma, ao identificar a regularidade de que é constante a soma dos termos equidistantes de uma progressão aritmética finita, estender essa propriedade a toda situação envolvendo progressões aritméticas e daí deduzir a soma de seus termos. • Reconhecer a existência de invariantes ou identidades que impõem as condições a serem utilizadas para analisar e resolver situações-problema; por exemplo, estabelecer identidades ou relações como aquelas existentes entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, os volumes de um cilindro e de um cone que tenham a mesma base e a mesma altura, a relação entre catetos e hipotenusa em qualquer triângulo retângulo; ou ainda a identidade fundamental da trigonometria. • Identificar transformações entre grandezas ou figuras para relacionar variáveis e dados, fazer quantificações, previsões e identificar desvios. As ampliações e reduções de figuras são exemplos que devem ser entendidos como transformações de uma situação inicial em outra final. • Perceber as relações e identidades entre diferentes formas de representação de um dado objeto, como as relações entre representações planas nos desenhos, mapas e telas de computador com os objetos que lhes deram origem. • Reconhecer a conservação contida em toda igualdade, congruência ou equivalência para calcular, resolver ou provar novos fatos. Por exemplo, ao resolver uma equação ou sistema linear, compreender que as operações realizadas a cada etapa transformam a situação inicial em outra que lhe é equivalente, com as mesmas soluções.
Medidas, quantificações, grandezas e escalas	
Selecionar e utilizar instrumentos de medição e de cálculo, representar dados e utilizar escalas, fazer estimativas, elaborar hipóteses e interpretar resultados.	• Identificar e fazer uso de diferentes formas e instrumentos apropriados para efetuar medidas ou cálculos; por exemplo, discriminar o melhor instrumento para medir, comparar ou calcular comprimentos e distâncias, ângulos, volumes ocupados por líquidos, em dada situação específica. Usar adequadamente réguas, esquadros, transferidores, compassos, calculadoras e outros instrumentos ou aparelhos. • Identificar diferentes formas de quantificar dados numéricos para decidir se a resolução de um problema requer cálculo exato, aproximado, probabilístico ou análise de médias. Por exemplo, de acordo com uma dada situação, escolher número de algarismos apropriado ou fazer aproximações adequadas, optar pelo uso de fração, porcentagem, potências de dez; escolher melhor unidade para representar uma grandeza. • Fazer previsões e estimativas de ordens de grandeza, de quantidades ou intervalos esperados para os resultados de cálculos ou medições e, com isso, saber avaliar erros ou imprecisões nos dados obtidos na solução de uma dada situação-problema. • Compreender a necessidade e fazer uso apropriado de escalas; por exemplo, na construção de gráficos ou em representações de plantas e mapas.

Modelos explicativos e representativos	
Reconhecer, utilizar, interpretar e propor modelos para situações-problema, fenômenos ou sistemas naturais ou tecnológicos.	• Interpretar, fazer uso e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações; por exemplo, utilizar funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculo de lucro máximo ou prejuízo mínimo; utilizar ferramentas de estatística e probabilidade para compreender e avaliar as intenções de votos em uma campanha eleitoral ou, ainda, optar entre modelos algébricos ou geométricos para obter determinadas medições de sólidos.
Relações entre conhecimentos disciplinares, interdisciplinares e interáreas	
Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência, entre as várias ciências e áreas do conhecimento.	• Construir uma visão sistematizada das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre seus diferentes temas e conteúdos, para fazer uso do conhecimento de forma integrada e articulada. • Compreender a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo. A forma lógica dedutiva que a Geometria utiliza para interpretar as formas geométricas e deduzir propriedades dessas formas é um exemplo de como a Matemática lê e interpreta o mundo à nossa volta. • Adquirir uma compreensão do mundo da qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações. • Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia.

Contextualização sociocultural	
Na área	**Em Matemática**
Ciência e tecnologia na história	
Compreender o conhecimento científico e o tecnológico como resultados de uma construção humana, inseridos em um processo histórico e social.	• Compreender a construção do conhecimento matemático como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos nem certezas definitivas. Por exemplo, o uso da geometria clássica ou da analítica para resolver um mesmo problema pode mostrar duas formas distintas de pensar e representar realidades comparáveis em momentos históricos diferentes. • Compreender o desenvolvimento histórico da tecnologia associada a campos diversos da Matemática, reconhecendo sua presença e implicações no mundo cotidiano, nas relações sociais de cada época, nas transformações e na criação de novas necessidades, nas condições de vida. Por exemplo, ao se perceber a origem do uso dos logaritmos ou das razões trigonométricas como resultado do avanço tecnológico do período das grandes navegações do século 16, pode-se conceber a Matemática como instrumento para a solução de problemas práticos e que se desenvolve para muito além deles, ganhando a dimensão de ideias gerais para novas aplicações fora do contexto que deu origem a elas. • Perceber o papel desempenhado pelo conhecimento matemático no desenvolvimento da tecnologia e a complexa relação entre ciência e tecnologia ao longo da história. A exigência de rapidez e complexidade dos cálculos fez com que a Matemática se desenvolvesse e, por outro lado, as pesquisas e avanços teóricos da Matemática e demais ciências permitiram o aperfeiçoamento de máquinas como o computador, que vêm tornando os cálculos cada vez mais rápidos.
Ciência e tecnologia na cultura contemporânea	
Compreender a ciência e a tecnologia como partes integrantes da cultura humana contemporânea.	• Compreender a Matemática como parte integrante da cultura contemporânea, sendo capaz de identificar sua presença nas manifestações artísticas ou literárias, teatrais ou musicais, nas construções arquitetônicas ou na publicidade. • Perceber a dimensão da Matemática e da ciência em espaços específicos de difusão e mostras culturais, como museus científicos ou tecnológicos, planetários, exposições. • Compreender formas pelas quais a Matemática influencia nossa interpretação do mundo atual, condicionando formas de pensar e interagir. Por exemplo, comparando os cálculos feitos pelas máquinas com aqueles feitos “com lápis e papel”, e identificando a função, especificidades e valores de cada um desses meios na construção do conhecimento.

Ciência e tecnologia na atualidade	
Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no mundo cotidiano e seus impactos na vida social.	• Acompanhar criticamente o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, tomando contato com os avanços das novas tecnologias nas diferentes áreas do conhecimento para se posicionar frente às questões de nossa atualidade. Utilizar o conhecimento matemático como apoio para compreender e julgar as aplicações tecnológicas dos diferentes campos científicos. Por exemplo, o uso de satélites e radares nos rastreamentos e localizações, ou dos diferentes tipos de transmissão e detecção de informações, as formas de manipulação genética ou de obtenção e utilização de recursos naturais.
Ciência e tecnologia, ética e cidadania	
Reconhecer e avaliar o caráter ético do conhecimento científico e tecnológico e utilizar esse conhecimento no exercício da cidadania.	• Compreender a responsabilidade social associada à aquisição e ao uso do conhecimento matemático, sentindo-se mobilizado para diferentes ações, seja em defesa de seus direitos como consumidor, dos espaços e equipamentos coletivos ou da qualidade de vida. • Conhecer recursos, instrumentos e procedimentos econômicos e sociais para posicionar-se, argumentar e julgar sobre questões de interesse da comunidade, como problemas de abastecimento, educação, saúde e lazer, percebendo que podem ser muitas vezes quantificados e descritos através do instrumental da Matemática e dos procedimentos da ciência. • Promover situações que contribuam para a melhoria das condições de vida da cidade onde vive ou da preservação responsável do ambiente. Utilizar as ferramentas matemáticas para analisar situações de seu entorno real e propor soluções, por exemplo, analisando as dificuldades de transporte coletivo em seu bairro por meio de levantamento estatístico, manuais técnicos de aparelhos e equipamentos, ou a melhor forma de plantio da lavoura para subsistência de uma comunidade.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+). *Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC (SEB), 2002. p. 111-119. Disponível em: <portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2016.

Avaliação

A avaliação é um conjunto de ações organizadas com a finalidade de obter informações sobre o que foi assimilado pelo estudante, de que forma e em quais condições. Para tanto, é preciso elaborar um conjunto de procedimentos investigativos que possibilitem o ajuste e a orientação adequada. A avaliação deve funcionar, por um lado, como um instrumento que possibilite ao avaliador analisar criticamente a sua prática; e, por outro, como instrumento que apresente ao avaliado a possibilidade de saber sobre seus avanços, dificuldades e possibilidades.

CAMPOS, Fernanda C. A. V.; SANTORO, Flávia M.; BORGES, Marcos R. S. A.; SANTOS, Neide. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Coleção Educação a Distância. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003.

É bastante consensual a ideia de que o processo avaliativo tem o papel de indicar a toda a comunidade escolar (estudantes, professores, coordenadores, diretores e pais) o andamento do processo de ensino e de aprendizagem e, dessa forma, apontar caminhos que viabilizem aprendizagens cada vez mais significativas e que contribuam para o crescimento dos estudantes.

Aos professores, coordenadores e diretores, o processo de avaliação deve fornecer parâmetros para reflexão sobre as práticas pedagógicas da escola, sobre as metodologias usadas nas aulas, bem como sobre os recursos e materiais didáticos utilizados. Os próprios instrumentos de avaliação devem ser continuamente repensados.

Desse modo, é necessário que os professores promovam, sempre que necessário, alterações nos seus planejamentos, redimensionando os objetivos a serem alcançados. Os resultados da avaliação também devem orientar a escola, como um todo, nos processos de reforço escolar.

Aos estudantes, a avaliação tem a função de permitir que verifiquem sua evolução e crescimento, seus erros, suas dificuldades e o que aprenderam. Essa reflexão deverá ser capaz de mobilizá-los para compreender e corrigir eventuais erros, retomar e recuperar conceitos e promover maior envolvimento nas discussões em sala de aula.

Para que o processo de avaliação seja capaz de fornecer subsídios à comunidade escolar, é imprescindível que se apoie em uma grande diversidade de instrumentos avaliativos, intencionalmente pensados e preparados para esse fim. Além disso, faz-se necessário que a avaliação seja contínua e possa acompanhar o dia a dia escolar dos estudantes, suas dificuldades e conquistas.

O que avaliamos

Numa concepção de aprendizagem mais ampla, podemos pensar em três dimensões do saber: o saber conceitual, o saber procedimental e o saber atitudinal, como sugere Antoni Zabala, em seu livro *A prática educativa – Como ensinar* (Artmed, 1988).

Esses três novos conteúdos (conteúdo aqui está sendo usado não apenas para referir-se às disciplinas tradicionais, mas abrange, nessa concepção, outras capacidades, como as relações interpessoais e a inserção social) correspondem, respectivamente, a três questões: o que devemos saber, como devemos fazer e como devemos ser (ou conviver socialmente).

Se tivermos em mente essas três dimensões do saber, poderemos fazer com que o processo avaliativo seja mais amplo, justo e benéfico para o estudante.

A dimensão conceitual (o que devemos saber)

Conteúdos conceituais constituem o conjunto de conceitos e definições relacionadas aos saberes. Para aprenderem esses conteúdos, os estudantes deverão desenvolver competências como compreender, refletir, relacionar, analisar, comparar etc. Se o professor promover, exclusivamente, aulas expositivas e se as atividades avaliativas exigirem dos estudantes apenas memorização de fórmulas e reprodução de exercícios com base em modelos previamente conhecidos, dificilmente conseguirá atingir essa dimensão conceitual.

Veja estes três exemplos:

1) Um botânico mediu, dia a dia, durante cinco dias, a altura de uma pequena planta e relacionou os resultados obtidos na tabela seguinte:

Altura (em cm)	3,0	3,5	4,5	5,0	7,0
Tempo (em dias)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

Para expressar matematicamente a relação existente entre a altura (**h**), em cm, e o tempo (**t**), em dias, o botânico usou um modelo linear, isto é, $h(t) = at + b$, em que **a** e **b** são constantes reais específicas do experimento. Comente a escolha desse modelo para essa situação.

A escolha do botânico não foi acertada, pois o crescimento da planta, por dia, não é constante, ou, ainda, a taxa média de variação da função *não* é constante, pois temos do 1º para o 2º dia: acréscimo de 0,5 cm; do 2º para o 3º dia: acréscimo de 1,0 cm; e assim por diante. Não se trata de um crescimento linear, de modo que a função que relaciona essas duas grandezas *não* é de 1º grau, e o gráfico, portanto, *não* é uma reta.

2) Na feira que eu costumo frequentar, uma barraca vende caldo de cana em dois copos cilíndricos: o menor, de 300 mL, custa R$ 2,70, e o maior, de 500 mL, custa R$ 4,00. Qual é a opção mais vantajosa para o consumidor?

Uma das formas de resolver essa questão é comparar os preços para uma mesma quantidade de caldo de cana; por exemplo, quanto pagarei, em cada caso, por 100 mL?

Copo menor: Se por 300 mL, pago R$ 2,70, então, por 100 mL, pago um terço desse valor, ou seja, R$ 0,90.

Copo maior: Se por 500 mL pago R$ 4,00, então, por 100 mL pago um quinto desse valor, isto é, R$ 0,80.

Isto indica que, considerando-se os preços, é mais vantajoso para o consumidor escolher o copo grande. Observe que, nesse problema, usamos o conceito de proporcionalidade.

3) Duas grandezas, **x** e **y**, relacionam-se pelos valores da tabela seguinte:

x	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	10
y	100	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{100}$

Ao analisar a tabela, um estudante concluiu que as grandezas **x** e **y** são inversamente proporcionais. Comente a conclusão do estudante.

A conclusão não está correta. Trata-se da ideia equivocada que se "duas grandezas são tais que, à medida que os valores de uma aumentam, os valores da outra diminuem, então essas grandezas são inversamente proporcionais".

É importante estar atento ao fato de que vários estudantes associam, indistintamente, e de maneira errada, decrescimento com proporcionalidade inversa (da mesma forma que associam, indistintamente, crescimento com proporcionalidade direta).

O conceito de grandezas inversamente proporcionais diz que, para qualquer par (x, y), com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, de valores dessas grandezas, o produto $x \cdot y$ é constante.

É fácil verificar que essa condição não é satisfeita para os pares da tabela:

$$\frac{1}{10} \cdot 100 = 10 \neq \frac{1}{4} \cdot 16 = 4;\ 1 \cdot 1 = 1 \neq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ etc.}$$

Por outro lado, uma análise mais cuidadosa mostra que:

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 100 = 1;\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 16 = 1;\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4 = 1 \text{ etc.}$$

Assim, $x^2 \cdot y = 1$ (constante) e, desse modo, $\mathbf{x^2}$ e **y** são grandezas inversamente proporcionais.

A dimensão procedimental (como devemos fazer)

Conteúdos procedimentais, na concepção de Antoni Zabala, são um conjunto de ações ordenadas e com um fim, isto é, dirigidas para a realização de um objetivo. Envolvem *aquilo que se aprende a fazer fazendo*.

Por exemplo, fazer uma lista de exercícios em que se pede para resolver equações exponenciais é uma tarefa que mobiliza um conteúdo procedimental. Isso inclui também os chamados *exercícios de fixação*, comuns na Matemática. Cabem, no entanto, duas ressalvas importantes:

1º) É imprescindível que o estudante possua uma correta conceituação do objeto de estudo ao qual se refere tal mecanização.
Por exemplo, não é raro encontrar estudantes que, em um esforço grande para memorizar o desenvolvimento dos produtos notáveis, acabam esquecendo que se trata apenas de efetuar multiplicações para a determinação desse resultado.
Outro exemplo, que se encontra no livro *Fundamentos da didática da Matemática* (de Saddo Ag. Almouloud, Editora UFPR), é o estudo feito pelo matemático francês Bodin (1989) e seu núcleo de pesquisa. Eles perceberam que estudantes, ao acertarem a questão "resolva a equação $7x - 3 = 13x + 15$", não foram capazes de responder à seguinte pergunta: "O número 10 é uma solução da equação $7x - 3 = 13x + 15$?".
O professor deve, portanto, ficar atento ao fato de que instrumentos de avaliação centralizados unicamente na dimensão procedimental podem favorecer automatismos e, desse modo, se transformar em obstáculos para a compreensão dos conceitos.

2º) É imprescindível que se criem momentos em que o estudantes possa usar tais procedimentos para resolver problemas e situações mais complexas, sempre que possível, contextualizadas com vivências do seu dia a dia ou aplicadas em outras áreas do conhecimento. Aproveitando o exemplo da equação exponencial, é preciso saber resolvê-la também para enfrentar problemas mais complexos, como a meia-vida de um isótopo radioativo ou a datação de um material orgânico por carbono-14. (Veja *sugestão de atividade em grupo* nas Orientações Didáticas do volume 1.)

Voltando ao exemplo do caldo de cana vendido na feira, se modificarmos um pouco o enunciado (fornecendo a informação de que os copos são cilíndricos, bem como as dimensões − medida do raio e da altura − desses cilindros), estaremos mobilizando também um conteúdo procedimental − o cálculo do volume do cilindro − para resolver o problema.

A dimensão atitudinal (como devemos ser)

Conteúdos atitudinais são aqueles que se referem à inserção social do estudante e ao exercício da cidadania, e é necessário que estejam presentes numa avaliação.

> [...] *uma avaliação de estudantes deve considerar dois aspectos importantes, a saber:*
> - *a avaliação quantitativa do desempenho dos estudantes* [...]
> - *a avaliação qualitativa, que é um processo de avaliação contínuo relacionado ao processo educativo, como atitude do aluno, sua participação em tarefas propostas, seu interesse, seu espírito crítico, sua autonomia intelectual e seus níveis de cooperação com colegas.*

CAMPOS, Fernanda C. A. V.; SANTORO, Flávia M.; BORGES, Marcos R. S. A.; SANTOS, Neide. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Coleção Educação a Distância. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003.

Não é tarefa simples para o professor avaliar o grau de aprendizagem do estudante, na medida em que se misturam componentes cognitivos, afetivos e de conduta. No entanto, se ele permitir que as aulas sejam o lugar onde se debatam ideias, onde haja espaço para cada estudante expressar sua opinião pessoal, onde se coloquem, de maneira proposital, situações complexas que obriguem o estudante a questionar, argumentar, refletir, ouvir os colegas etc., ele terá maiores possibilidades de analisar os avanços de cada estudante, observando como este se comporta em debates, seminários, atividades em grupo, estudos de campo, comemorações escolares, jogos, entre outras situações.

Quando um professor propõe atividades em grupo, devidamente organizadas, ele mobiliza os estudantes a vivenciar valores como respeito, responsabilidade, cooperação e honestidade, praticando um exercício de alteridade.

Cada vez mais o mercado de trabalho procura profissionais que saibam trabalhar em equipe e sejam imbuídos desses valores.

Nos três volumes desta coleção, especialmente nos textos de leitura da seção *Aplicações*, no boxe *Pense nisto* e na seção *Troque ideias*, há oportunidades para desenvolver um trabalho que favoreça as integrações aluno-aluno e aluno-professor. Além disso, na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, são propostas atividades em grupo. As três dimensões do saber são colocadas em jogo nessas atividades: a conceitual, a procedimental e a atitudinal. Essas atividades podem fornecer elementos para o professor avaliar os seus estudantes: cabe a ele avaliar a produção e o empenho das equipes, a correta aplicação dos conceitos e das técnicas procedimentais. O professor deve dirigir seu olhar também às atitudes dos estudantes no que se refere ao respeito aos colegas e professores.

Instrumentos de avaliação

A comunicação escrita dos estudantes

É importante que o registro que o estudante produz durante todo o ano letivo contemple, entre outros:

- as anotações diárias das aulas no caderno, acompanhadas de observações que ele próprio produz a partir das discussões ocorridas em aula, durante a construção dos conceitos que estão sendo formados;
- exemplos, exercícios resolvidos em sala de aula e exercícios feitos como tarefas de casa;

- fichas de resumo, que podem ser construídas com a participação do professor ou em grupos de estudantes e que têm a função de ajudar na seleção e organização dos assuntos mais relevantes;
- relatórios que o estudante pode produzir a partir de uma proposta de aula com leitura prévia. Trata-se de antecipar um determinado tema (ou apenas um recorte dele) que será apresentado e discutido na aula seguinte. O professor solicita aos estudantes, com a devida antecedência, que façam uma leitura do livro didático, ou pesquisem alguma outra fonte, sobre certo tema. Então, para a data combinada, os estudantes tentam produzir, com as próprias palavras, um pequeno relatório sobre o que entenderam em relação à leitura feita, ainda que tal compreensão tenha sido parcial. Acreditamos que esse tipo de estratégia possa contribuir para a autonomia intelectual do estudante, favorecendo habilidades importantes como leitura, interpretação e a comunicação matemática escrita.

Se essas atividades ou alguma outra similar, como pedir ao estudante um relatório ao final de determinado capítulo ou assunto, forem feitas com alguma frequência durante o ano escolar, cada estudante terá construído um portfólio próprio, no qual comunica, por escrito, ideias matemáticas. Esse portfólio permite acompanhar a evolução e o crescimento do estudante por meio do modo como este se comunica na linguagem matemática.

Avaliações escritas

As avaliações escritas, como as provas, por exemplo, também são instrumentos de avaliação.

A aplicação de provas, sejam elas na forma de questões de múltipla escolha, sejam na de questões dissertativas, pode ser uma das maneiras de fazer a avaliação dos estudantes. É preciso que elas sejam elaboradas considerando-se os objetivos de aprendizagem que se pretendem alcançar.

Autoavaliação

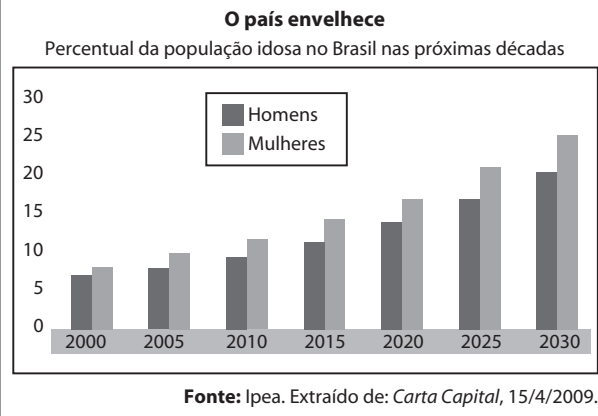
É importante que o professor ouça os estudantes sobre o modo pelo qual eles se relacionam com a Matemática, como estudam, como relacionam a Matemática ao seu cotidiano, quais são as dificuldades que enfrentam no processo de aprendizagem, quais avanços conseguem identificar, tanto no aspecto informativo como no formativo, entre outros.

Se os estudantes tiverem a oportunidade de manifestar suas necessidades, dificuldades, avanços, anseios, formas de aprender e estudar, maiores serão as possibilidades de o professor (e a escola, em geral) encontrar caminhos para enfrentar problemas de aprendizagem e propor ações para os estudantes refletirem sobre os próprios processos de aprendizagem.

A comunicação oral dos estudantes

O ato de comunicar oralmente ideias matemáticas pode ocorrer em atividades como apresentação de trabalhos e seminários organizados pelos estudantes. Vejamos uma situação-problema que envolve esse aspecto.

Você precisa relatar uma situação descrita pelo gráfico seguinte a uma pessoa que não dispõe dele no momento.

Fonte: Ipea. Extraído de: *Carta Capital*, 15/4/2009.

Naturalmente, o estudante deverá ser capaz de identificar e relatar do que trata o gráfico, quais são as grandezas associadas, que tendência se evidencia, quais os dados representados nas estimativas para homens e nas para mulheres etc.

Em se tratando de representações gráficas, atividades similares a essa podem ser realizadas no estudo da Estatística Descritiva e também no estudo introdutório das funções, no que diz respeito à leitura e interpretação de gráficos (em geral, gráficos em que uma das grandezas é o tempo são adequados para o estudo das funções).

Outro assunto que favorece atividades em que os estudantes são convidados a expressar-se oralmente é a Geometria, na descrição e comparação de figuras. Veja estas duas situações:

- No início do estudo dos sólidos geométricos, podem-se espalhar vários sólidos sobre a mesa (ou projetar imagens de sólidos) e pedir aos estudantes para agrupá-los segundo algum critério. Provavelmente, eles separarão os poliedros dos corpos redondos. Outra possibilidade é separar os sólidos em dois grupos: os que possuem vértice e os que não possuem. Em seguida, eles deverão argumentar, oralmente, com o repertório disponível, o critério que usaram na classificação. O professor pode experimentar pedir aos estudantes que repitam a argumentação, depois da formalização dos conceitos.
- Podem-se mostrar aos estudantes, no início do estudo dos poliedros, um prisma e uma pirâmide e pedir que eles descrevam verbalmente esses sólidos, estabelecendo em quê são parecidos (entre outras, eles devem apontar que ambos são formados por polígonos) e em quê são diferentes (entre outras, a pirâmide tem uma só base e o prisma tem duas bases congruentes).

Outra possibilidade é levar para a sala de aula prismas retos e oblíquos e pedir à turma que descreva, oralmente, a diferença entre eles.

Depois de estudados os conceitos, a classificação, os elementos etc., pode-se refazer a atividade e ver quanto a comunicação oral do estudante, na caracterização desses sólidos, avançou.

(Para complementar, sugerimos a atividade de Geometria Analítica proposta na parte específica das Orientações Didáticas do volume 3).

Em relação aos seminários, uma das possibilidades é explorar os textos da seção *Aplicações*, que constam nos três volumes de nossa coleção, e convidar os estudantes a preparar seminários, produzir novos materiais e promover discussões com a turma. Essas atividades devem mobilizar os estudantes a fazer outras pesquisas, aprofundando e ampliando os contextos dos assuntos que são abordados.

Outra possibilidade interessante é a proposta de uma aula preparada por um grupo de estudantes aos demais colegas da turma. Devem-se selecionar alguns recortes do conteúdo para serem pesquisados, e que sejam compatíveis com os conhecimentos dos estudantes. Na data estabelecida, cada equipe apresenta sua aula ao resto da classe. É fundamental que o professor esteja disponível para esclarecer dúvidas e trocar ideias e sugestões com as equipes no período de preparação dos seminários.

Esse tipo de atividade promove a autonomia dos estudantes, valoriza a leitura e a pesquisa, a comunicação oral e o trabalho em equipe.

Para exemplificar, no estudo de áreas das figuras planas, podem-se informar as áreas de várias figuras (triângulos, quadriláteros, círculo e suas partes) às equipes e pedir a cada uma delas que prepare uma aula com a dedução de fórmulas, exemplos e exercícios elaborados a partir dessas informações. Essa atividade pode se transformar em um valioso instrumento de avaliação e dinamização das aulas.

Já no estudo das progressões, temos outro exemplo: é possível separar a turma em equipes, ficando cada equipe responsável pela apresentação de um seminário, na forma de roteiro completo de aula (incluindo problematização inicial, exemplos, demonstrações de fórmulas, se houver, e exercícios).

Atividade em grupo

Conforme já mencionado anteriormente, as atividades em grupo podem mobilizar as três dimensões dos conteúdos: conceitual, procedimental e atitudinal. Na parte específica das Orientações Didáticas de cada volume, são propostas atividades em grupo. Quando possível, proponha atividades a partir de alguma matéria publicada em jornal, revista, internet etc. Acreditamos que o recurso de usar reportagens veiculadas na mídia pode ser bastante motivador para o estudante, especialmente nos casos de mobilizar competências ligadas a representação e comunicação, investigação e compreensão ou recontextualização sociocultural.

Veja este exemplo de atividade que pode ser proposta sobre a tabela de contribuição mensal do INSS:

A tabela de contribuição mensal é utilizada para a consulta sobre as faixas de salários e respectivas alíquotas de incidência para o cálculo da contribuição a ser paga ao INSS.

Tabela de contribuição mensal para fins de recolhimento ao INSS (vigente de 01/01 a 31/12/2015)

Salário de contribuição (R$)	Alíquota (%)
Até 1 399,12	8
De 1 399,13 até 2 331,88	9
De 2 331,89 até 4 663,75	11

Atenção: Em 2015, o valor máximo do INSS do segurado era R$ 513,01.

Fonte: <www.portaltributario.com.br/guia/tabela_inss_empregados.html>. Acesso em: 26 abr. 2016.

A tabela é o ponto de partida para várias discussões e questões, entre as quais destacamos:

1. O que é INSS?

Resp.: INSS é a sigla de Instituto Nacional do Seguro Social, um órgão governamental responsável por receber as contribuições dos trabalhadores e fazer o pagamento de aposentadorias, auxílio-doença, pensões e outros benefícios previstos por lei.

2. O que é aposentadoria? Quais as regras atuais da aposentadoria para o trabalhador?

Resp.: Aposentadoria é uma remuneração recebida pelo trabalhador após cumprir alguns requisitos. Para conhecer as regras atuais para a aposentadoria, consulte o site <www.mtps.gov.br/aposentadoria>, acesso em 24 maio 2016.

3. Qual é o valor atual mensal do teto da aposentadoria?

Resp.: O teto máximo da aposentadoria é corrigido anualmente, em 2015 era de 4 663,75 reais. Consulte o *site* <www.mtps.gov.br>, acesso em 24 maio 2016, para obter o valor atualizado.

4. Quais são os benefícios dos contribuintes do INSS?

Resp.: Os contribuintes do INSS têm direito a alguns benefícios, como aposentadoria, auxílio-doença, pensão por morte, salário-maternidade etc. Veja mais no *site* <www.mtps.gov.br/todos-os-servicos-do-inss>, acesso em 24 maio 2016.

5. Determine a contribuição ao INSS paga por um trabalhador cujo salário bruto mensal é de:

a) R$ 1 000,00 (Resp.: R$ 80,00)

b) R$ 2 200,00 (Resp.: R$ 198,00)

c) R$ 4 000,00 (Resp.: R$ 440,00)

6. O que a informação "o valor máximo do INSS do segurado é R$ 513,01", logo após a tabela, indica?

Resp.: Como $0,11 \cdot 4\,663,75 \simeq 513,01$, qualquer salário superior a R$ 4 663,01 contribui com o valor de R$ 513,01 ao INSS.

7. Qual é a lei da função que relaciona o valor mensal (**y**) pago ao INSS e o salário mensal (**x**), ambos expressos em reais?

Resp.:

$$y = \begin{cases} 0,08 \cdot x; \text{ se } 0 < x \leqslant 1\,399,12 \\ 0,09 \cdot x; \text{ se } 1\,399,13 \leqslant x \leqslant 2\,331,88 \\ 0,11 \cdot x; \text{ se } 2\,331,89 \leqslant x \leqslant 4\,663,75 \\ 513,01; \text{ se } 4\,663,76 \leqslant x \end{cases}$$

Resolução de problemas

É fundamental que seja trabalhada em aula uma grande diversidade de problemas (inclusive aqueles sem solução ou que admitem mais de uma resposta), mobilizando todas as quatro etapas desse processo, segundo G. Polya, em *A arte de resolver problemas* (1978):

- compreender o problema;
- estabelecer um plano, relacionando os dados;
- executar o plano;
- fazer um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a.

Na avaliação da resolução de problemas, é importante levar em consideração a evolução dos estudantes no processo. Para isso, é fundamental que esse tipo de avaliação esteja incorporado à prática do professor; não pode ser uma atividade esporádica. É preciso valorizar a criatividade na busca de soluções, a socialização de diferentes maneiras de resolver um problema, analisando todos os passos da resolução (e não apenas a resposta final) e incentivar e encorajar os estudantes na busca da sulução.

Textos complementares – Avaliação

Pensando em um momento de pausa, estudo, reflexão e formação para o professor, reproduzimos a seguir alguns trechos do capítulo inicial do livro *Avaliação: da excelência à regulação das aprendizagens, entre duas lógicas*, de Philippe Perrenoud.

Uma avaliação a serviço da seleção?

A avaliação é tradicionalmente associada, na escola, à criação de hierarquias de excelência. Os alunos são comparados e depois classificados em virtude de uma norma de excelência, definida no absoluto ou encarnada pelo professor e pelos melhores alunos. Na maioria das vezes, essas duas referências se misturam, com uma dominante: na elaboração das tabelas, enquanto alguns professores falam de exigências preestabelecidas, outros constroem sua tabela a posteriori*, em função da distribuição dos resultados, sem todavia chegar a dar sistematicamente a melhor nota possível ao trabalho "menos ruim".*

No decorrer do ano letivo, os trabalhos, as provas de rotina, as provas orais, a notação de trabalhos pessoais e de dossiês criam "pequenas" hierarquias de excelência, sendo que nenhuma delas é decisiva, mas sua adição e acúmulo prefiguram a hierarquia final:

– seja porque se fundamenta amplamente nos resultados obtidos ao longo do ano, quando a avaliação contínua não é acompanhada por provas padronizadas ou exames;

– seja porque a avaliação durante o ano funciona como um treinamento para o exame (Merle, 1996).

Essa antecipação desempenha um papel maior no contrato didático celebrado entre o professor e seus alunos, assim como nas relações entre a família e a escola. Como mostrou Chevallard (1986a), no que tange aos professores de matemática do secundário, as notas fazem parte de uma negociação *entre o professor e seus alunos ou, pelo menos, de um* arranjo. *Elas lhes permitem fazê-los trabalhar, conseguir sua aplicação, seu silêncio, sua concentração, sua docilidade em vista do objetivo supremo: passar de ano. A nota é uma* mensagem *que não diz de início ao aluno o que ele sabe, mas* o que pode lhe acontecer *"se continuar assim até o final do ano". Mensagem tranquilizadora para uns, inquietante para outros, que visa também aos pais, com a demanda implícita ou explícita de intervir "antes que seja tarde demais". A avaliação tem a função, quando se dirige à família, de* prevenir, *no duplo sentido de impedir e de advertir. Ela alerta contra o fracasso que se anuncia ou, ao contrário, tranquiliza, acrescentando "desde que continue assim!". Quando o jogo está quase pronto, prepara os espíritos para o pior; uma decisão de reprovação ou de não admissão em uma habilitação exigente apenas confirma, em geral, os prognósticos desfavoráveis comunicados bem antes ao aluno e à sua família.*

Assim como os pequenos mananciais formam grandes rios, as pequenas hierarquias se combinam para formar hierarquias globais, em cada disciplina escolar, depois sobre o conjunto do programa, para um trimestre, para um ano letivo e, enfim, para o conjunto de um ciclo de estudos. Referindo-se a formas e normas de excelência bem diversas, essas hierarquias têm em comum mais informar sobre a posição de um aluno em um grupo ou sobre sua distância relativa à norma de excelência do que sobre o conteúdo de seus conhecimentos e competências. Elas dizem sobretudo se o aluno é "melhor ou pior" do que seus colegas. A própria existência de uma escala a ser utilizada cria hierarquia, às *vezes a partir de pontos pouco significativos. Amigues e Zerbato-Poudou lembram esta experiência simples: dá-se um lote de trabalhos heterogêneos a serem corrigidos por um conjunto de professores; cada um estabelece uma distribuição em forma de sino, uma aproximação da famosa curva de Gauss. Retiram-se então todos os trabalhos situados na parte mediana da distribuição e dão-se os restantes a outros corretores. Poder-se-ia logicamente esperar uma distribuição bimodal. Isso não acontece, cada avaliador recria uma distribuição "normal". Obtém-se o mesmo resultado quando se conserva apenas a metade inferior ou superior de um primeiro lote. Os examinadores criam variações que se referem mais à escala e ao princípio da classificação do que às variações significativas entre os conhecimentos ou as competências de uns e outros.*

Uma hierarquia de excelência jamais é o puro e simples reflexo da "realidade" das variações. Elas existem realmente, mas a avaliação escolhe, em um momento definido, segundo critérios definidos, dar-lhe uma imagem pública*; as mesmas variações podem ser dramatizadas ou banalizadas conforme a lógica de ação em andamento, pois não se avalia por avaliar, mas para fundamentar uma decisão. Ao final do ano letivo ou do ciclo de estudos, as hierarquias de excelência escolar comandam o prosseguimento normal do curso ou, se houver seleção, a orientação para esta ou aquela habilitação. De modo mais global, ao longo de todo o curso, elas regem o que se chama de êxito ou fracasso escolares. Estabelecida de acordo com uma escala muito*

diferenciada – às vezes, apenas um décimo de ponto de diferença –, uma hierarquia de excelência se transforma facilmente em dicotomia: basta introduzir um ponto de ruptura para criar conjuntos considerados homogêneos; de um lado, aqueles que são reprovados são relegados às habilitações pré-profissionais ou entram no mercado de trabalho aos 15-16 anos; de outro, os que avançam no curso e se orientam para os estudos aprofundados.

A outra função tradicional da avaliação é certificar aquisições em relação a terceiros. Um diploma garante aos empregadores em potencial que seu portador recebeu formação, o que permite contratá-lo sem fazer com que preste novos exames. Uma forma de certificação análoga funciona também no interior de cada sistema escolar, de um ciclo de estudos ao seguinte, até mesmo entre anos escolares. Isso é menos visível, pois não existe o equivalente em um mercado de trabalho; o mercado da orientação permanece controlado pelo sistema educativo.

Uma certificação fornece poucos detalhes dos saberes e das competências adquiridos e do nível de domínio precisamente atingido em cada campo abrangido. Ela garante sobretudo que um aluno sabe globalmente "o que é necessário saber" para passar para a série seguinte no curso, ser admitido em uma habilitação ou começar uma profissão. Entre professores dos graus ou ciclos de estudos sucessivos, entre a escola e os empregadores, o nível e o conteúdo dos exames ou da avaliação são, é claro, questões recorrentes. Todavia, no âmbito do funcionamento regular do sistema, "age-se como se" aqueles que avaliam soubessem o que devem fazer e a eles é concedida uma certa confiança. A vantagem de uma certificação instituída é justamente a de não precisar ser controlada ponto por ponto, de servir de passaporte para o emprego ou para uma formação posterior.

Dentro do sistema escolar, a certificação é sobretudo um modo de regulação da divisão vertical do trabalho pedagógico. O que se certifica ao professor que recebe os alunos oriundos do nível ou do ciclo anterior é que ele poderá trabalhar como de hábito. O que isso recobre não é totalmente independente do programa e das aquisições mínimas. Isso pode variar muito de um estabelecimento para outro, em função do nível efetivo dos alunos e da atitude do corpo docente.

Em todos os casos, a avaliação não é um fim em si. É uma engrenagem no funcionamento didático e, mais globalmente, na seleção e na orientação escolares. Ela serve para controlar o trabalho dos alunos e, simultaneamente, para gerir os fluxos.

Ou a serviço das aprendizagens?

A escola conformou-se com as desigualdades de êxito por tanto tempo quanto elas pareciam "na ordem das coisas". É verdade que era importante que o ensino fosse corretamente distribuído e que os alunos trabalhassem, mas a pedagogia não pretendia nenhum milagre, ela não podia senão "revelar" a desigualdade das aptidões (Bourdieu, 1996). Dentro dessa perspectiva, uma avaliação formativa não tinha muito sentido: a escola ensinava e, se tivessem vontade e meios intelectuais, os alunos aprendiam. A escola não se sentia responsável pelas aprendizagens, limitava-se a oferecer a todos a oportunidade de aprender: cabia a cada um aproveitá-la! A noção de desigualdade das oportunidades não significou, até um período recente, nada além disto: que cada um tenha acesso ao ensino, sem entraves geográficos ou financeiros, sem inquietação com seu sexo ou sua condição de origem.

Quando Bloom, nos anos 60, defendeu uma pedagogia do domínio (1972, 1976, 1979, 1988), introduziu um postulado totalmente diferente. Pelo menos no nível da escola obrigatória, ele dizia, "todo mundo pode aprender": 80% dos alunos podem dominar 80% dos conhecimentos e das competências inscritos no programa, com a condição de organizar o ensino de maneira a individualizar o conteúdo, o ritmo e as modalidades de aprendizagem em função de objetivos claramente definidos. De imediato, a avaliação se tornava o instrumento privilegiado de uma regulação contínua das intervenções e das situações didáticas. Seu papel, na perspectiva de uma pedagogia de domínio (Huberman, 1988), não era mais criar hierarquias, mas delimitar as aquisições e os modos de raciocínio de cada aluno o suficiente para auxiliá-lo a progredir no sentido dos objetivos. Assim nasceu, senão a própria ideia de avaliação formativa desenvolvida originalmente por Scriven (1976) em relação aos programas, pelo menos sua transposição à pedagogia e às aprendizagens dos alunos.

O que há de novo nessa ideia? Não se servem todos os professores da avaliação durante o ano para ajustar o ritmo e o nível global de seu ensino? Não se conhecem muitos professores que utilizam a avaliação de modo mais individualizado, para melhor delimitar as dificuldades de certos alunos e tentar remediá-las?

Toda ação pedagógica repousa sobre uma parcela intuitiva de avaliação formativa, no sentido de que, inevitavelmente, há um mínimo de regulação em função das aprendizagens ou, ao menos, dos funcionamentos observáveis dos alunos. Para se tornar uma prática realmente nova, seria necessário, entretanto, que a avaliação formativa fosse a regra e se integrasse a um dispositivo de pedagogia diferenciada. É esse caráter metódico, instrumentado e constante que a distancia das práticas comuns. Portanto, não se poderia, sob risco de especulação, afirmar que todo professor faz constantemente avaliação formativa, ao menos não no pleno sentido do termo.

Se a avaliação formativa nada mais é do que uma maneira de regular a ação pedagógica, por que não é uma prática corrente? Quando um artesão modela um objeto, não deixa de observar o resultado para ajustar seus gestos e, se preciso for, "corrigir o alvo", expressão comum que designa uma faculdade humana universal: a arte de conduzir a ação pelo olhar, em função de seus resultados provisórios e dos obstáculos encontrados. Cada professor dispõe dela, como todo mundo. Ele se dirige, porém, a um grupo e regula sua ação em função de sua dinâmica de conjunto, do nível global e da distribuição dos resultados, mais do que das trajetórias de cada aluno. A avaliação formativa introduz

uma ruptura porque propõe deslocar essa regulação ao nível das aprendizagens e individualizá-la.

Nenhum médico se preocupa em classificar seus pacientes, do menos doente ao mais gravemente atingido. Nem mesmo pensa em lhes administrar um tratamento coletivo. Esforça-se para determinar, para cada um deles, um diagnóstico individualizado, estabelecendo uma ação terapêutica sob medida. Mutatis mutandis, *a avaliação formativa deveria ter a mesma função em uma pedagogia diferenciada. Com essa finalidade, as provas escolares tradicionais se revelam de pouca utilidade, porque são essencialmente concebidas em vista mais do desconto do que da análise dos erros, mais para a classificação dos alunos do que para a identificação do nível de domínio de cada um. "Seu erro me interessa", diria um professor que leu Astolfi (1997). Uma prova escolar clássica suscita erros deliberadamente, já que de nada serviria se todos os alunos resolvessem todos os problemas. Ela cria a famosa curva de Gauss, o que permite dar boas e más notas, criando, portanto, uma hierarquia. Uma prova desse gênero não informa muito como se operam a aprendizagem e a construção dos conhecimentos na mente de cada aluno, ela* sanciona *seus erros sem buscar os meios para* compreendê-los *e para trabalhá-los. A avaliação formativa deve, pois, forjar seus próprios instrumentos, que vão do teste criterioso, descrevendo de modo analítico um nível de aquisição ou de domínio, à observação* in loco *dos métodos de trabalho, dos procedimentos, dos processos intelectuais do aluno.*

O diagnóstico é inútil se não der lugar a uma ação apropriada. Uma verdadeira avaliação formativa é necessariamente acompanhada de uma intervenção diferenciada, *com o que isso supõe em termos de meios de ensino, de organização dos horários, de organização do grupo-aula, até mesmo de transformações radicais das estruturas escolares. As pedagogias diferenciadas estão doravante na ordem do dia e a avaliação formativa não é mais uma quimera, já que propiciou inúmeros ensaios em diversos sistemas.*

[...]

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

Para a última parte de nossa proposta de proporcionar ao professor um momento de reflexão e estudo, reproduzimos um trecho do livro *Prova: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas*, de Vasco Pedro Moretto. O autor defende a ideia de que não é a extinção da prova escrita ou oral que melhorará a aprendizagem, mas a ressignificação do método numa nova perspectiva pedagógica.

Avaliar com eficácia e eficiência

Avaliar a aprendizagem tem sido um tema angustiante para professores e estressante para alunos. Nas conversas com professores, orientadores e diretores, o assunto avaliação é sempre lembrado com um suspiro de desânimo e uma frase eloquente: "Esse é o problema! Aí está o nó!".

Muito se tem escrito e falado sobre a avaliação da aprendizagem. As dúvidas continuam, os pontos de vista se multiplicam e as experiências se diversificam. O sistema escolar gira em torno desse processo e tanto professores como alunos se organizam em função dele. Por isso a verdade apresentada é: professores e pesquisadores precisamos estudar mais, debater com profundidade e conceituar com segurança o papel da avaliação no processo da aprendizagem.

A avaliação da aprendizagem é angustiante para muitos professores por não saber como transformá-la num processo que não seja uma mera cobrança de conteúdos aprendidos "de cor", de forma mecânica e sem muito significado para o aluno. Angústia por ter que usar um instrumento tão valioso no processo educativo, como recurso de repressão, como meio de garantir que uma aula seja levada a termo com certo grau de interesse. Sentenças como 'anotem, pois vai cair na prova', 'prestem atenção nesse assunto porque semana que vem tem prova', 'se não ficarem calados vou fazer uma prova surpresa', 'já que vocês não param de falar, considero matéria dada e vai cair na prova', e outras que se equivalem, são indicadores da maneira repressiva que tem sido utilizada na avaliação da aprendizagem.

Se para o professor esse processo gera ansiedade, podemos imaginar o que representa para os alunos. 'Hora do acerto de contas', 'A hora da verdade', 'A hora de dizer ao professor o que ele quer que eu saiba', 'A hora da tortura', são algumas dentre as muitas representações em voga entre os alunos. Enquanto não há prova 'marcada' muitos alunos encontram um álibi para não estudar. E se por acaso o professor anunciar que a matéria dada não irá cair na prova... então para que estudar?, perguntarão os alunos.

Para grande parte dos pais, a prova também não cumpre seu real papel. Se a nota foi razoável ou ótima, os pais dão-se por satisfeitos, pois pressupõem que a nota traduz a aprendizagem correspondente, o que nem sempre é verdade. E os alunos sabem disso. Se a nota foi de aprovação, o aluno a apresenta como um troféu pelo qual 'deve receber a recompensa': saídas autorizadas, aumento de mesada, passeios extras etc. Lembrar que o dever foi cumprido... ah! Isso nem vem ao caso.

Diante de tal diagnóstico, a avaliação precisa ser analisada sob novos parâmetros e tem de assumir outro papel no processo da intervenção pedagógica, em consequência da redefinição dos processos de ensino e de aprendizagem.

A avaliação é parte integrante do ensino e da aprendizagem. O ensinar, um dia, já foi concebido como transmitir conhecimentos prontos e acabados, conjunto de verdades a serem recebidas pelo aluno, gravadas e devolvidas na hora da prova. Nessa visão de ensino, o aprender tem sido visto como gravar informações transcritas para um caderno (cultura cadernal) para devolvê-las da forma mais fiel possível ao professor na hora da prova. Expressões como 'o que será que o professor quer com essa questão?', 'professor, a questão sete não estava no caderno de ninguém, o senhor tem que anular', 'professora, dá para explicar o que a senhora quer com a questão 3?', 'professor, eu decorei todo o questionário que o senhor deu e na prova o senhor perguntou tudo diferente' são indicadores de que a preocupação dos alunos é satisfazer os professores, é tentar responder tudo o que o professor quer para, com isso, obter nota.

Nesta visão, que classificamos de tradicional por ainda ser, a nosso ver, a que domina o processo de ensino nos dias de hoje,

a avaliação de aprendizagem é encarada como um processo de 'toma lá dá cá', em que o aluno deve devolver ao professor o que dele recebeu e de preferência exatamente como recebeu, o que Paulo Freire chamou educação bancária. Nesse caso não cabe criatividade, nem interpretação. A relação professor-aluno vista dessa forma é identificada como uma forma de dominação, de autoritarismo do professor e de submissão do aluno, sendo por isso uma relação perniciosa na formação para a cidadania.

A perspectiva construtivista sociointeracionista propõe uma nova relação entre o professor, o aluno e o conhecimento. Ela parte do princípio de que o aluno não é um simples acumulador de informações, ou seja, um mero receptor-repetidor. Ele é o construtor do próprio conhecimento. Essa construção se dá com a mediação do professor, numa ação do aluno que estabelece a relação entre suas concepções prévias e o objeto de conhecimento proposto pela escola. Assim, fica claro que a construção do conhecimento é um processo interior do sujeito da aprendizagem, estimulado por condições exteriores criadas pelo professor. Por isso dizemos que cabe a este o papel de catalisador do processo da aprendizagem. Catalisar/mediar/facilitar são palavras que indicam o novo papel do docente no processo de interação com o aluno, como vimos em capítulos anteriores.

Prova: um momento privilegiado de estudo

Avaliar aprendizagem tem um sentido amplo. A avaliação é feita de formas diversas, com instrumentos variados, sendo o mais comum deles, em nossa cultura, a prova escrita. Por esse motivo, em lugar de apregoarmos os malefícios da prova e levantarmos a bandeira de uma avaliação sem provas, procuramos seguir o princípio: se tivermos que elaborar provas, que sejam benfeitas, atingindo seu real objetivo, que é verificar se houve aprendizagem significativa de conteúdos relevantes.

É preciso ressaltar, no entanto, que a avaliação da aprendizagem precisa ser coerente com a forma de ensinar. Se a abordagem no ensino foi dentro dos princípios da construção do conhecimento, a avaliação da aprendizagem seguirá a mesma orientação. Nessa linha de pensamento, propomos alguns princípios que sustentam nossa concepção de avaliação da aprendizagem:

- *A aprendizagem é um processo interior ao aluno, ao qual temos acesso por meio de indicadores externos.*
- *Os indicadores (palavras, gestos, figuras, textos) são interpretados pelo professor e nem sempre a interpretação corresponde fielmente ao que o aluno pensa.*
- *O conhecimento é um conjunto de relações estabelecidas entre os componentes de um universo simbólico.*
- *O conhecimento construído significativamente é estável e estruturado.*
- *O conhecimento adquirido mecanicamente é instável e isolado.*
- *A avaliação da aprendizagem é um momento privilegiado de estudo e não um acerto de contas.*

[...]

MORETTO, Vasco P. *Prova*: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 8ª ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2008.

Sugestões para o professor

Hoje, para coordenar um curso de Matemática rico e aberto, o professor precisa conhecer a Matemática além do seu programa curricular: deve ter acesso a informações sobre a história da descoberta matemática, estar sintonizado com tendências da Educação Matemática, conhecer curiosidades e divertimentos lógico-matemáticos, dispor de livros paradidáticos para aprofundamento, conhecer e usar recursos tecnológicos em sala de aula como forma de diversificar estratégias de aprendizagem etc.

Pensando nisso, tomamos a liberdade de sugerir alguns livros, revistas, recursos digitais e *sites* que podem contribuir para a melhor formação dos colegas.

Sugestões de livros para a formação continuada

- *A Matemática na arte e na vida*, de Paulo Roberto Martins Contador. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra analisa com profundidade a complexidade da proporção áurea e suas manifestações na natureza, na arquitetura, nas artes plásticas, enfim, onde há harmonia, beleza e equilíbrio.

- *Coleção do Professor de Matemática*

Trata-se da coleção IMPA/VITAE, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

A coleção oferece um excelente material de consulta, aprofundamento e pesquisa para o professor de Matemática do Ensino Médio. Os assuntos são apresentados e discutidos com elevado rigor matemático, em linguagem precisa e objetiva. Há ainda uma seção de exercícios, em vários dos quais são pedidas demonstrações.

Os seguintes títulos compõem a coleção:

- *A Matemática no Ensino Médio*, de Elon Lages Lima, Paulo César Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado. v. 1-4. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

Nos volumes de 1 a 3 são apresentados, de modo aprofundado, os principais tópicos dos programas da Matemática do Ensino Médio; no volume 4 são apresentadas as soluções de todos os exercícios propostos nos três volumes anteriores.

- *Análise combinatória e probabilidade*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho, Augusto César de Oliveira Morgado, Pedro Fernandez e João Bosco Pitombeira. 9ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

- *Construções Geométricas*, de Eduardo Wagner. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

- *Coordenadas no espaço*, de Elon Lages Lima. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

- *Coordenadas no plano com as soluções dos exercícios*, de Elon Lages Lima. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

- *Introdução à geometria espacial*, de Paulo Cezar Pinto Carvalho. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

- *Logaritmos*, de Elon Lages Lima. 5ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

- *Medida e forma em Geometria*, de Elon Lages Lima. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

- *Meu professor de Matemática e outras histórias*, de Elon Lages Lima. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

- *Progressões e Matemática Financeira*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Sheila Zani. 6ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

- *Trigonometria e Números Complexos*, de Eduardo Wagner, Augusto César de Oliveira Morgado e Manfredo Perdigão do Carmo. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

• *Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*

A coleção apresenta, em 11 volumes, um estudo detalhado e rigoroso dos eixos trabalhados no Ensino Médio: Funções, Álgebra, Números, Geometria, Estatística, contagem e probabilidade, além de Matemática Financeira e Introdução ao Cálculo.

Nos livros, encontramos uma grande variedade e quantidade de exercícios, podendo servir de referencial teórico e prático para o professor do Ensino Médio. Os seguintes livros compõem a coleção:

- *Conjuntos*, *Funções*, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami. 9ª ed. v. 1. São Paulo: Atual, 2013.

Aborda os conjuntos numéricos, a noção de função e o estudo de algumas das funções elementares.

- *Logaritmos*, de Osvaldo Dolce, Gelson Iezzi e Carlos Murakami. 9ª ed. v. 2. São Paulo: Atual, 2013.

Sintetiza o assunto potências e o estudo das funções exponencial e logarítmica.

- *Trigonometria*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 3. São Paulo: Atual, 2013.

Estudo completo das funções circulares, das relações entre elas, das transformações, das equações e inequações trigonométricas, das funções circulares inversas e da trigonometria nos triângulos.

- *Sequências, matrizes, determinantes, sistemas*, de Gelson Iezzi e Samuel Hazzan. 9ª ed. v. 4. São Paulo: Atual, 2013.

Trata do estudo de progressões, de matrizes, de determinantes e de sistemas lineares.

- *Combinatória, probabilidade*, de Samuel Hazzan. 9ª ed. v. 5. São Paulo: Atual, 2013.

Estuda problemas de contagem e o binômio de Newton e faz um estudo completo sobre probabilidades.

- *Complexos, polinômios, equações*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 6. São Paulo: Atual, 2013.

São estudados os números complexos, os polinômios e as equações polinomiais.

- *Geometria analítica*, de Gelson Iezzi. 9ª ed. v. 7. São Paulo: Atual, 2013.

Aborda o estudo analítico das retas, das circunferências e das cônicas.

- *Limites, derivadas, noções de integral*, de Gelson Iezzi, Carlos Murakami e Nilson José Machado. 9ª ed. v. 8. São Paulo: Atual, 2013.

Uma abordagem simplificada de limites, de derivadas e funções de uma variável, das aplicações de derivadas e de uma introdução à noção de integral definida.

- *Geometria Plana*, de Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo. 9ª ed. v. 9. São Paulo: Atual, 2013.

Trata, com rigor, detalhes e profundidade, da Geometria Plana usualmente trabalhada no Ensino Fundamental.

- *Geometria Espacial*, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo. 9ª ed. v. 10. São Paulo: Atual, 2013.

Faz um estudo completo e axiomático da Geometria de Posição Espacial. Na Geometria Métrica são estudados poliedros, corpos redondos, inscrição e circunscrição de sólidos.

- *Matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva*, de Gelson Iezzi, Samuel Hazzan e David M. Degenszajn. 9ª ed. v. 11. São Paulo: Atual, 2013.

No livro são estudadas matemática comercial e financeira, além da estatística descritiva.

• *Fundamentos da Aritmética*, de Hygino H. Domingues. 1ª ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2009.

Podemos encontrar na obra a origem da ideia de número, os primeiros sistemas de numeração, o conceito de congruência, representação decimal dos racionais e irracionais e o corpo dos números complexos. A obra contempla elementos da história da Matemática.

• *Introdução à lógica*, de Cezar A. Mortari. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

O livro aborda inferência, dedução, indução e outras conceituações e mostra a diferença entre a lógica clássica e a não clássica.

• *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática*, de John A. Fossa. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O autor convida o leitor a "mergulhar" no caminho das argumentações em Matemática.

• *Os elementos de Euclides*, traduzido por Irineu Bicudo. 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

Trata-se da primeira tradução completa para a Língua Portuguesa a partir do texto grego. A obra da Antiguidade Clássica contém definições, postulados, demonstrações de 465 proposições em forte sequência lógico-dedutiva, referentes à Geometria Plana e Espacial. Há também capítulos destinados à teoria dos números.

• *Probabilidade*: um curso moderno com aplicações, de Sheldon Ross. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Uma obra completa e aprofundada sobre probabilidade, com grande variedade de exercícios.

• *Uma história da simetria em Matemática*, de Ian Stewart. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

O autor conta como uma sucessão de matemáticos e físicos, à procura de soluções para equações algébricas, acabou por construir o conceito de simetria, que revolucionou nossa visão sobre o Universo.

- *Vetores e uma iniciação à Geometria Analítica*, de Dorival A. Mello, Renate G. Watanabe. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

A obra contempla o estudo de vetores, dependência linear e bases, produto escalar e vetorial, sistemas de coordenadas no espaço, estudo do plano, superfície esférica e um apêndice sobre cônicas.

História da Matemática

- *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática, de Gilberto G. Garbi. 5ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra faz um relato da construção do conhecimento matemático em quatro milênios, destacando a vida e as contribuições de grandes matemáticos, a matemática contemporânea e as mulheres da Matemática.

- *Cinema e História da Matemática*: entrelaços possíveis, de Romélia Mara Alves Souto. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

A autora discute relações possíveis entre o cinema e a História da Matemática, considerando que tais relações podem construir um ambiente favorável à aprendizagem e ao desenvolvimento da criatividade de quem considera o cinema um agente de ideias plurais sobre História, Educação e Matemática.

- *Coleção História da Matemática para professores*

Com seus dois primeiros livros lançados em 2009, a coleção visa à divulgação e ao uso das produções acadêmicas provenientes de estudos e pesquisa na História da Matemática, agrupados nos seguintes tópicos: história dos problemas e conceitos matemáticos; história das relações entre Matemática, Ciências Naturais e Técnicas; biografias de matemáticos e educadores matemáticos; análise de fontes literárias.

A seguir, destacamos duas obras dessa coleção:

- *A descoberta do teorema de Pitágoras*, de Sofia Cardoso Marques. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

Neste livro, a autora descreve o resultado e as aplicações desse teorema em algumas civilizações antigas, contextualizando-o na cultura e nos conhecimentos dessas civilizações.

- *Matemática e medida*: três momentos históricos, de John A. Fossa (Org.). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro contém aspectos histórico-epistemológicos importantes para o desenvolvimento de alguns conceitos em Matemática, como Medidas.

- *Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*

Esta coleção procura dar ao leitor uma visão abrangente da história da descoberta da Matemática. Está dividida em seis volumes, entre os quais destacamos:

- *Números e numerais*, de Bernard H. Gundlach. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

- *Geometria*, de Howard Eves. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

- *Trigonometria*, de Edward S. Kennedy. 1ª ed. São Paulo: Atual, 1992.

Em cada volume é abordada a história da criação e desenvolvimento de um grande tema matemático. O volume é dividido em tópicos bastante curtos (de no máximo oito páginas), denominados cápsulas, nos quais é abordado algum assunto ligado ao tema. Assim, por exemplo, no volume sobre Geometria, existe uma cápsula contendo várias demonstrações do teorema de Pitágoras.

- *História concisa das matemáticas*, de Dirk J. Struik. 3ª ed. Lisboa: Gradiva, 1997.

Na obra, o autor, além de narrar fatos, datas e passagens da vida de matemáticos, procura relacionar o trabalho de cada um deles, relatando descobertas que aconteciam, concomitantemente, em lugares diferentes, privilegiando o caráter cultural da produção do conhecimento em Matemática.

- *História da Matemática em atividades didáticas*, de Arlete de Jesus Brito, Antonio Miguel e Dione Lucchesi de Carvalho. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

A obra tem como eixo principal o ensino da Matemática nos campos de Geometria, Trigonometria e números irracionais por meio de atividades nas quais a História da Matemática exerce um papel central, mostrando que ela pode ser uma grande aliada na reinvenção de uma didática em que o estudante assume uma postura mais ativa na produção de conhecimento.

- *História da Matemática*, de Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

Uma das obras mais consagradas, sendo referência para professores, estudantes de graduação e pós-graduação em Matemática. Nesta nova edição, destacamos dois novos capítulos: Legados do Século Vinte e Tendências Recentes, que discorrem, entre outros assuntos, sobre o Último Teorema de Fermat.

- *História da Matemática*, de Howard Eves. 1ª ed. Campinas: Unicamp, 2004.

Uma das mais completas obras na área de História da Matemática. Na introdução de alguns capítulos, encontramos um relato do panorama cultural e histórico da época em questão.

- *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, de Tatiana Roque. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

A autora lança um olhar crítico sobre como a História da Matemática vem sendo abordada nos últimos tempos, pretendendo derrubar a ideia de que a matemática é essencialmente abstrata e com uma estrutura rígida. A obra aborda diferentes "sistemas matemáticos", desenvolvidos desde a Antiguidade até o século XIX, mostrando que práticas diversas sempre coexistiram, procurando soluções diferentes para problemas semelhantes.

- *História em Educação Matemática*: propostas e desafios, de Antônio Miguel e Maria Ângela Miorim. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

A obra aborda a história da Matemática, a história da Educação Matemática e de que maneira elas se relacionam. O próprio conceito de história é discutido na obra.

- *Matemática*: uma breve história, de Paulo Roberto Martins Contador. 4ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

A obra está organizada em três volumes: o volume I tem início nas descobertas mais primitivas do conhecimento humano, dos primórdios das civilizações à idade medieval; o volume II vai do Renascimento ao século XVIII; e o volume III aborda, de forma teórica atual, tudo o que foi visto nos dois primeiros volumes.

- *O último teorema de Fermat*, de Simon Singh. 1ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

O livro conta a história da busca épica para resolver um dos maiores enigmas da Matemática de todos os tempos.

- *Relatos de memórias* — A trajetória histórica de 25 anos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, de Nancy Campus Muniz. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

A obra visa à recuperação, preservação e difusão da trajetória da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Ensino e aprendizagem em Matemática e Educação Matemática

- *A arte de resolver problemas*, de George Polya. 2ª ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

O livro analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as quatro etapas básicas de uma resolução e sugere estratégias a serem desenvolvidas em sala de aula.

- *A resolução de problemas na Matemática Escolar*, de Stephen Krulik e Robert E. Reys, traduzido por Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Editora Atual, 1998.

A obra reúne 22 artigos do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) que poderão ajudar o professor a lidar com a resolução de problemas.

- Coleção Explorando o Ensino – Matemática. Disponível no *site* do MEC em: <portal.mec.gov.br/secretaria-de-educacao-basica/destaques?id=12583:ensino-medio>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Trata-se de uma coletânea de artigos extraídos da *Revista do Professor de Matemática* (RPM), uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) com o apoio da Universidade de São Paulo.

Na obra são apresentadas sugestões de abordagens contextualizadas, o uso de material concreto e uma grande variedade de situações cotidianas em que a Matemática se faz presente. Há artigos envolvendo a História da Matemática, Números, Geometria, Álgebra, ensino e crônicas. O professor tem a oportunidade de enriquecer as discussões em sala de aula, envolvendo e mobilizando os estudantes nas atividades de resolução de problemas.

São três volumes envolvendo assuntos geralmente abordados no Ensino Fundamental e Médio: volume 1 (dividido em 6 capítulos), volume 2 (dividido em 4 partes) e volume 3 (dividido em 6 capítulos).

- *Coleção Tendências em Educação Matemática*

A coleção é voltada para profissionais da área que buscam refletir sobre Educação Matemática, a qual está embasada no princípio de que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões. A coleção explora ainda tópicos do programa de Matemática que se transformam em novas tendências no Ensino Médio. O conselho editorial da coleção é formado por professores pesquisadores da Unesp e da UFMG e o coordenador da coleção é Marcelo de Carvalho Borba. Até o início de 2016, a coleção contava com quase 30 obras, entre as quais destacamos:

- *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos, de Helena Noronha Cury. 2ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

A autora defende a ideia de que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e também uma possibilidade metodológica, se os estudantes forem levados a refletir e questionar as próprias soluções.

- *Informática e Educação Matemática*, de Marcelo de Carvalho Borba e Miriam Godoy Penteado. 5ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2007.

Na obra, são apresentados exemplos de uso da informática com estudantes e professores através dos quais debatem-se temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa e outras questões epistemológicas e pedagógicas.

- *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*, de Vanessa Sena Tomaz e Maria Manuela Martins Soares David. 1ª ed. Belo Horizonte, Autêntica, 2008.

Pensando em uma formação integral dos estudantes, os autores ressaltam a importância de tratar o Ensino da Matemática levando em conta contextos sociais e a visão interdisciplinar da relação ensino-aprendizagem.

- *Didática da resolução de problemas de Matemática*, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2005.

O livro mostra os objetivos, as etapas e o encaminhamento da resolução de problemas e apresenta os vários tipos de problemas existentes. A obra sugere ainda como propor enunciados e como conduzir os problemas em sala.

- *Educação em Ciências e Matemáticas*: debates contemporâneos sobre ensino e formação de professores, de Terezinha Valim Oliver Gonçalves, Francisco Cristiano da S. Macêdo e Fábio Lustosa Souza. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

Na obra, são apresentados e analisados resultados de pesquisa sobre a prática docente, abordagens metodológicas e formação de professores. O livro traz também textos que discutem a relação entre ciência, tecnologia e sociedade e os desafios da Educação Matemática (e científica) nas instituições de ensino no século XXI.

- *Educação Matemática*: da teoria à prática, de Ubiratan D'Ambrosio. 23ª ed. Campinas: Papirus, 2014.

O autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre o ensino de Matemática.

- *Educação Matemática*: pesquisa em movimento. Maria Aparecida Viggiani Bicudo e Marcelo de Carvalho Borba (Orgs.). 4ª ed. São Paulo: Cortez, 2012.

Esse livro é fruto dos trabalhos de investigação na área da Educação Matemática desenvolvidos por professores pesquisadores do programa de pós-graduação em Educação Matemática da Unesp, do campus de Rio Claro-SP. Divide-se em 16 capítulos, escritos por vários professores, que expõem suas ideias, dúvidas, questionamentos e relatos de experiências na área. São destaques do texto a diversidade de pensamento e da produção matemática

em uma série de contextos socioculturais, a compreensão dessa produção e seu efeito na ação de ensinar.

Em particular, no capítulo *Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas*, encontramos um levantamento histórico das reformas do ensino da Matemática no mundo e no Brasil e uma reflexão sobre ensinar Matemática por meio da resolução de problemas.

- *Educação Matemática*: uma (nova) introdução, organizado por Silvia Dias Alcântara Machado. 3ª ed. São Paulo: Educ, 2008.

Na obra, são mencionadas oito noções que introduzem o leitor no discurso pedagógico da Matemática.

- *Educar por competências*: o que há de novo?, de José Gimeno Sacristán e outros. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2011.

Elaborada por educadores espanhóis e traduzida para o português, a obra apresenta discussões sobre a educação por competências, incluindo um capítulo destinado à avaliação de aprendizagens em um ensino centrado em competências

- *Elementos de didática da Matemática*, de Bruno D'Amore. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

A obra analisa várias abordagens da Educação Matemática e as principais propostas do pesquisador para a didática da Matemática.

- *Ensaios sobre a Educação Matemática*, de John A. Fossa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

A obra traz vários capítulos ligados ao tema, entre os quais destacamos o uso da História da Matemática como um instrumento pedagógico.

- *Ensinando Matemática para adolescentes*, de Paul Chambers e Robert Timlin. 2ª ed. Porto Alegre: Penso, 2015.

A obra traz sugestões de uso de recursos, planos de aula e discute como avaliar o progresso do estudante de maneira efetiva.

- *Etnomatemática:* elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrosio. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

Esta obra apresenta e discute a etnomatemática – teoria que concebe o ensino de Matemática levando em conta a realidade sociocultural do estudante, o ambiente em que vive e o conhecimento que traz de casa.

- *Fundamentos da didática da Matemática*, de Saddo Ag Almouloud. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

Na obra, são analisados os fenômenos de ensino e de aprendizagem em Matemática num ambiente didático: um meio social concebido para o ensino.

- *Investigações matemáticas na sala de aula*, de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

Nesta obra, os autores portugueses propõem uma reflexão sobre atividades de investigação em Matemática, suas vantagens e dificuldades. Levantar conjecturas, refletir e formalizar conhecimentos são aspectos discutidos pelos autores, bem como os papéis de estudantes e professores em sala de aula.

- *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem, de Iran Abreu Mendes. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

A obra aborda de maneira direta e profunda a tendência metodológica de investigação no ensino de Matemática, "tecendo redes cognitivas na aprendizagem".

- *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua, de Nilson José Machado. 6ª ed. São Paulo: Cortez, 2011.

Na obra é feita uma análise detalhada sobre a mediação da língua materna (a primeira que aprendemos) no ensino da Matemática, determinando, entre elas, uma relação de impregnação mútua, ao considerar os pontos comuns entre as funções que desempenham e também os pontos complementares nos objetivos que elas perseguem. Em particular, o autor exemplifica essa relação por meio da estruturação no estudo da Geometria.

- *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas, de Antoni Vila e Maria Luz Callejo. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2006.

Por meio de reflexões e relatos de práticas, o livro busca respostas a questões do tipo "Em que consiste realmente o saber resolver problemas?" ou "O que são crenças?".

- *Matemática*. Práticas pedagógicas para o Ensino Médio, de Estela Kaufman Fainguelernt e Katia Regina Ashton Nunes. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

Os autores buscam incentivar o professor a procurar novas ideias para uso em sala de aula que o incentivem e também motivem os estudantes para a aprendizagem em Matemática no Ensino Médio.

- *Modelagem em Educação Matemática*, de João Frederico da Costa de Azevedo Meyer, Ademir Donizeti Caldeira e Ana Paula dos Santos Malheiros. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

O livro leva o leitor a refletir sobre aspectos da modelagem e suas relações com a Educação Matemática, destacando que, nesses processos, o estudante ocupa lugar central na escolha de seu currículo.

- *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira*: pesquisas e práticas educacionais, de Jonei Cerqueira Barbosa, Ademir Donizeti Caldeira e Jussara de Loiola Araújo. 1ª ed. Recife: SBEM, 2007.

A obra, escrita por 23 nomes de destaque no assunto, está dividida em 4 partes: aspectos teóricos da modelagem matemática; modelagem e prática de sala de aula; modelagem matemática e as tecnologias da informação e comunicação; modelagem matemática e formação de professores.

- *O Ensino da Matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas, de J. C. Sánchez Huete e J. A. Fernández Bravo. Porto Alegre: Penso, 2005.

O livro traz uma reflexão sobre diversos aspectos do ensino e da aprendizagem em Matemática. Alguns capítulos do livro têm relação direta com o sistema educacional espanhol. No entanto, na segunda metade do livro há um tratamento interessante dado à resolução de problemas e à construção do conhecimento em Matemática, incluindo uma explanação sobre os vários pontos de vista para a definição de um problema em Matemática, sob a ótica de diversos educadores e também dos estudantes.

- *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas, de Maria Aparecida Viggiani Bicudo (Org.). 1ª ed. São Paulo: Editora Unesp, 1999.

O livro resulta, basicamente, dos trabalhos de reflexão e pesquisa em Educação Matemática do grupo da Unesp de Rio Claro-SP. Ele está dividido em cinco partes, a saber: Filosofia e Epistemologia na Educação Matemática; História da Matemática e Educação Matemática; Ensino e Aprendizagem na Educação Matemática; Formação de professores de Matemática; e Informática na Educação Matemática.

- *Práticas de modelagem matemática na Educação Matemática*, de Lourdes Maria Werle de Almeida, Jussara de Loiola Araújo e Eleni Bisognin. 1ª ed. Londrina: EDUEL, 2011.

As autoras descrevem experiências em sala de aula e resultados de pesquisas com modelagem matemática, destacando possibilidades de trabalho e convidando o leitor a repensar e construir novos significados para o ensino e a aprendizagem.

- *Tecnologias digitais e Educação Matemática*, de Marcelo C. Borba e Aparecida Chiari (Orgs.). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

Ligados ao Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), os autores exploram a importância e o potencial das tecnologias digitais para educação e aprendizagens em Matemática.

Avaliação

- *A avaliação da aprendizagem escolar*, de Celso Antunes. 10ª ed. Petrópolis: Vozes, 2012. (Coleção Na Sala de Aula)

A obra apresenta sugestões de práticas, expondo princípios e discutindo estratégias e modelos avaliativos.

- *As competências para ensinar no século XXI*: a formação de professores e o desafio da avaliação, de Philippe Perrenoud e Monica Gather Thurler. 1ª ed. São Paulo: Penso, 2002.

O livro traz ao leitor os textos nos quais os autores suíços Perrenoud e Thurler apoiaram suas falas na vinda ao Brasil, em 2001, em conferências que contavam com a participação dos educadores brasileiros Lino de Macedo, Nilson José Machado e Cristina D. Allessandrini.

- *Avaliação como apoio à aprendizagem*, de Margarita Ballester et al. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2003. (Coleção Inovação Pedagógica)

Nesse texto é possível encontrar reflexões e propostas sobre temas de avaliação para o professor recriar seu cotidiano pedagógico.

- *Avaliação das aprendizagens*: sua relação com o papel social da escola, de Claudia de Oliveira Fernandes. 1ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2014.

Na obra, a autora defende a ideia de que os processos atuais avaliativos nas escolas brasileiras são, em geral, baseados em concepções quantitativas de conhecimento e não diferem, essencialmente, de práticas "antigas". Nesse sentido, ela propõe outro olhar à avaliação, desafiando os docentes a abandonar o "velho conhecido".

- *Avaliação de aprendizagem na escola*: estudos e proposições, de Cipriano Carlos Luckesi. 22ª ed. São Paulo: Editora Cortez, 2011.

A obra é constituída por alguns artigos escritos pelo autor, que posicionam a avaliação como um ato seletivo e inclusivo, que possibilita questionar ações passadas e gerar ações futuras.

- *Avaliação desmistificada*, de Charles Hadji. 1ª ed. Porto Alegre: Artmed, 2001.

A obra é uma detalhada reflexão sobre a essência da avaliação, a qual, segundo o autor, está dividida em duas partes: compreender e agir.

- *Avaliação em Matemática*: história e perspectivas atuais, de Wagner Rodrigues Valente. 1ª ed. Campinas: Papirus, 2015.

A obra aborda a cultura das práticas avaliativas, os formadores dos professores de Matemática e suas práticas, a história escolar da avaliação, entre outros.

- *Avaliação em Matemática:* pontos de vista dos sujeitos envolvidos na Educação Básica, de César Augusto do Prado Moraes. 1ª ed. Jundiaí: Paco, 2012.

O livro investiga as concepções de avaliação em Matemática na Educação Básica, analisando também os processos avaliativos usados pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e pelo Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp).

- *Avaliação escolar*: vários enfoques e uma só finalidade, melhorar a aprendizagem, de Adriana Patrício Delgado et al. 1ª ed. Jundiaí: Paco, 2015.

O livro busca trazer parte da produção acadêmica sobre avaliação, contribuindo para a formação docente.

- *Avaliação*: novos tempos, novas práticas, de Edmar Henrique Rabelo. 7ª ed. Petrópolis: Vozes, 2007.

O livro discute as profundas transformações no sistema educacional e seus impactos sobre a avaliação.

- *Avaliar para conhecer, examinar para excluir*, de Juan Manuel Álvarez Méndez. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2002. (Coleção Inovação Pedagógica)

No texto, o autor destaca a importância da avaliação nos processos de aprendizagem, desde que colocada a serviço do conhecimento. Caso a avaliação seja limitada à prova, ela pode atuar como um instrumento de exclusão.

- *Educação*: competência e qualidade, de Nilson José Machado. 2ª ed. São Paulo: Escrituras, 2010. (Coleção Ensaios Transversais)

O autor convida a uma reflexão sobre a formação na Educação Básica, o significado da qualidade no terreno educacional e as competências a serem desenvolvidas.

Recursos educacionais digitais

O portal principal da coleção M^3 Matemática Multimídia, disponível em <m3.ime.unicamp.br> (Acesso em: 21 mar. 2016), contém recursos educacionais em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp. Os recursos podem ser buscados pelas mídias: experimentos, vídeos, *softwares* ou áudios; ou pelos temas centrais: análise de dados e probabilidade, geometria e medidas ou números e funções. Vamos conhecer um pouco mais dessas mídias:

Experimentos: São atividades práticas e instigantes em que se constrói algum conceito. Esses experimentos contam com um roteiro metodológico para o professor, uma folha de acompanhamento para os estudantes, entre outros. Destacamos três experimentos para exemplificação:

- *A altura da árvore*, que introduz, experimentalmente, o conceito de tangente de um ângulo agudo no triângulo retângulo, além de propor atividades práticas para medir ângulos e determinar a altura de objetos.

- *Baralhos e torradas*, experimento no qual são apresentados dois jogos envolvendo o conceito de probabilidade condicional. Os estudantes deverão tomar decisões nesse contexto.

- *Escoamento de areia*, que trata de razões e proporcionalidade.

Vídeos: Há uma grande variedade de vídeos que duram, em média, dez minutos cada e que podem ser utilizados como um recurso metodológico diferenciado na sala de aula. Os vídeos abordam assuntos estudados no Ensino Médio por meio de situações, ficções e contextualizações. Os vídeos são ricos em representações gráficas que dão suporte ao conteúdo. Além disso, neles são mostrados pequenos documentários que trazem informações interdisciplinares. Alguns vídeos deixam, propositadamente, algumas questões em aberto para o espectador refletir.

Cada vídeo é acompanhado do guia do professor. Na obra, são sugeridos vários desses vídeos para o estudante.

Destacamos a seguir alguns desses vídeos:

- *De malas prontas*: uma passageira está prestes a embarcar e não consegue colocar todas as roupas na mala. Um funcionário da companhia aérea vai ajudá-la usando o princípio fundamental da contagem.

- *Alice e a lei dos cossenos*: narra o sonho da jovem Alice sobre a demonstração da lei dos cossenos (é apresentada uma demonstração diferente da que aparece nesta coleção).

- *Salvador, o hipocondríaco*: ao ler a bula de um medicamento, o personagem Salvador depara com conceitos importantes ligados à função exponencial, como o de meia-vida.

Em geral, os vídeos apresentam uma linguagem informal e compatível com a faixa etária dos estudantes de Ensino Médio, podendo ser usados em vários contextos:

- como introdução de um assunto (ou atividade) que será apresentado na sequência: por exemplo, o vídeo *A Cartomante* pode servir de motivador para o estudo dos agrupamentos em Análise Combinatória. Já o vídeo *A loira do banheiro* envolve ideias de criptografia e pode ser apresentado antes da *atividade 3: Matrizes*, que o professor encontra nos comentários específicos do volume 2.

- como complemento de conteúdos: o vídeo *Lembranças de Sofia*, em que se discutem o planejamento de um experimento e a amostragem em Estatística.

- como objeto da História da Matemática: um exemplo é o vídeo *Esse tal de Bhaskara*, que apresenta a trajetória histórica dos processos de resolução de equações do 2º grau.

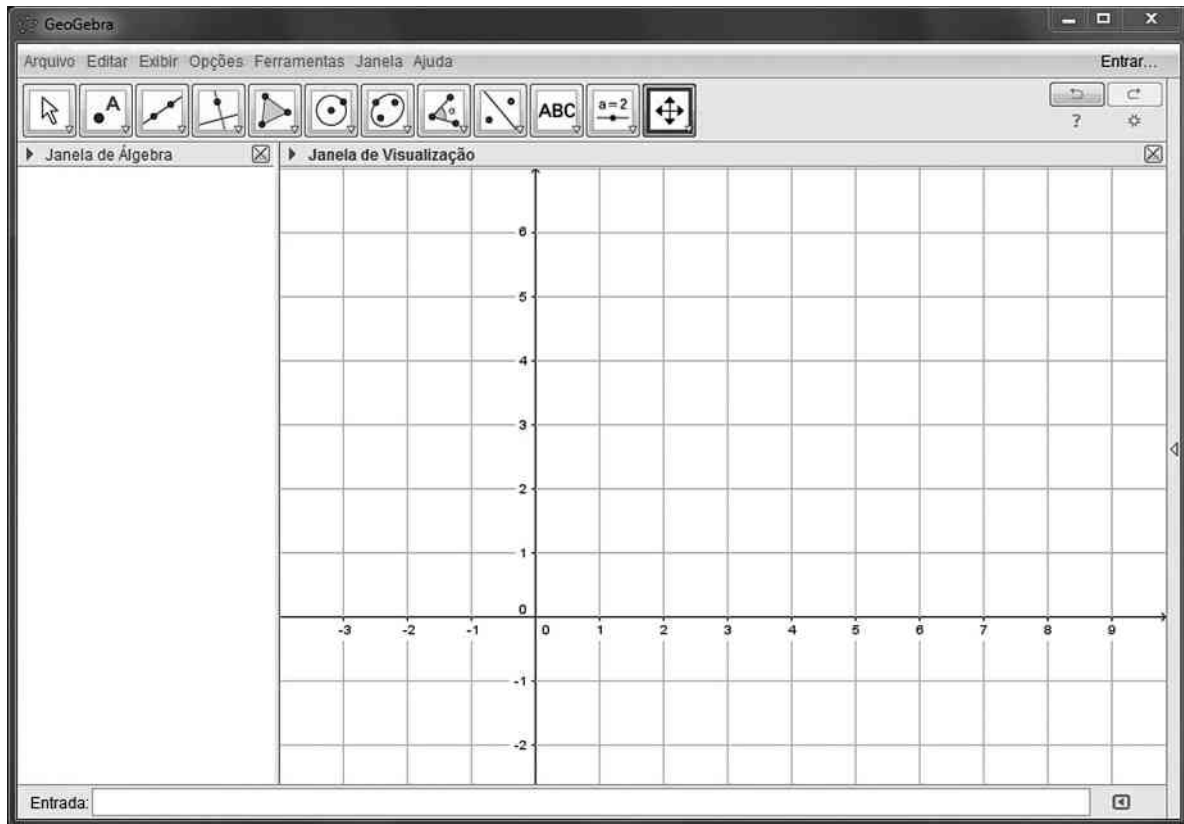
- como instrumento de avaliação, em que o professor encontra nos arquivos (pacote completo) sugestões de atividades que podem ser aplicadas antes ou depois da exibição dos vídeos.

Sugestões de *softwares* de Matemática

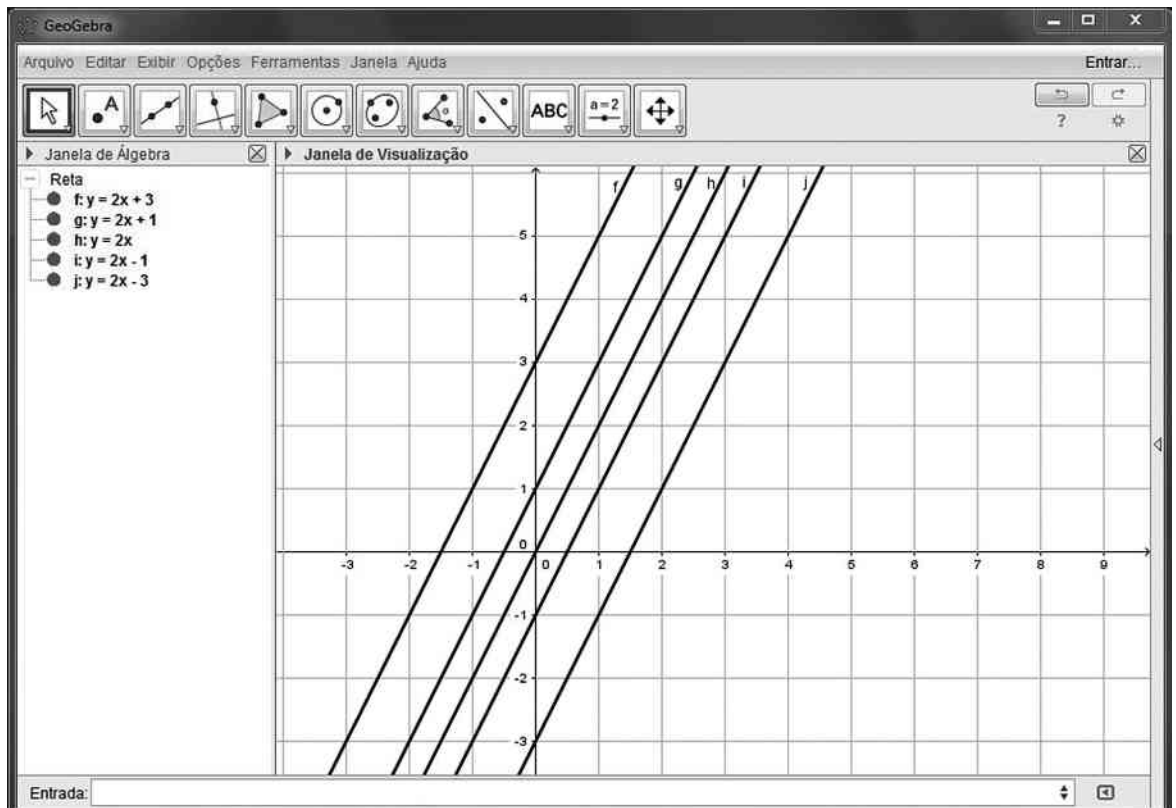
Destacamos a seguir três *softwares* gratuitos que podem ajudar o professor a dinamizar e diversificar as suas estratégias em sala de aula. Dois deles foram utilizados na coleção: o GeoGebra, no estudo de funções nos volumes 1 e 2 e no traçado de cônicas, no volume 3, e o Graphmática, no estudo das funções polinomiais no volume 3.

GeoGebra

Este *software* pode ser utilizado no trabalho com funções, geometria plana e analítica. Está disponível para instalação em: <www.geogebra.org/download>. Acesso em: 21 maio 2016.

No estudo das funções, por exemplo, o traçado dos gráficos das funções elementares (afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica etc.) pode ser facilmente executado, a partir da janela "entrada", como mostra a reprodução da tela a seguir. Basta digitar a lei da função (por exemplo, $y = 3x + 1$ na função afim; y = x^2, em que a tecla ^ é usada para potenciação, representando a função $y = x^2$; y = abs(x), para a função modular $y = |x|$ e assim por diante).

GEOGEBRA

Uma atividade que propomos, por meio do GeoGebra, é a elaboração de gráficos de várias funções a partir de uma delas. Por exemplo, a partir da função y = 2x, podemos construir os gráficos das funções y = 2x + k, com k ∈ ℝ. Podemos visualizar os gráficos gerados a partir de alguns valores de **k**.

GEOGEBRA

Além de visualizar a translação vertical, cria-se espaço para a compreensão dos coeficientes (angular e linear) das retas obtidas.

- Ao perceberem que as retas do feixe $y = 2x + k$ são paralelas, fica estabelecido que o coeficiente angular dessas retas mantém-se constante e determina a inclinação comum a todas essas retas.
- Ao perceberem que a reta de equação $y = 2x + k$ intersecta o eixo das ordenadas em (0, k), fica estabelecido o papel do coeficiente linear (**k**).

Várias outras possibilidades de trabalho com funções podem ser realizadas com o GeoGebra. Citamos alguns exemplos:

- a construção do gráfico da função exponencial e de sua inversa (a função logarítmica) no mesmo plano cartesiano permite reconhecer a simetria existente entre esses gráficos em relação à reta $y = x$;
- a construção do gráfico da função definida por $y = x^2$ e $y = x^2 + k$, com $k \in \mathbb{R}$; a construção dos gráficos da "família" de parábolas do tipo $y = ax^2$, com $a \neq 0$;
- a construção do gráfico de funções modulares, com translação vertical ($y = |x| + k$, a partir do gráfico de $y = |x|$) e horizontal ($y = |x + k|$, a partir do gráfico de $y = |x|$). Lembre que deve ser usado abs(x) para indicar o módulo de **x**;
- a construção do gráfico de funções exponenciais do tipo $y = a^x + k$ ($0 < a$, $a \neq 1$ e $k \in \mathbb{R}$).

Na Geometria Analítica, destacam-se possibilidades de trabalho com o plano cartesiano, distâncias, perímetro e área de polígonos, pontos notáveis do triângulo, paralelismo e perpendicularidade.

No livro *Aprendendo Matemática com o GeoGebra*, de Jorge Cássio Costa Nóbriga e Luís Cláudio Lopes de Araújo (Brasília: Exato, 2010), encontramos várias propostas de utilização do GeoGebra, em linguagem simples e direta.

Winplot

É um programa usado para elaborar gráficos de funções, definidas em certo intervalo a partir de suas leis. Seu funcionamento é relativamente simples; há opções de ajuda em todas as partes. Este *software* está disponível para instalação em: <math.exeter.edu/rparris/peanut/wppr32z.exe>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Sugerimos usá-lo na construção de gráficos de funções usualmente estudadas no Ensino Médio: função afim, quadrática, modular (esse *software* usa abs(x) para representar o módulo de **x**), exponencial, logarítmica e as funções trigonométricas (o número real π deve ser digitado como "pi").

Graphmática

Similar ao Winplot, este *software* possui uma tabela de pontos (x, y) que é automaticamente preenchida à medida que é colocada a lei da função $y = f(x)$ cujo gráfico se pretende construir. Este *software* está disponível para instalação em: <www.graphmatica.com/>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Sugestões de revistas

- *Educação Matemática em revista*

É uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) que aborda assuntos de interesse para o professor e pesquisador de Matemática. Até o final de 2015 já haviam sido publicadas 47 revistas. Para os interessados, é possível conseguir mais informações no *site* <www.sbembrasil.org.br>. Acesso em: 21 mar. 2016.

- Revista *Carta na Escola*

Lançada em 2006, a revista é uma publicação dirigida a educadores do Ensino Médio. São artigos, reportagens e sugestões de temas para discussões em sala de aula. Embora não exista uma seção específica para a Matemática em cada exemplar, é possível extrair boas ideias para a sala de aula. Acessando o *site* <www.cartaeducacao.com.br> (acesso em: 21 mar. 2016), pode-se conhecer um pouco mais da revista, em sua versão *on-line*.

- *Revista do Professor de Matemática* (RPM)

É uma publicação destinada àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Encontramos relatos de experiências em sala de aula, problemas que suscitam questões pouco conhecidas, uma nova abordagem de um assunto, entre outros. Além dos artigos há as seções: Problemas, O leitor pergunta, Livros, Cartas do leitor e Painéis.

Até o início de 2016, já haviam sido publicadas quase 90 revistas. No *site* <www.rpm.org.br>, o leitor encontrará informações mais detalhadas.

- Revista *Nova Escola*

A revista auxilia o educador na complexa tarefa de ensinar. Há reflexões e artigos sobre temas atuais de educação, bem como propostas e relatos de atividades em sala de aula. No *site* <revistaescola.abril.com.br> (acesso em: 21 mar. 2016), é possível conhecer um pouco mais sobre a revista, incluindo os planos de aula de Matemática para alunos do Ensino Médio, blogues, vídeos, jogos etc.

- *Revista Pátio* – Ensino Médio, Profissional e Tecnológico

Essa revista tem periodicidade trimestral e faz parte dos periódicos publicados pelo Grupo A. Nela são discutidos temas variados e atuais em Educação, incluindo temas diversificados com enfoque interdisciplinar. Para mais informações, acesse <www.grupoa.com.br/revista-patio>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Sugestões de *sites*

- *Associação de Professores de Matemática (Portugal)*

Disponível em: <www.apm.pt>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* da Associação de Professores de Matemática de Portugal. Há textos para reflexão, propostas de atividades, recursos educativos, que direcionam a atividades variadas em Matemática e *softwares* para *download*, publicações etc.

- *Banco Internacional de Objetos Educacionais*

Disponível em: <objetoseducacionais2.mec.gov.br>. Acesso em: 22 abr. 2016.

Site do Banco Internacional de Objetos Educacionais, com quase 20 000 objetos (recursos digitais) em vários formatos de arquivo e de acesso público. Há diversas opções de recursos, como animação/simulação, áudio, hipertexto, imagem, *softwares* educacionais ou vídeos. Esses objetos podem ser acessados isoladamente na seção Modalidade de Ensino, ou por meio das seções a seguir: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Educação Profissional e Educação Superior.

- *Educação Matemática e Tecnologia Informática* (Instituto de Matemática – UFRGS)

Disponível em: <turing.mat.ufrgs.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

O *site* Educação Matemática e Tecnologia Informática apresenta material que usa a tecnologia da informática no âmbito da educação matemática escolar.

Na opção *Software* são listados aplicativos que podem auxiliar o trabalho com Geometria, Álgebra e Funções, além de *softwares* recreativos. Na opção Atividades, encontramos propostas de trabalho que fazem uso desses *softwares*. O *site* também apresenta uma relação de *links* que oferecem possibilidades de trabalho, bem como artigos sobre o Ensino de Matemática.

- *iMática*

Disponível em: <www.matematica.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

O iMática (A Matemática Interativa na Internet) é um *site* mantido por professores e estudantes do IME-USP. É composto de quatro seções:

– História da Matemática (é possível encontrar bons textos, seja por uma linha do tempo, biografia ou por tópicos);

– Problemas-desafios (geralmente relacionados à seção Problemas da Revista do Professor de Matemática (RPM);

– Programas (é possível encontrar *softwares* gratuitos, voltados ao ensino e à aprendizagem em Matemática, entre eles o iGeom, de geometria dinâmica, o iGraf, de funções, e o iHanoi, que trata do problema da Torre de Hanói);

– Cursos (é possível encontrar centros que oferecem cursos à comunidade interna e externa da USP).

- *Laboratório de Educação Matemática (UFC)*

Disponível em: <www.ledum.ufc.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* do laboratório de Educação Matemática da UFC. Na opção Produtos, são disponibilizados trabalhos de conclusão de curso, dissertações, trabalhos em congressos, entre outros.

- *Laboratório de Ensino de Matemática (UFMG)*

Disponível em: <www.mat.ufmg.br/~lem>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* do laboratório de Ensino de Matemática da UFMG. Apresenta propostas de jogos e atividades, bem como um amplo acervo, com publicações em assuntos variados, como resolução de problemas, Educação Matemática, lógica etc.

- *Laboratório de Ensino de Matemática (Unicamp)*

Disponível em: <www.ime.unicamp.br/lem>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Site do laboratório de Ensino da Matemática da Unicamp (IMECC – Unicamp). Há indicações de cursos, seminários, eventos e publicações que incentivam o aperfeiçoamento de professores da Educação Básica. Na seção Publicações, encontramos artigos sobre temas que podem contribuir para a formação de professores, como a história do conceito de função, a prática avaliativa nas salas de aula de Matemática e o que é Etnomatemática. Na seção Jornal do Professor de Matemática, há sugestões de leitura e atividades para a sala de aula.

- *Laboratório de Matemática – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Unesp)*

Disponível em: <www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* é possível encontrar ideias de jogos para o ensino da Matemática desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

Há também a seção intitulada Eureka, que é aberta à comunidade geral e discute a resolução de problemas.

A seção Artigos apresenta publicações recentes relacionadas ao ensino e à aprendizagem em Matemática; já a seção História da Matemática destaca a vida de grandes matemáticos e suas contribuições ao desenvolvimento dessa ciência.

- *Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino (UFF)*

Disponível em: <www.lante.uff.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* da Universidade Federal Fluminense há informações e detalhes sobre a especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, na modalidade a distância. O curso é inteiramente gratuito e tem como objetivo apresentar recursos para o Ensino da Matemática, introduzir novas tecnologias e instrumentar o professor para o ensino de Matemática nos níveis fundamental e médio.

- *Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências (UFRJ)*

Disponível em: <www.limc.ufrj.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Site do laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências da UFRJ. Apresenta diversos materiais para uso em sala de aula, incluindo um *software* de geometria dinâmica (o Tabulae Colaborativo).

- *Olimpíada Brasileira de Matemática*

Disponível em: <www.obm.org.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

É o *site* oficial da Olimpíada Brasileira de Matemática, sob responsabilidade do Impa (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), situado no Rio de Janeiro. Estão disponíveis para *download* as provas com gabaritos de vários anos da OBM, nos diversos níveis (nível 1: 6º e 7º anos; nível 2: 8º e 9º anos; nível 3: Ensino Médio e nível universitário) e fases (1ª, 2ª e 3ª). O grau de dificuldade aumenta à medida que se avança a fase. Pode ser uma interessante fonte para o trabalho com resolução de problemas, ainda que muitas questões apresentem um elevado grau de dificuldade.

- *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*

Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Nesse *site* é possível obter as provas resolvidas das edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Além disso, há um extenso e variado banco de questões, separadas por níveis (nível 1: 6º e 7º anos; nível 2: 8º e 9º anos; e nível 3: Ensino Médio). É uma excelente oportunidade para o professor promover o hábito de resolver problemas na sala de aula.

O *site* também conduz a um canal chamado Portal de Matemática OBMEP, onde são disponibilizadas videoaulas com professores selecionados, voltadas para estudantes e professores, além de conteúdos interativos, vídeos e materiais que podem ser baixados. O acesso é livre e gratuito.

- *Revista Nova Escola*

Disponível em: <revistaescola.abril.com.br>. Acesso em: 18 abr. 2016.

Nesse *site* são sugeridas aulas e atividades diferenciadas na seção Planos de aula. Os planos são divididos por segmentos (Educação Infantil, Ensino Fundamental I, Ensino Fundamental II e Ensino Médio) e por área de conhecimento (Ciências da Natureza e Matemática). Na Matemática do Ensino Médio, os assuntos encontram-se divididos em três blocos: Álgebra, Geometria e Análise de dados. As atividades são desenvolvidas a partir de matérias de revistas, estabelecendo um elo entre a Matemática e as notícias do cotidiano. Além disso, o *site* permite que você compartilhe sua opinião sobre os planos de aula com outros colegas de profissão, por meio de redes sociais. O *site* contém ainda uma grande variedade de artigos sobre educação: gestão escolar, planejamento e avaliação, formação, políticas públicas, inclusão, criança e adolescente.

- *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*

Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 18 abr. 2016.

No *site* da Sociedade Brasileira de Educação Matemática existe o calendário atualizado de concursos e eventos da área de pesquisa em Educação Matemática. Há indicação de eventos regionais, nacionais e até internacionais.

Também estão listados grupos de pesquisa de universidades em todo o Brasil e laboratórios de Educação Matemática de todas as regiões.

Na opção Biblioteca em Educação Matemática, há uma vasta bibliografia com publicações recentes na área. Você também tem acesso a vários grupos de trabalho (GTs) e pesquisa reunidos pela SBEM.

Sugestões de livros paradidáticos

As coleções seguintes podem servir de base para relembrar alguns conceitos estruturantes do Ensino Fundamental.

- *Aprendendo a matemática com o GeoGebra*, de Luís Cláudio Lopes de Araújo e Jorge Cássio Costa Nóbriga. 1ª ed. São Paulo: Exato, 2010.

Os autores, buscando superar as limitações do uso da lousa (quadro e giz), procuraram escrever um livro autoinstrutivo voltado para o estudante para que ele possa desenvolver, de maneira independente, as construções. Caberia, então, ao professor, a partir da manipulação das figuras, auxiliar o estudante na formulação de conjecturas, conclusões e justificativas.

No volume 1 da coleção, o livro pode auxiliar os estudantes nas aprendizagens em Geometria Plana (teorema de Tales, teorema de Pitágoras, áreas, função afim e função quadrática); e, no volume 2, na aprendizagem da trigonometria em triângulos quaisquer.

- *Coleção Pra que serve Matemática?*

Essa coleção busca responder à clássica pergunta dos estudantes em qualquer assunto: "Pra que isto serve?". Por meio de exemplos do cotidiano, de jogos e de aplicações, os autores procuram responder à pergunta clássica em cada um dos seguintes temas:

- *Álgebra*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Ângulos*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

- *Equação do 2º grau*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

- *Estatística*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2001.

- *Frações e números decimais*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 17ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Geometria*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 16ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

- *Números negativos*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 21ª ed. São Paulo: Atual, 2009.

- *Proporções*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 13ª ed. São Paulo: Atual, 2002.

- *Semelhanças*, de Marcelo Lellis, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic. 14ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

- *Coleção Vivendo a Matemática*

Essa coleção busca despertar o interesse pela Matemática por meio do conhecimento das ligações entre essa ciência e objetos ou fatos do cotidiano. Sugerimos os seguintes volumes:

- *Lógica? É lógico!*, de Nilson José Machado. 9ª ed. São Paulo: Scipione, 2006.

- *Medindo comprimentos*, de Nilson José Machado. 2ª ed. São Paulo: Scipione, 2000.

- *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*, de Nilson José Machado. 8ª ed. São Paulo: Scipione, 2000.

- *Semelhança não é mera coincidência*, de Nilson José Machado. 7ª ed. São Paulo: Scipione, 2006.

Questões curiosas de Matemática, jogos e desafios de raciocínio quantitativo

- *A Matemática das coisas*: do papel A4 aos cordões de sapatos, do GPS às rodas dentadas, de Nuno Crato (adaptação de Ruth Ribas Itacarambi). 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

O livro mostra a Matemática como parte da vida do ser humano. Há 5 eixos no livro: coisas do dia a dia, a terra é redonda, coisas secretas, arte e geometria e coisas matemáticas. Com temas interessantes, desperta a atenção de professores e estudantes.

- *Alex no país dos números*: uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática, de Alex Bellos. 1ª ed. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

Viajando entre diferentes línguas e culturas, o autor investiga as propriedades do jogo Sudoku com seus inventores; conversa com um pesquisador francês especializado no raciocínio quantitativo de tribos indígenas na Amazônia; venera

um guru indiano responsável pelo legado mítico criador do zero; visita a escola japonesa em que professores e estudantes fazem cálculos imaginando o funcionamento de um ábaco; na companhia de um estatístico, aventura-se em um cassino de Nevada para tentar prever os acasos da fortuna; consulta um famoso numerólogo sobre o nome profissional que deve usar.

- *Conexões Matemáticas Educacionais*: aprendendo novas e explorando antigas, de Ruy Madsen Barbosa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

Explorando "brincadeiras" com retângulos mágicos, quadrados "bem comportados", cubos e policubos, dominós, estabelecendo conexões com teoria dos números, análise combinatória etc., o livro oferece experiências significativas e prazerosas com a Matemática que podem ser usadas em sala de aula.

- *Enigmas, desafios, paradoxos e outros divertimentos lógicos e matemáticos*, de Dimas Monteiro de Barros. 1ª ed. Araçatuba: Novas Conquistas, 2003.

O livro traz uma série de problemas de raciocínio lógico não muito difíceis, acompanhados da resolução comentada. Pode ser uma boa opção para o início de um trabalho sistemático do exercício do raciocínio lógico com os estudantes.

- *Leonardo e a Matemática*, de Giorgio T. Bagani e Bruno D'Amore. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

O livro relata a Matemática nos tempos de Leonardo da Vinci e seu interesse por essa ciência.

- *Mania de Matemática 2*: novos enigmas e desafios matemáticos, de Ian Stewart. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

Nessa obra, há uma grande variedade de desafios, mistérios, paradoxos e quebra-cabeças, construídos em uma linguagem comum e acessível também a leitores não habituados com temas de Matemática.

Do mesmo autor, destacamos também: *Almanaque das curiosidades matemáticas*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2009.

- *Matemática e Arte*, de Dirceu Zaleski Filho. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

O autor propõe aproximar a Matemática e a Arte no ensino, analisando e integrando a História da Matemática e a História da Arte e sugerindo novas possibilidades de trabalho em sala de aula.

- *Revisitando conexões matemáticas com brincadeiras, explorações e materiais pedagógicos*, de Ruy Madsen Barbosa. 1ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

O autor elege objetos geométricos como pontos de partida para atividades e reflexões. O livro está estruturado em três partes: triângulos e recreações, materiais pedagógicos manipuláveis e miscelânea, apresentando situações-problema, atividades, recreações. Há conexões com a teoria dos grafos, expansões binomiais, geometria plana e espacial.

Referências bibliográficas

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da Matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

BICUDO, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218. (Seminários & Debates)

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. 3ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*, Brasília: MEC/SEB/DICEI, 2013.

______. *Ensino Médio Inovador*. Brasília, 2009. Disponível em: <portal.mec.gov.br/dmdocuments/ensino_medioinovador.pdf>. Acesso em: 10 maio 2016.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

CAMPOS, F. C. A. V.; SANTORO, F. M.; BORGES, M. R. S. A.; SANTOS, N. *Cooperação e aprendizagem on-line*. Rio de Janeiro: Dp&A, 2003. (Coleção Educação a Distância)

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

D'AMBRÓSIO, U. *Educação Matemática*: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2001. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática)

FAZENDA, I. C. A. *Integração e Interdisciplinaridade no ensino brasileiro*: efetividade ou ideologia. São Paulo: Loyola, 2011.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MIORIM, M. A. *Introdução à História da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1999.

MORETTO, V. P. *Prova*: um momento privilegiado de estudo, não um acerto de contas. 9ª ed. Rio de Janeiro: Lamparina, 2010.

PARRA, C.; SAIZ, I. *Didática da Matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2009.

PERRENOUD, P. *Avaliação*: da excelência à regulação das aprendizagens entre duas lógicas. Porto Alegre: Artmed, 1999.

______; THURLER, M. G. *Competências para ensinar no século XXI*: a formação dos professores e o desafio da avaliação. Porto Alegre: Artmed, 2002.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

TOMAZ, V. S. *Práticas de transferência de aprendizagem situada em uma atividade interdisciplinar*. Belo Horizonte: UFMG, 2007.

ZABALA, A. *A prática educativa*: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

COMENTÁRIOS ESPECÍFICOS

Iniciamos este volume apresentando noções básicas de conjuntos com o objetivo de familiarizar o estudante com a notação e linguagem matemática. Também são vistas as relações de pertinência e inclusão, bem como as operações entre conjuntos. Essas noções são importantes para o desenvolvimento dos demais capítulos.

No capítulo 2 são apresentados e caracterizados os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais), buscando a consolidação de conceitos já estudados no Ensino Fundamental. Nesses dois primeiros capítulos prevalece uma abordagem mais teórica.

O estudo das funções (capítulos 3 a 8) constitui um dos principais eixos temáticos deste volume. Na introdução do capítulo 3 procuramos apresentar situações cotidianas para ilustrar a relação entre as duas grandezas. Em seguida são apresentados aspectos gerais das funções: lei de correspondência, a notação $y = f(x)$, domínio, imagem, gráficos. Os capítulos seguintes (4 a 8) tratam das funções específicas: as funções polinomiais do 1º e do 2º grau, a função modular (precedida do estudo de função definida por várias sentenças), a função exponencial e a função logarítmica. De modo geral, na introdução dos capítulos, procuramos partir de situações na forma de exemplos ou problemas que guardam relação com assuntos cotidianos, como forma de motivar o estudante na construção dos conceitos que serão trabalhados ao longo do capítulo.

No capítulo 9 é apresentado o conceito de sequência numérica como uma função com domínio em $\mathbb{N}^*$. Desse modo, a relação entre progressão aritmética e geométrica com a função afim e a exponencial, respectivamente, é explicitada no texto.

A Geometria é trabalhada nos capítulos 10, 11 e 12, iniciando com o estudo de semelhança e triângulos retângulos, trigonometria no triângulo retângulo e áreas de figuras planas.

Encerramos este primeiro volume com um capítulo inicial sobre Estatística básica (capítulo 13), em que são introduzidos conceitos como população, amostra e variável (quantitativa ou qualitativa). Também são construídos e interpretados tabelas de frequência e os gráficos usualmente utilizados na representação de um conjunto de dados: setores, barras, histogramas, gráfico de linhas e pictogramas.

Objetivos específicos

Números

Em relação ao eixo dos Números, citamos os seguintes objetivos.

- Compreender e usar a notação simbólica básica dos conjuntos.
- Reconhecer e utilizar as operações entre conjuntos, como união, interseção e diferença.
- Identificar números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais.
- Identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números racionais.
- Reconhecer e utilizar aproximações racionais para os números irracionais.
- Localizar os números reais (racionais ou não) na reta numerada.
- Generalizar o conceito de módulo de um número inteiro para o universo real.
- Utilizar as propriedades dos números reais.
- Caracterizar e reconhecer os intervalos reais, bem como aplicar as operações de união e interseção com esses intervalos.
- Ter um primeiro contato com o método dedutivo, compreendendo a organização particular da Matemática como ciência, estruturada com teoremas e demonstrações.
- Consolidar conceitos estudados no Ensino Fundamental como razão, proporção e porcentagens.

Funções

Os objetivos do eixo temático funções, deste volume, são listados a seguir.

- Construir o conceito de função usando a relação de dependência entre duas grandezas e estabelecer, quando possível, a lei que forneça a relação entre elas.
- Utilizar e interpretar a notação $y = f(x)$.
- Estabelecer o domínio de uma função a partir de sua lei.
- Analisar e interpretar o gráfico de uma função para extrair informações significativas a seu respeito.
- Reconhecer exemplos e resolver exercícios em que as funções estejam contextualizadas em situações do cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento.
- Relacionar o estudo da taxa média de variação de uma função aos conceitos de velocidade e aceleração escalares médias.
- Solidificar conhecimentos construídos no Ensino Fundamental II, como o plano cartesiano, a resolução de equações do 1º e do 2º grau e de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, inequações, cálculo de potências, grandezas diretamente e inversamente proporcionais etc.
- Resolver problemas que envolvem a principal característica da função afim: o fato de a sua taxa média de variação ser constante.
- Resolver problemas envolvendo máximos (ou mínimos) da função quadrática, relacionando-os também à Geometria.
- Relacionar o estudo da função afim e quadrática à modelagem de custos, receitas e lucros de empreendimentos.
- Usar *softwares* livres como o GeoGebra para reconhecer o traçado e a simetria das parábolas.
- Relacionar o estudo das funções à Geometria Analítica por meio dos exercícios que envolvam interseção de duas retas (ou de uma reta e uma parábola), interseção de uma reta (ou parábola) com os eixos coordenados, determinação da equação de uma reta a partir de dois pontos, entre outras situações.
- Construir, ler e analisar gráficos das funções estudadas com auxílio de *softwares* livres como o GeoGebra.
- Identificar translações de um gráfico com auxílio do GeoGebra.
- Resolver inequações do 1º e do 2º grau, utilizando o conceito de sinal de uma função.
- Resolver equações exponenciais sem ou com o uso de logaritmos em situações-problema.
- Relacionar o estudo da função exponencial ao conceito de meia-vida aplicado aos medicamentos e à radioatividade.
- Reconhecer a importância histórica dos logaritmos como instrumento de cálculo.
- Reconhecer a importância da função logarítmica na Matemática e em outras áreas do conhecimento, como na descrição de fenômenos naturais como os terremotos.

- Reconhecer as vantagens do uso de uma escala logarítmica com base no texto sobre intensidade de sons.
- Utilizar corretamente a calculadora científica para fazer cálculos de logaritmos e potências.
- Reconhecer a função logarítmica como inversa da função exponencial.
- Generalizar o conceito de módulo, apresentado no capítulo 2, de um número real e reconhecer as principais propriedades.
- Identificar regularidades em padrões geométricos e numéricos e escrever leis de formação em sequências numéricas.
- Reconhecer as progressões aritmética e geométrica como funções com domínio em $\mathbb{N}^*$, relacionando-as, respectivamente, às funções afim e exponencial.
- Determinar a razão, o termo geral, a soma dos **n** primeiros termos de uma P.A. e de uma P.G.
- Calcular a soma dos infinitos termos de uma P.G. em que a razão é um número entre -1 e 1.
- Resolver problemas que envolvam progressões aritméticas e progressões geométricas simultaneamente.

Geometria

Os objetivos específicos do eixo de Geometria são listados a seguir.

- Revisar e aprofundar conceitos estudados no Ensino Fundamental II, como segmentos proporcionais, teorema de Tales e triângulos semelhantes.
- Compreender e ampliar o conceito geral de semelhança.
- Identificar a semelhança entre figuras planas, ampliando e reduzindo figuras segundo uma razão e identificando os elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e os que se modificam (medida dos lados, o perímetro e a área).
- Calcular a razão entre as medidas dos lados de figuras planas semelhantes e também entre as áreas de suas superfícies.
- Resolver problemas cotidianos associados a triângulos semelhantes.
- Utilizar a semelhança de triângulos para estabelecer as relações métricas no triângulo retângulo.
- Usar o teorema de Pitágoras, bem como suas aplicações.
- Utilizar a semelhança de triângulos na introdução dos conceitos de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo.
- Deduzir os valores das razões trigonométricas dos ângulos notáveis.
- Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas, reconhecendo sua importância no cálculo de distâncias inacessíveis.
- Usar corretamente a calculadora científica e a tabela de razões trigonométricas para obter as razões trigonométricas de outros ângulos agudos.
- Consolidar os conceitos de área e perímetro de figuras planas.
- Resolver problemas que envolvem situações do cotidiano por meio do cálculo de área e perímetro de superfícies planas, plantas e escalas.
- Utilizar corretamente as unidades de medida de comprimento e de superfície, bem como efetuar conversões entre unidades de medida de uma mesma grandeza.
- Compreender a dedução das fórmulas de área das principais figuras planas.

Estatística, contagem e probabilidade

Neste volume, os objetivos específicos deste eixo estão relacionados, principalmente, à Estatística.

- Reconhecer a importância da Estatística nas mais variadas áreas da atividade humana.
- Identificar e classificar variáveis em **quantitativas** ou **qualitativas**.
- Reconhecer a população (ou universo estatístico) e a amostra em uma pesquisa.
- Reconhecer as etapas de uma pesquisa estatística.
- Conhecer dois dos métodos probabilísticos de amostragem mais usados em pesquisas: a amostragem aleatória simples e a amostragem proporcional estratificada.
- Interpretar e construir tabelas de frequência a partir dos dados brutos.
- Construir tabelas de frequência em planilhas eletrônicas.
- Introduzir o conceito de frequência relativa.
- Construir gráficos para representar e resumir um conjunto de dados.
- Interpretar representações gráficas diversas, como os gráficos de setores, de barras, de linhas, histogramas e pictogramas.

Sugestões de abordagem, avaliação e tópicos principais

Números

No capítulo 2, é importante que os estudantes revejam os conjuntos numéricos, bem como estabeleçam a relação (ou não) de inclusão entre eles. Por exemplo, é importante que o estudante saiba que todo número racional é real, mas a recíproca não é verdadeira.

As operações básicas entre elementos dos conjuntos numéricos podem ser revisadas neste capítulo, pois serão usadas em todo o Ensino Médio.

Algumas propriedades importantes dos números reais devem ser destacadas, como os fatos de que, em $\mathbb{R}$:

- o quadrado de um número é sempre maior (ou igual) que zero;
- o quadrado de um número real pode ser menor do que o próprio número, por exemplo, $0{,}5^2 < 0{,}5$.

Esse exemplo contraria a ideia equivocada, que muitos estudantes possuem, de que, ao multiplicar dois números, o produto é sempre maior que estes números.

O fato de ser usual aproximar números irracionais por números racionais, por exemplo $\sqrt{2} \simeq 1{,}41$, $\pi \simeq 3{,}14$ etc., deve ser explorado, pois poderão ser usadas aproximações em exercícios nos três volumes da coleção.

Há ainda um estudo dos intervalos reais e suas representações, bem como operações básicas entre eles: união e interseção. Tais representações serão usadas no estudo das inequações do 1º e do 2º grau.

Nesse capítulo ainda são revisados conceitos do Ensino Fundamental II como razão, proporção e porcentagem. É oportuno valer-se de razões encontradas no dia a dia como a densidade de um líquido, a densidade demográfica, a velocidade média, escala de mapas, gramatura de um papel etc.

A atividade em grupo proposta na seção *Troque ideias* – capítulo 2 (Matemática e Geografia: Escalas) pode ser usada como um instrumento de avaliação diferenciada que desenvolve a competência de analisar escalas em mapas.

Vale lembrar ainda a importância de revisar, neste momento, cálculos simples de porcentagem: eles poderão ser usados em outros capítulos, bem como em outras disciplinas.

É nesse capítulo que o estudante tem um primeiro contato mais aprofundado com o método lógico dedutivo, usado para validar propriedades da Matemática. Vale lembrar que, no Ensino Médio, são apresentados outros métodos de validação, como o que utiliza o raciocínio indutivo e a validação empírica, por exemplo.

A atividade de investigação proposta na seção *Troque ideias* – capítulo 2 (Investigação e argumentação em Matemática) sobre propriedades de números inteiros deve ser mediada pelo professor e tem por objetivo proporcionar ao estudante a vivência de uma demonstração diferenciando hipótese e tese e desenvolvendo os passos lógicos que conduzem à tese. Ao longo do curso, o estudante irá se deparar com outras demonstrações; em particular, no estudo da Geometria de Posição Espacial, serão apresentadas algumas demonstrações para ilustrar o método lógico-dedutivo.

A demonstração de que $\sqrt{2}$ é um número irracional utiliza outro método de dedução: a demonstração por absurdo. Embora não se exija, nessa etapa da escolaridade, que o estudante faça sozinho tal demonstração, é importante que o professor a apresente, observando que, na demonstração apresentada no livro, para facilitar a leitura, foi omitida a justificativa lógica do fato: "Se $p \in \mathbb{Z}$ e p^2 é par, então **p** é par".

De fato, se $p \in \mathbb{Z}$ e p^2 é par, então $p^2 - 1$ é ímpar, isto é, $(p + 1) \cdot (p - 1)$ é ímpar.

Desse modo, $p - 1$ e $p + 1$ são ímpares, e, portanto, **p** é par.

Funções

O ponto de partida para o estudo das funções deve ser a identificação da relação de dependência entre duas grandezas, em situações cotidianas. Um exemplo: no supermercado, o preço do quilograma de presunto é R$ 18,50. Um cliente que pedir 100 g pagará R$ 1,85; quem pedir 200 g pagará R$ 3,70; quem pedir 380 g (= 0,38 kg) pagará 0,38 · (R$ 18,50) = R$ 7,03; enfim, o preço que o cliente pagará dependerá da massa de presunto pedida. No caso, as duas grandezas que estão se relacionando são: preço pago pelo cliente e massa pedida. Os estudantes deverão obter a lei matemática que relaciona tais grandezas: $y = 18{,}5 \cdot x$, sendo **y** o preço, em reais, e **x** a massa, em quilogramas.

Outro exemplo, que também é representativo para o estudante, é a variação do perímetro de um quadrado de acordo com a medida de seu lado. É pertinente que os estudantes construam tabelas para representar essa variação e, em seguida, obtenham a lei da interdependência entre essas grandezas. Outra possibilidade é analisar a variação entre a área de um quadrado e a medida de seu lado.

O próximo passo é a representação da variação entre duas grandezas em um sistema de coordenadas cartesianas. Para isso, é importante que, antes de fazer o primeiro gráfico, o professor faça uma revisão sobre o plano cartesiano, a localização de pontos, a nomenclatura etc.

A análise de gráficos também pode ser iniciada a partir de gráficos de funções que abordam situações cotidianas. Para isso, o professor pode solicitar aos estudantes que procurem, em jornais, revistas e internet, gráficos de funções e façam uma descrição (escrita e/ou oral) completa da variação entre as grandezas envolvidas. Essa atividade pode ser utilizada como instrumento de avaliação: os estudantes podem apresentar os gráficos escolhidos em painéis e relatar à classe quais são as duas grandezas que estão se relacionando, quais são as propriedades principais e tendências que podem ser observadas na análise dos gráficos, entre outros aspectos específicos para cada situação. Caso a atividade seja aplicada, o professor deve ficar atento a eventuais escolhas inadequadas de alguns gráficos estatísticos para representar uma função, como, por exemplo, o de setores.

Depois que o estudante tiver se familiarizado com o conceito de função, ele precisa familiarizar-se com a definição de função por meio de conjuntos, com a notação $y = f(x)$ e com conceitos como domínio, imagem, crescimento, sinal, taxa média de variação etc.

No estudo da função afim, é importante consolidar os conceitos de grandezas diretamente proporcionais, relacionando-os à função linear. Outro ponto de destaque é a propriedade que caracteriza a função afim: *a taxa média de variação é constante*.

Uma atividade interessante, que pode servir de instrumento de avaliação e que envolve essa propriedade, é a *atividade 2: A função afim e a densidade demográfica*, apresentada mais adiante, em *Sugestões de atividades em grupo*: além de explorar essa propriedade em um contexto cotidiano, envolve representações gráficas e conceitos de outras disciplinas (densidade demográfica na Geografia, por exemplo).

Revisões pontuais de resolução de equações e inequações do 1º grau e sistemas de duas equações e duas incógnitas são adequadas neste capítulo.

Com relação às inequações, é importante também que se discuta com a turma a resolução com base no estudo de sinal da função afim: é uma maneira de evitar que o sinal da função seja visto de forma isolada. Além disso, se o estudante compreender o uso do sinal da função afim para resolver inequações do 1º grau, certamente estará preparado para resolver inequações do 2º grau, no capítulo 5 (Função quadrática).

A atividade da seção *Troque ideias* – capítulo 4 (Funções custo, receita e lucro) relaciona a função afim às funções receita, custo e lucro de um empreendimento e pode ser ponto de partida para atividades de pesquisa e de avaliação.

Por exemplo, na administração de uma barraca de cachorro-quente em uma festa junina da escola, é preciso considerar os custos dos produtos utilizados na sua confecção (pão, salsicha, mostarda etc.) bem como eventuais custos fixos para estabelecer o preço de venda unitário e o ponto de equilíbrio. É uma oportunidade para o estudante pôr em prática os conceitos estudados. Para dar continuidade às atividades de modelagem em Economia, usando funções polinomiais do 1º grau, o professor encontra, *na atividade 3*: *Funções do 1º grau de demanda e oferta*, em *Sugestões de atividades em grupo*, a possibilidade de ampliar discussões, envolvendo os conceitos de oferta e demanda.

No estudo da função quadrática, é recomendável fazer uma revisão sobre equação do 2º grau (completa e incompleta), número de raízes e construção da parábola, eixo de simetria etc. Vale comentar com os estudantes que a parábola é o conjunto de pontos equidistantes de uma reta (diretriz) e de um ponto (foco). O uso do *software* livre GeoGebra pode ajudar o estudante a compreender como é o traçado da parábola e suas propriedades.

A propriedade das funções quadráticas de terem um ponto de máximo (ou de mínimo) deve ser aprofundada, relacionando-a, se possível, a problemas geométricos ou problemas de determinação de receita máxima, como ilustra a atividade da seção *Troque ideias* (A receita máxima) apresentada neste capítulo.

O estudo do sinal da função quadrática deve servir de base para a resolução das inequações do 2º grau. Vale lembrar a importância de não exagerar no estudo dos diversos tipos de inequações.

Para introduzir uma função definida por mais de uma sentença, o professor pode trazer à classe uma conta de água de uma residência. Em várias cidades, o valor a ser pago pelo cliente depende da faixa de consumo mensal de água (em geral, para consumos reduzidos, o preço do metro cúbico é inferior ao preço do metro cúbico de faixas maiores de consumo). Em seguida, o professor deverá pedir aos estudantes que calculem os valores das contas para diferentes consumos e obtenham a lei que relaciona o preço e o número de metros cúbicos consumidos. Um exemplo de funções desse tipo está ilustrado no início destas Orientações Didáticas, na seção *Avaliação* (a cobrança do INSS). Outro ponto que pode ser trabalhado com os estudantes é a construção do gráfico de funções dadas por mais de uma sentença, valendo-se do que eles já aprenderam nas funções afim e quadrática.

Esse estudo preliminar das funções definidas por várias sentenças pode servir de base para a introdução do conceito de módulo de um número real: se $x \geqslant 0$, o módulo de **x** é o próprio **x**; se $x < 0$, o módulo de **x** é igual ao oposto de **x**. A partir daí, define-se a função modular e constrói-se seu gráfico. Como pontos importantes deste capítulo, destacamos a interpretação geométrica do módulo de um número real, o fato de, para todo **x** real, o módulo de **x** ser maior (ou igual a) que zero e a construção de alguns outros tipos de gráficos que envolvem módulo. Os gráficos obtidos por translação (horizontal ou vertical) do gráfico de $y = |x|$ podem ser apresentados com auxílio do GeoGebra, facilitando a compreensão dos conceitos envolvidos. São assuntos secundários a resolução de equações e inequações modulares.

Para os capítulos seguintes (7 – *Função exponencial* e 8 – *Função logarítmica*) é recomendável que se faça uma revisão dos diversos tipos de potência (expoente inteiro positivo, negativo, fracionário) usualmente estudados no Ensino Fundamental II, bem como sobre suas propriedades. Não devemos perder a oportunidade de comentar, em seguida, sobre as potências com expoente irracional, lançando à classe perguntas como: *De que modo podemos calcular potências como* $2^{\sqrt{2}}$*?*. Na socialização das discussões, usando aproximação por números racionais, é interessante fazer uso da calculadora científica. A *atividade 5: Os índices de obesidade, a Matemática, a Biologia e a Educação Física* (apresentada nas *Sugestões de atividades em grupo*) pode servir como um instrumento de avaliação diversificado. Ela trata dos índices de gordura corporal: Índice de Massa Corporal (IMC) e Índice de Adiposidade Corporal (IAC), além de utilizar o conteúdo potências e suas propriedades e possibilitar a integração com a Educação Física e a Biologia.

Um exemplo cotidiano do uso da função exponencial, que pode servir como início das discussões, é o modo pelo qual um boato pode ser espalhado: *Suponha que um morador de uma cidade ficou sabendo de uma notícia bombástica no dia 1º e, no dia seguinte, contou a dois amigos. Cada um desses dois amigos repassou a notícia a outros dois no dia 3, e assim por diante. Supondo que ninguém fique sabendo do boato por mais de uma pessoa, como podemos relacionar o número (*__y__*) de pessoas que tomam conhecimento da notícia no dia* __x__ *(em que x = 1, 2, 3, ..., 10)?* Neste problema, o processo em que cada pessoa conta o boato para outras duas pessoas se estende por 10 dias. Dessa forma, obtemos a lei $y = 2^{x-1}$.

O professor não deve exagerar na resolução de equações exponenciais, evitando caminhos muito artificiais e carregados de cálculos. O desejável é que o estudante tenha o conhecimento necessário para resolver problemas e situações mais complexas, como a *atividade 6: As funções exponencial e logarítmica nos cálculos de datação radioativa* apresentada no item *Sugestões de atividades em grupo*, que aborda a datação por carbono-14. Aliás, o conceito de meia-vida, comum em várias áreas do conhecimento, como a Química e a Física (decaimento radioativo), além da Biologia (meia-vida de medicamentos), será explorado neste capítulo nas seções *Troque ideias* – capítulo 7 (Os medicamentos e a Matemática) e *Aplicações* (Meia-vida e radioatividade), possibilitando a contextualização da função exponencial.

Com relação aos logaritmos, é importante que se faça, em algum momento, um resgate histórico, a partir da seção *Um pouco de História* – capítulo 8 (A invenção dos logaritmos) sobre a importância que os logaritmos tiveram no passado como instrumento de cálculo. É natural que os alunos perguntem o porquê de se estudarem logaritmos hoje em dia, com tantos recursos tecnológicos disponíveis. O professor só dará uma resposta satisfatória ao estudante se trabalhar na sala de aula com as diversas aplicações da função logarítmica e da exponencial, em contextos variados.

O estudo das funções exponencial e logarítmica traz para o ambiente escolar várias possibilidades para um trabalho interdisciplinar, podendo envolver a Física (relacionar os logaritmos ao estudo da intensidade dos sons), a Química (o cálculo do pH de uma solução aquosa por meio do uso de logaritmos; o decaimento radioativo – a meia-vida – e a função exponencial), a Geografia (o crescimento populacional e a função exponencial) e a Biologia (o crescimento de uma colônia de bactérias, a divisão celular, a meia-vida dos medicamentos e a função exponencial). Muitas dessas possibilidades de trabalho podem ter, como ponto de partida, a leitura dos textos da seção *Aplicações*, que podem incentivar novas pesquisas, fóruns de debate, seminários e trabalhos, proporcionando ao professor diversificação de metodologias nas aulas e também nos instrumentos de avaliação.

No estudo dos gráficos das funções exponencial e logarítmica, é recomendável usar algum *software* livre, como o GeoGebra, Winplot ou Graphmática, que auxilie o estudante no traçado dessas curvas.

É interessante que se mencione a relação entre a função exponencial e a logarítmica (inversas uma da outra), mesmo que a formalização do conceito de função inversa não seja apresentada nesta coleção.

No estudo das sequências numéricas e das progressões aritmética (P.A.) e geométrica (P.G.), trabalhamos com habilidades importantes como: observação de regularidades em padrões numéricos, investigação, levantamento e validação de conjecturas, argumentação e generalizações (no item *Sugestões de atividades em grupo* há outras possibilidades de trabalho descritas na *atividade 7: Sequências e padrões geométricos*). Desse modo, é preciso que os estudantes tenham oportunidades de fazer descobertas ligadas ao termo geral das progressões, às propriedades de cada uma delas, ao cálculo da soma dos **n** primeiros termos etc. Deve-se estabelecer, logo de início, que as sequências numéricas são exemplos de funções com domínio em $\mathbb{N}^*$ e, portanto, suas representações gráficas são formadas por um conjunto discreto de pontos. Não podemos deixar de destacar a relação entre a função afim e a P.A. e a relação entre a função exponencial e a P.G.

Geometria

Nos capítulos 10 e 11 deste volume sugerimos que se faça uma revisão aprofundada de tópicos geralmente abordados no Ensino Fundamental II: o teorema de Tales e a semelhança de triângulos, o teorema de Pitágoras e suas aplicações, e as razões trigonométricas em um triângulo retângulo.

Para estudar a semelhança de figuras planas, o professor pode usar recursos como uma foto revelada em tamanhos diversos (ampliada ou reduzida), deixando que os estudantes identifiquem a razão entre as medidas de segmentos correspondentes das fotos e percebam que as medidas de ângulos correspondentes não se alteram.

Outra possibilidade é, tirando algumas cópias reduzidas em 50%, levar o estudante a validar, experimentalmente, que quatro dessas cópias compõem a figura original. Em outras palavras, se $k = \frac{1}{2}$, a razão de semelhança entre as áreas da figura reduzida e da original é $k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Também há a possibilidade de trazer para a sala de aula objetos (ou, caso haja material específico na escola, sólidos geométricos) que tenham formato parecido – por exemplo, uma caixa de sapatos e uma embalagem de creme dental (no caso de haver sólidos geométricos no material da escola, trazer dois paralelepípedos retorretângulos) – para verificar se são semelhantes (será preciso que os estudantes avaliem se há proporcionalidade entre as medidas). A discussão pode ser ampliada, deixando-se que os estudantes descubram: *e dois círculos, são semelhantes? E duas esferas? E dois cubos?*; e assim por diante. Sugerimos, com isso, que o estudo de semelhança não se reduza aos triângulos.

Por fim, é importante lembrar que os estudantes deverão usar as razões trigonométricas no triângulo retângulo para resolver problemas; desse modo, o trabalho neste capítulo não pode se limitar à determinação da medida de um lado do triângulo retângulo (conhecidas as medidas de outro lado e de um ângulo agudo), bem como não devemos ficar restritos aos ângulos notáveis, mas trabalhar com outros ângulos que exijam o uso da calculadora e da tabela de razões trigonométricas.

No último capítulo de Geometria desse volume temos a oportunidade de aprofundar um tema já trabalhado em ciclos anteriores e, de modo geral, familiar aos estudantes: área de superfícies planas.

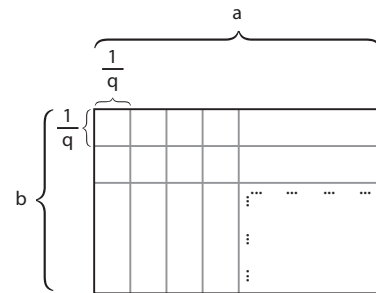
Nessa fase da escolaridade o estudante possui maturidade suficiente para compreender a dedução das fórmulas de áreas de várias figuras planas – fórmulas essas que muitas vezes são aplicadas sem qualquer compreensão de como são obtidas.

Uma proposta de atividade, que pode servir também como um interessante instrumento de avaliação, é separar a classe em equipes e pedir a cada uma que pesquise (no livro didático e em outras fontes) e apresente à classe, sob forma de seminário, uma dedução da fórmula da área da figura plana pesquisada, seguida de exemplos de aplicações.

Com relação à dedução das fórmulas, é importante observar que a demonstração da área de um retângulo, no livro-texto, representa um caso particular, no qual as medidas dos lados do retângulo são números inteiros. Se julgar pertinente, traga a questão para a classe: *Como seria a demonstração se considerarmos um retângulo cujas medidas dos lados são números racionais* **a** *e* **b***?*

A seguir é apresentada a demonstração, baseada no livro *Áreas e Volumes,* da Coleção de Matemática Elementar (SBM), de Elon Lages Lima.

Se **a** e **b** são racionais, é possível escrevê-los como frações (de inteiros) de mesmo denominador $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{q}$.

Dividimos cada lado do retângulo em segmentos de comprimento $\frac{1}{q}$ e traçamos paralelas aos lados a partir da subdivisão.

O lado de medida **a** fica dividido em **p** segmentos congruentes, cada um medindo $\frac{1}{q}$, o lado de medida **b** fica dividido em **r** segmentos congruentes, cada um medindo $\frac{1}{q}$.

Desse modo, o retângulo fica dividido em $p \cdot r$ quadrados, cada qual com lado de medida $\frac{1}{q}$.

A área do retângulo é dada por:

$$A = (p \cdot r) \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^2 \Rightarrow A = \frac{p \cdot r}{q^2} = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{q} = a \cdot b$$

Observação: Para mostrar que a área de um quadrado de lado $\frac{1}{q}$ (com $q \in \mathbb{N}^*$) é $\frac{1}{q^2}$, basta tomar um quadrado unitário e dividir cada um de seus lados em **q** segmentos congruentes, cada um com lado medindo $\frac{1}{q}$.

O estudo das áreas pode proporcionar aos estudantes a possibilidade de resgatar tópicos importantes, como escala, o próprio conceito de medir, transformação na unidade de medidas de comprimento e superfície, comprimento de circunferência (usado para deduzir a área do círculo), e, nesse sentido, é importante que sejam selecionadas atividades que favoreçam esses aspectos.

Estatística, contagem e probabilidade

Uma das vertentes do estudo da Estatística é a contextualização sociocultural, em que o estudante faz uma leitura consciente e crítica das questões do cotidiano e dos problemas de nossa sociedade e, desse modo, o prepara para intervir e propor soluções para problemas diversos. Não é difícil enumerar temas que podem ser discutidos no estudo da Estatística: saúde e bem-estar, meio ambiente, violência urbana, desigualdades sociais e regionais, trabalho, comunicação, mundo digital, economia, entre outros.

Nesse sentido, é recomendável que o professor, no planejamento das aulas e das atividades, mobilize os estudantes a buscar gráficos, tabelas, textos e reportagens extraídos de jornais, revistas, internet e outros meios de comunicação. Desse modo, o estudante poderá comunicar-se oralmente e por escrito (utilizando a linguagem matemática) para relatar, analisar e discutir as questões cotidianas. Aliás, a Estatística é um dos tópicos do programa que melhor possibilitam avaliar a comunicação oral do estudante. Experimente pedir aos estudantes que relatem oralmente as ideias expressas em um gráfico ou uma tabela: do que trata o gráfico/tabela, o que

está sendo relacionado, se é mostrada alguma tendência ou projeção, que título o estudante daria a este gráfico/tabela etc. Esse tipo de atividade, devidamente planejada, pode ser um instrumento preliminar de avaliação; para exemplificar, o professor pode solicitar aos estudantes que pesquisem gráficos/tabelas dos mais variados assuntos em diversos meios e, na data programada, cada estudante exponha e analise, verbalmente, o gráfico selecionado (como variação dessa atividade, o professor pode pedir que o estudante comente e analise o gráfico do colega).

Ao falar sobre Estatística e fazer um levantamento informal sobre o conhecimento prévio dos estudantes com relação a esse tema, é provável que surjam assuntos relacionados às eleições ou à pesquisa eleitoral. Esse pode ser o ponto de partida para a discussão da importância da Estatística nas mais variadas áreas do conhecimento e no mundo do trabalho, além de elucidar conceitos básicos como: variáveis; população e amostra; etapas e planejamento de uma pesquisa estatística; como selecionar uma amostra etc.

Uma possibilidade de atividade introdutória, que tem como objetivo explorar os conceitos iniciais da Estatística, como variável, tabelas de frequência e representações gráficas, é levantar e tabular dados a partir de informações colhidas dos próprios estudantes em sala de aula. Por exemplo, fazer um levantamento sobre o tempo diário (em horas) de uso da internet, sobre a idade dos estudantes da turma ou sobre sua disciplina favorita, para, a partir daí, construir gráficos e tabelas de frequência para representar o conjunto de dados obtidos.

Não deixe de trabalhar com a turma o texto da seção *Aplicações* – capítulo 13 sobre Estatística e Censos Demográficos, que mostra a importância dos censos para a economia e a sociedade brasileira.

O livro-texto apresenta, de maneira detalhada, os passos para a construção de uma tabela de frequências usando programas de planilhas eletrônicas. É uma excelente oportunidade de apresentar aos estudantes uma ferramenta de trabalho, já pensando na sua futura inserção no mercado de trabalho.

Sugerimos que se dê continuidade a essa atividade com a construção de gráficos estatísticos em programas computacionais.

Nas *Sugestões de atividades em grupo*, algumas páginas adiante, há um roteiro detalhado da *atividade 10*: *Construção de gráficos estatísticos em programas de planilhas eletrônicas* que pode, inclusive, servir de instrumento diversificado de avaliação.

Orientações específicas para a seção *Troque ideias*

Investigação e argumentação em Matemática (Capítulo 2)

O objetivo maior dessa atividade é colocar o estudante em contato com o método dedutivo para validação de propriedades em Matemática. É importante lembrar que, no Ensino Médio, outros processos de validação se fazem presentes, como o que utiliza o raciocínio indutivo ou a verificação empírica.

A atividade desenvolvida nesta seção possibilita ao estudante compreender a Matemática como uma ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de interpretar o mundo, contribuindo para o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática.

Não se espera que, nesta etapa da escolaridade, os estudantes estejam prontos para fazer demonstrações. No entanto, é importante que eles compreendam o que é uma demonstração e saibam diferenciar hipótese de tese. Nos três volumes desta coleção eles irão se deparar com demonstrações e é importante que os estudantes sejam capazes de compreender os passos lógicos que conduzem à tese.

As atividades de investigação propostas nesta seção não apresentam, de modo geral, grau elevado de dificuldade. Espera-se que com a intervenção do professor, em menor ou maior intensidade, os estudantes consigam argumentar logicamente para validar as implicações verdadeiras, do mesmo modo que não será difícil para eles apresentar contraexemplos para as implicações falsas. É provável que o professor tenha que orientar os estudantes em algumas representações genéricas de um número inteiro (**n**). Por exemplo:

Se **n** é par, escrevemos $n = 2k$, com $k \in \mathbb{Z}$; se **n** é ímpar escrevemos $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$; se **n** é múltiplo de 3, escrevemos $n = 3k$, com $k \in \mathbb{Z}$; e assim por diante.

No entanto, o item *g* foi propositadamente colocado para desafiar os estudantes. Ao atribuir os primeiros valores naturais para **n**, os alunos obtêm um número primo como resultado de $n^2 + n + 41$. No entanto, se $n = 41$, cada um dos termos desse trinômio é divisível por 41, logo, $41^2 + 41 + 41$ é um número composto.

Este item mostra ao estudante que, se certa proposição vale para alguns valores naturais de **n** ($n \in \mathbb{N}$), não significa, obrigatoriamente, que ela é válida para **todo** número natural.

Solução:

a) Verdadeira; sejam $a = 2p + 1$ e $b = 2q + 1$, com $\{p, q\} \subset \mathbb{Z}$.
Temos: $a + b = 2p + 1 + 2q + 1 = 2 \cdot (p + q) + 2 =$
$= 2 \cdot \underbrace{(p + q + 1)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow a + b$ é par.

b) Verdadeira; seja $a = 2p$, com $p \in \mathbb{Z}$.
Temos: $a^2 = (2p)^2 = 4p^2 = 2 \cdot \underbrace{(2p^2)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow a^2$ é par.

c) Verdadeira; seja $a = 6 \cdot p$, com $p \in \mathbb{Z}$.
Podemos escrever $a = 3 \cdot \underbrace{(2 \cdot p)}_{\in \mathbb{Z}} \Rightarrow$ **a** é múltiplo de 3.

d) Falsa; 15 é divisível por 5, mas 15 não é divisível por 10.

e) Verdadeira; vamos representar os três inteiros consecutivos por **a**, $a + 1$ e $a + 2$.
A soma é: $a + (a + 1) + (a + 2) = 3a + 3 =$
$= 3 \cdot \underbrace{(a + 1)}_{\in \mathbb{Z}}$, que é um número múltiplo de 3.

f) Verdadeira; como **a** e **b** são números inteiros consecutivos, podemos escrevê-los como **a** e $a + 1$.
$a^2 + (a + 1)^2 = a^2 + a^2 + 2a + 1 =$
$= 2a^2 + 2a + 1 = 2 \cdot \underbrace{(a^2 + a)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$
Logo, $a^2 + (a + 1)^2$ é um número ímpar.

g) Falsa; fazendo $n = 41$, o número $41^2 + 41 + 41 =$ $= 41^2 + 2 \cdot 41 = 41 \cdot (41 + 2) = 43 \cdot 41$ é múltiplo de 41 (e de 43 também) e, portanto, $43 \cdot 41 = 1\,763$ não é primo.

Matemática e Geografia: Escalas (Capítulo 2)

Essa atividade trata da interpretação de escalas numéricas e escalas gráficas em mapas e tem por objetivos levar o estudante a ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes representações, possibilitando o desenvolvimento da competência

de representação e comunicação. A atividade também contribui para o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática, pois requer que o estudante selecione e utilize instrumento de medição, utilize escalas, faça estimativas, elabore hipóteses e interprete resultados.

O conceito de razão, exemplificado pela escala numérica, já foi desenvolvido no Ensino Fundamental. Logo no início do curso, no capítulo sobre conjuntos numéricos, temos a oportunidade de aprofundar e consolidar esse estruturante conceito. Por não se tratar de um conceito novo, sugerimos que a atividade se desenvolva com o mínimo de intervenções do professor, uma vez que o texto inicial dá subsídios para os estudantes resolverem as questões.

Ao final da atividade, o estudante deverá ser capaz de:

- compreender os símbolos usados em escalas numéricas e interpretar a escala (razão) correspondente;
- fazer a correta leitura de uma escala gráfica;
- determinar distâncias reais (em linha reta) a partir de distâncias medidas no mapa com a régua e vice-versa;
- escrever a escala numérica correspondente a uma escala gráfica e vice-versa;
- comparar escalas.

Solução:

a) Escala: $\frac{1 \text{ cm}}{428 \text{ km}} = \frac{1 \text{ cm}}{42\,800\,000 \text{ cm}} = 1 : 42\,800\,000$

b) No mapa, a distância aproximada entre as duas capitais é 2,4 cm. Assim, a distância real, em linha reta, é:
$2{,}4 \cdot 42\,800\,000 \text{ cm} = 102\,720\,000 \text{ cm} = 1\,027{,}2 \text{ km}$

c) Como cada 1 cm no mapa corresponde a 428 km, a distância entre essas duas capitais, no mapa, seria aproximadamente 4,37 cm ($1\,870 : 428 \simeq 4{,}37$). Esse valor aproximado pode ser confirmado por meio de medições com a régua.

d) $\frac{1 \text{ cm}}{13 \text{ km}} = \frac{1 \text{ cm}}{1\,300\,000 \text{ cm}}$. A escala numérica é 1 : 1300000.

e) A medida 1 cm no mapa corresponde a 20000 cm = 200 m de medida real.
0 200 m

f) Deve ser escolhida a escala 0 400 km, pois, nesse caso, cada centímetro representado no mapa corresponde a 400 km de distância real. No outro caso, cada centímetro no mapa corresponde a 500 km de distância real. As maiores escalas, ou seja, com menor redução, são aquelas que possuem menor denominador.

Funções custo, receita e lucro (Capítulo 4)

A atividade permite que o estudante mobilize seus conhecimentos de modo a interpretar uma situação e elaborar modelos e representações matemáticas para analisá-la, contribuindo para o desenvolvimento da competência de representação e comunicação em Matemática.

Nessa atividade, o estudante terá que usar todo o "repertório" construído no capítulo para analisar uma situação comum em Economia: a determinação do ponto de equilíbrio, considerando um empreendimento que comercializa um único produto. Para isso, terá que usar funções afim para expressar o custo total, a receita e o lucro obtidos na comercialização de um número **x** de unidades desse produto.

Diversos tópicos podem ser explorados:

- construção de gráficos e interseção de retas;
- equação e inequação do 1º grau;
- função linear e proporcionalidade.

A situação apresentada nesta seção ilustra um exemplo de duas grandezas diretamente proporcionais, a receita e a quantidade de unidades vendidas. Por esse motivo, a receita em função da quantidade de unidades vendidas é um exemplo de função linear.

No entanto, a relação entre o custo total e o número de unidades produzidas não é uma função linear, pois estas duas grandezas não são diretamente proporcionais. Apesar de o custo total aumentar quando o número de unidades produzidas aumenta, por causa do custo fixo de produção, este crescimento não é proporcional. O professor pode aproveitar essa situação para confrontar a crença equivocada de alguns estudantes que associam, indistintamente, o crescimento de duas grandezas com a proporcionalidade direta.

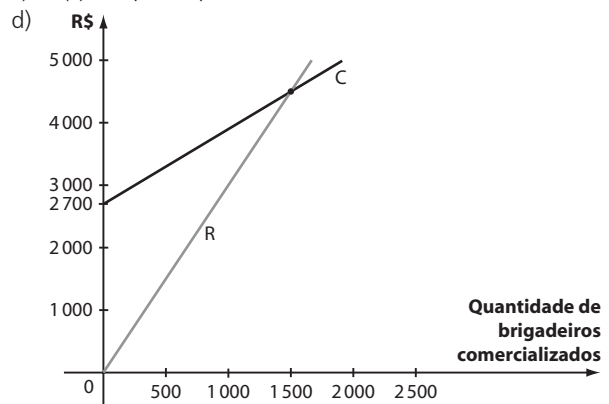
Por fim, vale lembrar que os modelos construídos nessa atividade supõem que o preço de venda do produto é fixo.

Solução:

a) Possíveis respostas: pagamento de aluguel, salário de funcionário(s), impostos, conta de luz, conta de telefone etc.

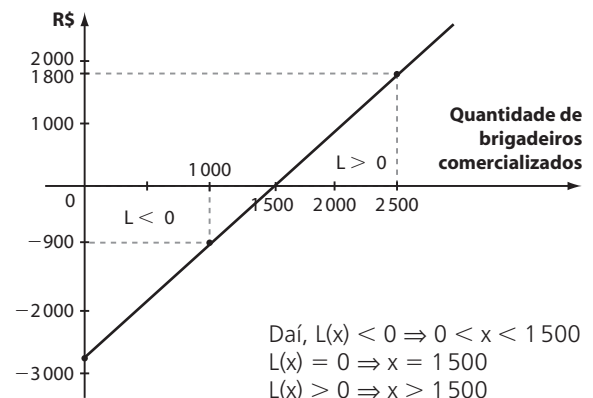
b) $C(x) = 2\,700 + 1{,}4x$, com $x \in \mathbb{N}$

c) $R(x) = 3{,}20 \cdot x$, com $x \in \mathbb{N}$

d)

e) **C** e **x** não são grandezas diretamente proporcionais, pois há o custo fixo. **R** e **x** são grandezas diretamente proporcionais.

f) Basta igualar as duas leis.
$C(x) = R(x) \Rightarrow 2\,700 + 1{,}4x = 3{,}2x \Rightarrow x = 1\,500 \Rightarrow$
$\Rightarrow C(x) = R(x) = 4\,800$
Nesse caso, a receita é suficiente para igualar o custo total, fazendo com que o empreendedor deixe de ter prejuízo.

g) $L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = 3{,}2x - (2\,700 + 1{,}4x) \Rightarrow$
$\Rightarrow L(x) = 1{,}8x - 2\,700$, com $x \in \mathbb{N}$

Daí, $L(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1\,500$
$L(x) = 0 \Rightarrow x = 1\,500$
$L(x) > 0 \Rightarrow x > 1\,500$

A receita máxima (Capítulo 5)

A atividade propõe que o estudante utilize funções ou gráficos para modelar situações envolvendo cálculos de lucro máximo

ou prejuízo mínimo, colaborando para o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática.

Uma característica marcante da função quadrática é possuir um ponto de máximo (ou mínimo). É interessante explorar essa propriedade, recorrendo a situações-problema contextualizadas em Geometria (geralmente ligadas à determinação da área máxima de certa superfície) ou a problemas de maximização de lucro ou receita, como o apresentado nesta seção.

Nessa modelagem, admite-se que, sob certas condições, o número de unidades (espigas de milho) vendidas e o preço de venda se relacionam por meio de uma função do 1º grau decrescente. Assim, para cada par de valores dessas grandezas corresponde um valor de receita. É natural que se queira determinar as condições para a receita ser a maior possível.

A maior dificuldade para resolver esse problema é encontrar a lei da função que relaciona a receita e o número de unidades vendidas. Para isso, a atividade foi organizada em três etapas. Espera-se que os estudantes, após a realização das duas primeiras etapas, saibam relacioná-las a fim de obter a lei da função receita (que, nas condições dadas, é uma função quadrática) para, a partir daí, determinar o seu ponto de máximo.

É importante que o professor disponibilize tempo suficiente para que os estudantes pensem em como determinar a lei da função receita, a partir de um valor genérico do número **x** de espigas de milho vendidas.

Essa atividade pode ser realizada tanto na introdução dos problemas de máximo ou mínimo da função quadrática como na introdução do capítulo, servindo como uma situação problematizadora e motivadora para o estudo da função do 2º grau.

Solução:

a) Usando os pontos (40; 3,50) e (50; 3,00), temos que a taxa de variação é:

$$\frac{3{,}00 - 3{,}50}{50 - 40} = \frac{-0{,}50}{10} = \frac{-1}{20} = -0{,}05$$

Assim, $y = \frac{-1}{20}x + b \Rightarrow 3{,}5 = \frac{-1}{20} \cdot 40 + b \Rightarrow$ $\Rightarrow b = 5{,}5$ e a lei é $y = -0{,}05x + 5{,}5$. Poderíamos também ter considerado 2 pontos quaisquer da reta e montado o sistema substituindo cada ponto (x, y) na lei $y = ax + b$.

b)

Preço da espiga (R$)	Número de espigas vendidas por dia	Receita diária (R$)
3,50	40	140,00
3,40	42	142,80
3,30	44	145,20
3,00	50	150,00
2,90	52	150,80
2,80	54	151,20
2,50	60	150,00

c) Vamos encontrar a lei da função que relaciona a receita (**R**) e o número (**x**) de espigas vendidas:

R = (preço da espiga) · (número de espigas vendidas)

$R(x) = (-0{,}05 \cdot x + 5{,}5) \cdot x = -0{,}05x^2 + 5{,}5x =$

$= \frac{-1}{20}x^2 + \frac{11}{2}x$

Observe que a função receita é do 2º grau com $a < 0$ e, deste modo, essa função admite um **ponto de máximo**, dado pelas coordenadas do vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{11}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{1}{10}} = 55$$

$$y_v = -\frac{1}{20} \cdot 55^2 + \frac{11}{2} \cdot 55 = -151{,}25 + 302{,}50 = = 151{,}25$$

Assim, quando são vendidas 55 espigas, a receita se maximiza, atingindo o valor de R$ 151,25, o que nos permite concluir que o preço unitário a ser cobrado é:

$$\frac{R\$\ 151{,}25}{55} = R\$\ 2{,}75$$

Notação científica (Capítulo 7)

O objetivo principal desta atividade é levar o estudante a reconhecer a importância da notação científica na ciência, identificando a ordem de grandeza de números muito grandes ou muito pequenos, e utilizando corretamente as potências de dez na leitura, representação e operações com tais números.

Ao propor ao estudante que reconheça e utilize adequadamente, na forma oral e escrita, símbolos, códigos e nomenclatura da linguagem científica, a atividade contribui para o desenvolvimento da competência de representação e comunicação em Matemática.

O capítulo sobre função exponencial abre possibilidade de aprofundar e consolidar o estudo das potências e suas propriedades, geralmente estudadas no Ensino Fundamental II. Além disso, abre-se uma importante frente de trabalho com a notação científica, utilizada por disciplinas como a Física e a Química ao longo de todo o Ensino Médio.

Além dos exercícios propostos nesta seção, é oportuno também que se incentive os estudantes a pesquisarem a ocorrência de números muito grandes e muito pequenos nas ciências em geral, complementando a atividade.

Solução:

a) I) $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; II) $3{,}84 \cdot 10^8$ m; III) $1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg; IV) $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s; $9{,}46053 \cdot 10^{12}$ km $= 9{,}46053 \cdot 10^{15}$ m; V) $2{,}0 \cdot 10^2$ μg/m³; $2{,}0 \cdot 10^{-4}$ g.

b) i) $2{,}1 \cdot 10^1$; ii) $4{,}0 \cdot 10^{-5}$; iii) $6{,}5 \cdot 10^{19}$; iv) $5 \cdot 10^9$.

c) i) Vênus.; ii) $4{,}14 \cdot 10^7$ km, pois $1{,}082 \cdot 10^{11}$ m $=$ $= 1{,}082 \cdot 10^8$ km e $149{,}6 \cdot 10^6$ km $= 1{,}496 \cdot 10^8$ km; a diferença é $(1{,}496 - 1{,}082) \cdot 10^8$ km $= 0{,}414 \cdot 10^8$ km $=$ $= 4{,}14 \cdot 10^7$ km.

Os medicamentos e a Matemática (Capítulo 7)

O objetivo dessa atividade é levar o estudante a construir o conceito de meia-vida de um medicamento por meio de uma situação cotidiana: a leitura de uma bula de medicamento. Construindo, nessa atividade, o conceito de meia-vida, espera-se que os estudantes não tenham dificuldade para associá-lo a outras situações, como a meia-vida de um isótopo radioativo, conforme apresentado no texto da seção *Aplicações* (Meia-vida e radioatividade).

O conceito de meia-vida é importante para a Ciência, especialmente para a Química e a Biologia.

A atividade auxilia o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática, já que permite que o estudante reconheça relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, neste caso, a Biologia.

Nessa atividade, é provável que os estudantes, sem a intervenção do professor (ou com intervenções mínimas e pontuais), cheguem à conclusão de que o modelo matemático adequado para relacionar a quantidade de medicamento no organismo e o tempo decorrido após a ingestão é o *exponencial*, valendo-se, desse modo, de uma função exponencial decrescente.

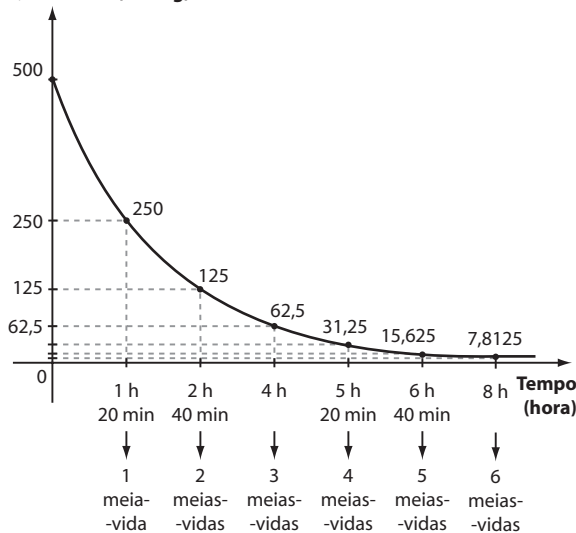
Um dos entraves encontrados pelos estudantes para determinar a lei da função pedida é que, muitas vezes, eles comparam apenas a quantidade do medicamento em certa hora com a quantidade presente na hora anterior. Se necessário, pode-se sugerir a eles que comparem, para alguns instantes (hora), a quantidade de medicamento presente no organismo com a quantidade *inicialmente* ingerida.

Ao final da atividade, espera-se que os estudantes reconheçam a importância de seguir os horários prescritos pelo médico para ingestão de novas cápsulas do antibiótico.

Solução:

a)

Número de meias-vidas	Quantidade de amoxicilina no organismo (mg)
0	500
1	250
2	125
3	62,5
4	31,25
5	15,625
6	7,8125

b)

c) $q(0) = 500$; $q(1) = \frac{500}{2}$; $q(2) = \frac{\frac{500}{2}}{2} = \frac{500}{2^2}$;

$q(3) = \frac{\frac{500}{2^2}}{2} = \frac{500}{2^3}$; ... Assim, para um número **n** de meias-vidas, temos: $q(n) = \frac{500}{2^n}$

d) Após 8 horas (aproximadamente 6 meias-vidas), a concentração de amoxicilina é de apenas 7,8125 mg. Em relação à quantidade ingerida, o percentual é:

$\frac{7{,}8125}{500} = 0{,}015625 = 1{,}5625\%$

A ingestão de uma nova cápsula possibilita a continuidade do tratamento, mostrando a importância de respeitar os horários prescritos para medicação.

Observação de regularidades e A propagação de uma notícia (Capítulo 9)

As duas atividades do capítulo têm por objetivo principal levar o estudante a identificar, caracterizar e levantar propriedades das progressões aritmética e geométrica bem como determinar o termo geral dessas sequências, antes de qualquer apresentação e formalização.

Espera-se que os estudantes, nos grupos, questionem e argumentem, levantem hipóteses e façam descobertas a partir de suas observações de regularidade em padrões numéricos. Em alguns momentos da atividade, principalmente na obtenção do termo geral dessas sequências, os estudantes deverão se valer do raciocínio indutivo, que é uma forma de validação de uma propriedade matemática presente no Ensino Médio.

Ao identificar regularidades para estabelecer regras, algoritmos e propriedades, os estudantes estão desenvolvendo a competência de investigação e compreensão em Matemática.

Por fim, é importante lembrar que as atividades devem transcorrer sem interferência do professor (ou com, no máximo, mediações pontuais), pois trata-se de uma atividade investigativa na qual uma "dica" ou "resposta" pode comprometer o objetivo que ela se propõe atingir.

Solução da seção *Troque ideias – Observação de regularidades*:

a) 4ª figura: ; 5ª figura: ;
6ª figura: .

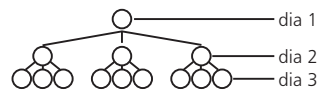
b) (4, 7, 10, 13, 16, 19, ...); um termo qualquer da sequência, a partir do segundo, é obtido adicionando 3 ao termo anterior.

c) $a_1 = 4$; $a_2 = 7 = 4 + 1 \cdot 3$; $a_3 = 10 = 4 + 2 \cdot 3$; $a_4 = 13 = 4 + 3 \cdot 3$; ...; $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d) $a_{25} = 3 \cdot 25 + 1 = 76$ (76 palitos)

e) $493 = 3n + 1 \Rightarrow n = 164$ (164ª figura)

Solução da seção *Troque ideias – A propagação de uma notícia*:

a) Para facilitar, é interessante usar esquemas como o mostrado abaixo, que ilustra os convites feitos a partir de um dos criadores do blogue:

A sequência é: (2, 6, 18, 54, 162, ...)

b) Cada termo da sequência, a partir do segundo, é obtido multiplicando o termo anterior por 3.

c) $a_1 = 2$; $a_2 = 2 \cdot 3$; $a_3 = 2 \cdot 3^2$; $a_4 = 2 \cdot 3^3$; $a_5 = 2 \cdot 3^4$; ...; $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Observe que: $a_{11} = 2 \cdot 3^{10} = 118\,098$; $a_{12} = 2 \cdot 3^{11} = 354\,294$; $a_{13} = 2 \cdot 3^{12} = 1\,062\,882$.
Assim, em 13 dias o número de visitas diárias terá superado 1 milhão.

Relações entre as razões trigonométricas (Capítulo 11)

Os objetivos principais dessa atividade são:

- Colocar o estudante em um primeiro contato com as principais relações trigonométricas ($\text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$; $\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ e $\text{sen}\, x = \cos\,(90° - x)$ usando as razões no triângulo retângulo.
- Levar o estudante a deduzir essas relações, participando como protagonista do processo de validação de propriedades da Matemática.

A atividade proposta contribui para o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática, à medida que exige que o estudante estabeleça identidades da geometria e compreenda a Matemática como ciência autônoma, que investiga relações, formas e eventos e desenvolve maneiras próprias de descrever e interpretar o mundo.

É importante destacar que, no estudo da trigonometria na circunferência, tais relações serão retomadas e generalizadas, de modo que não se pretende que o estudante se aproprie "definitivamente" de tais relações nem que ele resolva longas séries de exercícios envolvendo as fórmulas deduzidas, mas sim que ele possa compreender e participar do processo de obtenção delas.

De modo geral, as deduções das fórmulas são simples e, seguindo as etapas propostas na atividade, espera-se que os estudantes consigam, trabalhando em equipes, chegar aos resultados procurados.

Solução:

a) $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{b}{a} = \cos\hat{C}$; $\text{sen}\,\hat{C} = \dfrac{c}{a} = \cos\hat{B}$

b) O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento.

c) $\text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{b}{c}$ e $\text{tg}\,\hat{C} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow \text{tg}\,\hat{B} = \dfrac{1}{\text{tg}\,\hat{C}}$ ou $(\text{tg}\,\hat{B}) \cdot (\text{tg}\,\hat{C}) = 1$; assim, por exemplo:

$\text{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{tg}\,60° = \sqrt{3}$ e $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 1$

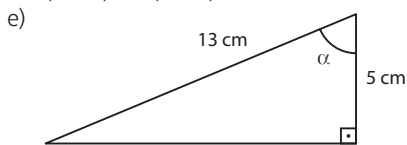
d) $(\text{sen}\,\hat{B})^2 + (\cos\hat{B})^2 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{a}$

Como $a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras), temos:

$(\text{sen}\,\hat{B})^2 + (\cos\hat{B})^2 = \dfrac{a^2}{a^2} = 1$

$(\text{sen}\,\hat{C})^2 + (\cos\hat{C})^2 = \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = \dfrac{c^2 + b^2}{a^2} = \dfrac{a^2}{a^2} = 1$

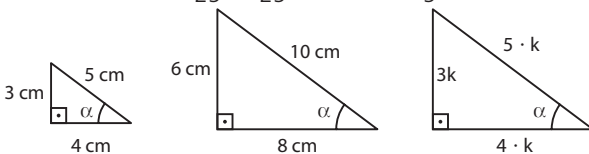
Para um ângulo agudo de medida **x**, temos:
$(\text{sen}\,x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

e)

$\text{sen}^2\,\alpha = \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = \dfrac{144}{169}$; $\cos^2\alpha = \left(\dfrac{5}{13}\right)^2 = \dfrac{25}{169}$;

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{144 + 25}{169} = 1.$

Verifica-se, de modo análogo, a validade da relação para o outro ângulo agudo.

f) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

g) $\dfrac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b}{c} = \text{tg}\,\hat{B}$; $\dfrac{\text{sen}\,\hat{C}}{\cos\hat{C}} = \dfrac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \dfrac{c}{b} = \text{tg}\,\hat{C}$

Em geral, se **x** é a medida de um ângulo agudo, temos $\text{tg}\,x = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x}$.

Sugestões de atividades em grupo

A seguir, são propostas sugestões de atividades que favorecem as interações aluno-aluno e aluno-professor, no intuito de dar continuidade às atividades propostas na seção *Troque ideias*, no livro-texto.

As atividades em grupo proporcionam aos estudantes:

- ouvir, discutir e refletir sobre a opinião dos colegas;
- respeitar as diferenças individuais quanto ao tempo de compreensão e assimilação dos conteúdos;
- socializar diferentes pontos de vista e resoluções diversas para um mesmo problema, e estabelecer consensos;
- promover situações de ajuda e de ensino-aprendizagem entre os colegas;
- dividir tarefas e responsabilidades;
- promover maior integração social.

Atividade 1: Tratamento da informação

Essa atividade pode ser desenvolvida no estudo das funções ou na introdução à Estatística.

Objetivos

- Ler e interpretar gráficos de linhas.
- Analisar com cuidado as informações contidas em um gráfico para a correta leitura da realidade.
- Compreender que uma mudança na unidade de comprimento utilizada nos eixos de um gráfico pode gerar, à primeira vista, interpretações distintas de um mesmo fato.

Material

- Material escolar básico (papel, lápis e borracha).

Número de aulas: 1.

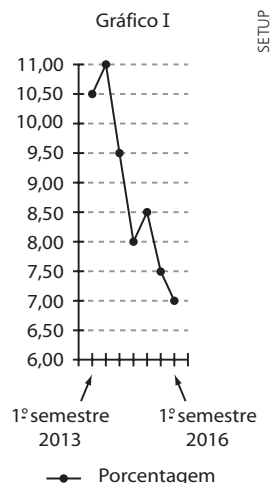
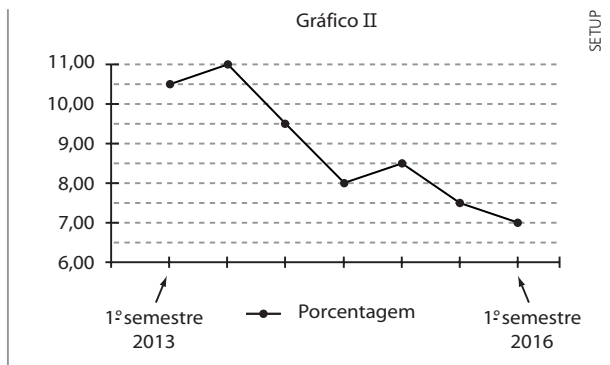
Desenvolvimento

- Para realizar esta atividade, o professor deve dividir a classe em duplas, fornecendo, para cada uma, o texto a seguir acompanhado dos gráficos I e II e disponibilizar um tempo para que todos leiam, com atenção.

Texto e gráficos

Em certo país, preparando-se para as novas eleições, o governo estava interessado em divulgar o resultado de suas ações na criação de novos empregos, durante os sete semestres já concluídos de sua gestão.

Para isso, veiculou, em uma propaganda governamental, o gráfico I, que mostra a variação da taxa de desemprego da população economicamente ativa entre o 1º semestre de 2013 e o 1º semestre de 2016.

Quase na mesma data, um artigo publicado em um portal da internet mostrava a variação da taxa de desemprego da população economicamente ativa, na gestão atual do governo. O artigo continha o gráfico II em seu conteúdo.

Depois da leitura, os estudantes deverão expor o que observaram nos dois gráficos. Algumas questões podem orientar essa discussão em sala de aula:

- Os gráficos mostram a mesma informação?
- Existem diferenças entre os gráficos I e II? Indique, em caso afirmativo, a(s) diferença(s) entre eles.
- Em uma primeira leitura do gráfico I, poder-se-ia concluir que houve uma queda brusca na taxa de desemprego, principalmente nos dois primeiros anos da gestão atual do governo. A que se deve essa conclusão?

O objetivo dessas questões é levar os estudantes a concluir que uma informação pode ser mais (ou menos) valorizada, dependendo dos interesses de quem a divulga. A unidade de comprimento utilizada em cada eixo do gráfico I dá, ao leitor, a sensação de uma queda **brusca** na taxa de desemprego. No gráfico II observamos também a mesma queda na taxa de desemprego, porém visualmente menos acentuada.

Atividade 2: A função afim e a densidade demográfica

Objetivos

- Exercitar a construção e interpretação de gráficos.
- Identificar uma propriedade característica da função afim: o acréscimo linear, ligado ao fato de que, nessa função, a taxa média de variação é constante.
- Reconhecer a densidade demográfica como exemplo de uma razão.
- Vivenciar uma atividade de integração com outra área do conhecimento, a Geografia, ao tratar da evolução da população brasileira ao longo de mais de um século.

Material

- Régua, lápis, borracha, papel sulfite ou quadriculado e calculadora.
- Opcionalmente, havendo possibilidade, é interessante dispor de um *data-show* a fim de que o gráfico possa ser mostrado em sala de aula, proporcionando socialização e visualização mais adequadas.

Número de aulas: 3 a 4.

Desenvolvimento

1ª etapa

O professor deve fornecer a todos os estudantes a tabela seguinte, que contém dados sobre a densidade demográfica (número de habitantes por km²) no Brasil, no período de 1872 a 2010.

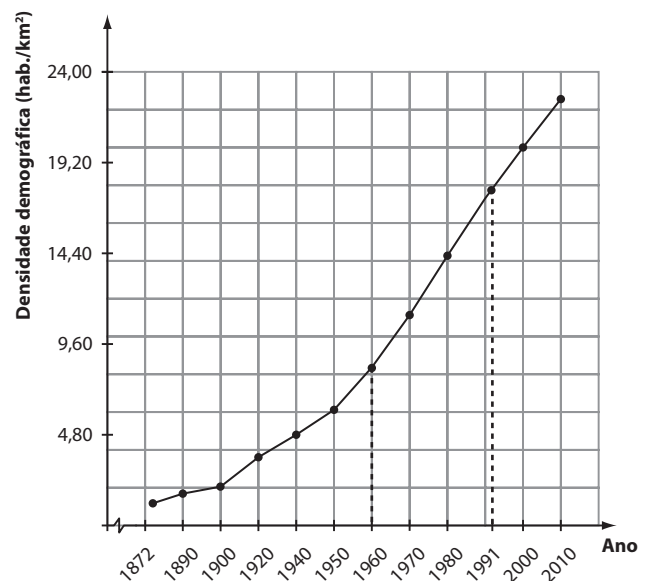
Tabela 1

Ano	Densidade demográfica (hab./km²)
1872	1,17
1890	1,68
1900	2,05
1920	3,6
1940	4,84
1950	6,1
1960	8,34
1970	11,1
1980	14,23
1991	17,26
2000	19,92
2010	22,43

Fonte: Banco de Dados Séries Estatísticas & Séries Históricas do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Disponível em: <seriesestatisticas.ibge.gov.br/series.aspx?no=10&op=0&vcodigo=POP117&t=densidade-demografica>. Acesso em: 14 abr. 2016.

É interessante comentar com a classe que o primeiro Censo Demográfico Nacional ocorreu em 1872. Com a criação do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), em 1935, ficou estabelecido que os censos tivessem periodicidade decenal, conforme consta na tabela 1. A única exceção a essa periodicidade ocorre no censo de 1991 (que deveria ter sido realizado em 1990).

O professor deve pedir aos estudantes que representem em um gráfico cartesiano a variação das duas grandezas, cujos valores são dados na tabela 1: ano e densidade demográfica. Os estudantes deverão marcar os pontos correspondentes no plano cartesiano, unindo-os por segmentos de reta, construindo, dessa maneira, um gráfico de linhas.

Os estudantes deverão obter um gráfico semelhante ao mostrado a seguir.

Se houver material apropriado, é interessante apresentar o gráfico anterior para que os estudantes o comparem com o gráfico construído por eles. Caso contrário, o professor deve, durante a construção do gráfico, circular pela classe e esclarecer dúvidas.

Em seguida, o professor deve propor para a classe a seguinte situação-problema: É possível estimar, sem fazer medições com a régua, a densidade demográfica brasileira em 1973? E em 1985? Que suposições são necessárias para a obtenção dessas estimativas?

Se necessário, fornecer, depois de um tempo de reflexão dos estudantes, a informação de que, entre 1960 e 1991, os pontos do gráfico estão praticamente alinhados.

Solução:

Para resolver esse problema, os estudantes deverão reconhecer e admitir que, no período de 1960 a 1991, o aumento da densidade demográfica a cada censo é praticamente constante, isto é, o acréscimo pode ser considerado **linear**.

Tabela 2

Ano	1960	1970	1980	1991
Densidade demográfica (hab./km²)	8,34	11,1	14,23	17,26

Observe que o acréscimo, a cada censo, é aproximadamente igual a 3 habitantes por km². Pode-se também trabalhar com os valores da tabela 2, arredondados para o número inteiro mais próximo (o que pode ser observado na tabela 3):

Tabela 3

Ano	1960	1970	1980	1991
Densidade demográfica (hab./km²)	8	11	14	17

Caso o professor deseje ilustrar essa propriedade, pode solicitar aos estudantes que calculem a taxa média de variação da densidade demográfica nos períodos a seguir. Nesses casos, poderão ser usados os dados exatos (tabela 2) ou aproximados (tabela 3).

- 1960 a 1991: $\frac{17-8}{31} \simeq 0{,}29 \left(0{,}29 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}\right)$
- 1960 a 1980: $\frac{14-8}{20} \simeq 0{,}3 \left(0{,}3 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}\right)$
- 1970 a 1991: $\frac{17-11}{21} = \frac{6}{21} \simeq 0{,}286 \left(0{,}286 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}\right)$
- 1960 a 1970: $\frac{11-8}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \left(0{,}3 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}\right)$
- 1970 a 1980: $\frac{14-11}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3 \left(0{,}3 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}\right)$
- 1980 a 1991: $\frac{17-14}{11} = \frac{3}{11} \simeq 0{,}273 \left(0{,}273 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}\right)$

Verifica-se, desse modo, que a taxa média de variação é praticamente constante.

Sabendo que a taxa média de variação constante é a propriedade fundamental que caracteriza a função afim e considerando um acréscimo na densidade de $0{,}3 \frac{\text{hab./km}^2}{\text{ano}}$, é possível resolver a situação-problema proposta anteriormente, ou seja, estimar as densidades demográficas em 1973 e em 1985:

- Estimativa da densidade demográfica para o ano de 1973 (d_{1973}):
  Em 1970 temos: $d_{1970} = 11{,}1$ habitantes/km²
  Em 1973 temos: $d_{1973} = 11{,}1 + 3 \cdot 0{,}3 = 11{,}1 + 0{,}9 \Rightarrow$
  $\Rightarrow d_{1973} = 12$ habitantes/km²
- Estimativa da densidade demográfica para o ano de 1985 (d_{1985}):
  Em 1980 temos: $d_{1980} = 14{,}23$ habitantes/km²
  Em 1985 temos: $d_{1985} = 14{,}23 + 5 \cdot 0{,}3 \Rightarrow$
  $\Rightarrow d_{1985} = 15{,}73$ habitantes/km² (*)

Poderíamos também ter tomado como referência outro ano para estimar a densidade demográfica em 1985, por exemplo, o ano de 1970:

Em 1970 temos: $d_{1970} = 11{,}1$ habitantes/km²
Em 1985 temos: $d_{1985} = 11{,}1 + 15 \cdot 0{,}3 \Rightarrow$
$\Rightarrow d_{1985} = 15{,}6$ habitantes/km² (**)

Se julgar necessário, comentar com os estudantes que a pequena diferença entre os valores (*) e (**) deve-se às suposições estabelecidas para se determinar o acréscimo anual na densidade demográfica.

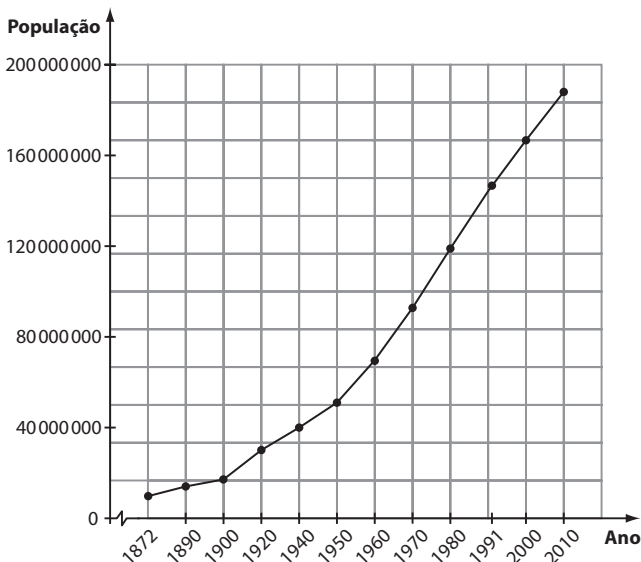
2ª etapa

De posse da tabela 1, o professor deve pedir aos estudantes que, com o auxílio de uma calculadora, estimem a população brasileira nos anos destacados nessa tabela.

Para isso, eles deverão conhecer a área da superfície territorial brasileira, que será admitida constante e igual a 8 514 876 km² (o Acre só foi incorporado definitivamente ao território brasileiro em 1903).

Por meio da razão (densidade demográfica = $= \frac{\text{número de habitantes}}{\text{número de quilômetros quadrados}}$, é possível efetuar uma estimativa, para cada ano, da população brasileira.

Em seguida, o professor deve pedir à turma que, depois de efetuados os cálculos, construam um gráfico para representar a variação da população brasileira nesse período.

Os estudantes deverão apresentar um gráfico semelhante ao seguinte:

Há considerações importantes a fazer: por exemplo, a densidade demográfica em 2010 (22,43 habitantes/km²) é praticamente o dobro da densidade demográfica de 1970 (11,1 habitantes/km²).

Como consequência, a população do Censo de 2010 deve ser aproximadamente o **dobro** da população do Censo de 1970.

Atividade 3: Função do 1º grau de demanda e oferta

Objetivos

- Utilizar as funções polinomiais do 1º grau para modelar a demanda e a oferta de um produto em função de seu preço de venda.
- Determinar o ponto de equilíbrio do mercado e interpretar o seu significado.

Material

- Material escolar básico (papel, lápis e borracha).

Número de aulas: 2.

Desenvolvimento

O professor deve organizar os estudantes em duplas ou trios e distribuir, para cada equipe, o texto seguinte. O professor pode, alternativamente, pedir para os estudantes pesquisarem o significado dos conceitos de demanda e oferta, dispensando, desse modo, o texto.

> A demanda é a relação entre o preço de um bem e a quantidade demandada pelos compradores. [...]
>
> Segue diretamente da lei de demanda que quando o preço de um produto sobe a demanda diminui e vice-versa. Em geral, a demanda de um produto, assim como outras quantidades estudadas em Economia, depende de inúmeras variáveis. Por exemplo, a demanda de um produto depende do preço, da quantidade ofertada do produto, do preço de possíveis substitutos do produto, da renda, hábitos e preferências dos consumidores. Nestas notas, assumiremos que todas as funções a estudar dependem somente de uma variável, permanecendo as outras constantes.
>
> Se denotamos por **p** o preço unitário de um produto e por **x** a quantidade demandada deste produto oferecido no mercado por uma empresa, então a função x = f(p) que os relaciona é chamada função de demanda.
>
> A função de demanda define a relação que existe entre a quantidade oferecida e o preço do produto. Logo, a função demanda descreve o comportamento do consumidor. A quantidade demandada de um bem é aquela que os compradores desejam e podem comprar a determinado preço.
>
> [...]
>
> A oferta é a relação entre o preço de um bem e a quantidade do mesmo que é oferecida pelos produtores. A lei de oferta diz: se tudo permanecer constante, a oferta de um produto, durante um período de tempo, varia diretamente proporcional ao preço.
>
> A oferta de um produto depende essencialmente da quantidade, do preço e do custo do produto, da tecnologia com que se produz o produto, dos concorrentes, do clima etc. Como antes, consideramos estas variáveis como constantes, exceto uma.
>
> Se denotamos por **p** o preço unitário de um produto e por **x** a quantidade do produto oferecida no mercado, então a função p = f(x) que os relaciona é chamada função de oferta.
>
> A função de oferta define a relação que existe entre o preço de mercado de um produto ou bem e a quantidade desse mesmo produto ou bem que os produtores estão dispostos a produzir e a vender.
>
> A função de oferta descreve o comportamento do produtor.
>
> VILCHES, Maurício A. *Cálculo para economia e administração*: volume I. Disponível em: <www.ime.uerj.br/~calculo/Ecomat/cap3.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2016.

Há vários modelos matemáticos usados na modelagem das funções demanda e oferta, sob a condição apresentada. Os mais simples utilizam as funções do 1º grau.

Depois de disponibilizar algum tempo para a leitura do texto, o professor deve propor aos estudantes as seguintes questões.

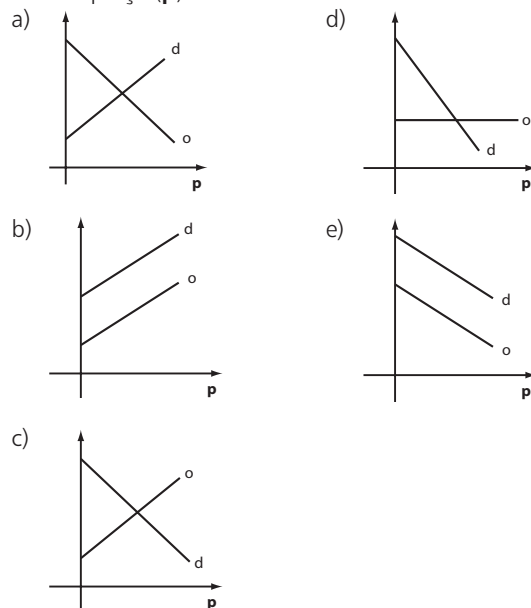
1) Qual dos gráficos seguintes melhor representa as funções demanda (**d**) e oferta (**o**) de um produto em função do seu preço (**p**) de venda?

a)

d)

b)

e)

c)

Solução:
Em geral, quando o preço de um produto aumenta, então a demanda (procura) por ele diminui. Assim, a função demanda é decrescente. Já em relação à oferta, quando o preço de um produto no mercado aumenta, então o interesse do vendedor (ou produtor) em oferecer o produto para consumo também aumenta. Assim, a função oferta é crescente. Logo, o gráfico do item *c* é o que melhor representa as funções demanda e oferta.

2) Um comerciante observou que, ao preço unitário de venda de R$ 72,00 são vendidas 144 bermudas durante um mês; ao preço de R$ 48,00 são vendidas 32 bermudas a mais no mês. Supondo linear a relação entre o preço (**p**) e a quantidade demandada (**x**), obtenha a lei que expressa **p** em função de **x**.

Solução:

p	x
72	144
48	176

$$p = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 72 = 144\,a + b \\ 48 = 176\,a + b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \text{ e } b = 180$$

Daí, $p = -\frac{3}{4}x + 180$

3) O comerciante da questão anterior estima que, ao preço de venda de R$ 80,00, podem ser ofertadas, em um mês, 210 bermudas e, ao preço de R$ 60,00, 170 bermudas. Qual é a lei da função afim que relaciona o preço (**p**) em função da quantidade ofertada (**x**)?
Solução:

p	x
80	210
60	170

$$p = mx + n \Rightarrow \begin{cases} 80 = m \cdot 210 + n \\ 60 = m \cdot 170 + n \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \text{ e } n = -25$$

Daí, $p = \frac{1}{2}x - 25$

4) O ponto de equilíbrio de mercado é atingido quando o preço do produto iguala a quantidade demandada e a quantidade ofertada. Graficamente, o ponto de equilíbrio é o ponto de interseção dos gráficos das funções demanda e oferta. Determine esse ponto para as funções definidas nas questões 2 e 3.
Solução:
$-\frac{3}{4}x + 180 = \frac{1}{2}x - 25 \Rightarrow x = 164$ unidades
Substituindo $x = 164$ na função demanda (ou oferta) obtemos $p = 57$ reais.
Logo, o ponto de equilíbrio é (164, 57).

5) O que ocorre na relação demanda × oferta se o preço de venda do produto for R$ 51,00?
Solução:
A demanda será: $51 = -\frac{3}{4}x + 180 \Rightarrow x = 172$ bermudas
A oferta será: $51 = \frac{1}{2}x - 25 \Rightarrow x = 152$ bermudas
Como a demanda é maior que a oferta, a tendência é que ocorra um aumento do preço de venda em direção ao ponto de equilíbrio.

6) O que ocorre na relação demanda e oferta se o preço de venda do produto for R$ 69,00?
Solução:
A demanda será: $69 = -\frac{3}{4}x + 180 \Rightarrow x = 148$ bermudas
A oferta será: $69 = \frac{1}{2}x - 25 \Rightarrow x = 188$ bermudas
Como a oferta é maior que a demanda, a tendência é que os vendedores reduzam o preço de venda (em direção ao ponto de equilíbrio) a fim de se liquidar o estoque.

Fontes de pesquisa: MORETTIN, Pedro A.; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton. *Introdução ao cálculo*: para administração, economia e contabilidade. São Paulo: Saraiva, 2011.; VILCHES, Maurício A. *Cálculo para economia e administração*: volume I. Disponível em: <www.ime.uerj.br/~calculo/Ecomat/cap3.pdf>. Acesso em: 19 abr. 2016.

Atividade 4: Práticas sociais: Matemática nas academias

Objetivos

- Reconhecer a importância da validação empírica de uma propriedade.
- Comparar os resultados obtidos por processos práticos e teóricos.
- Conhecer outra unidade de medida de massa.

Material

- Material escolar básico (papel, lápis e borracha).

Número de aulas: 2.

Desenvolvimento

O professor deve separar a turma em duplas, e distribuir a cada uma o texto seguinte.

Texto

Na nova academia em que Marcel treina, os aparelhos estão com carga em libras (lb). O professor de Marcel ensinou uma maneira rápida e conhecida nas academias para converter lb em kg de maneira aproximada:

"Você deve dividir o valor que consta em libras por 2, e do resultado obtido, tirar 10%. Por exemplo, 200 lb equivalem a aproximadamente 90 kg, pois 200 ÷ 2 = 100; 100 − 10% · 100 = 90."

Chegando em casa, Marcel ficou interessado em saber mais sobre a libra. Descobriu que a libra é uma unidade de massa usada em países de língua inglesa, como EUA, Canadá, Reino Unido etc., e 1 libra (1 lb) equivale a 453,59237 g. Dessa forma, ele concluiu que para saber a massa exata, em quilogramas, basta fazer uma regra de três.

Após a leitura do texto, o professor deve esclarecer eventuais dúvidas. Na sequência, os estudantes deverão responder às seguintes questões:

1) Marcel usou, no treino, uma máquina com a carga ajustada de 130 lb. Usando os dois métodos apresentados, obtenha o valor da carga em quilogramas. Calcule o módulo da diferença dos valores obtidos.
Solução:
Método do professor:
$130 \div 2 = 65$; $65 - 6{,}5 = 58{,}5$; $58{,}5$ kg
Método teórico:
$$\begin{cases} 1 \text{ lb} \text{ — } 453{,}59237 \text{ g} \\ 130 \text{ lb} \text{ — } x \end{cases} \Rightarrow x \simeq 58967 \text{ g} = 58{,}967 \text{ kg}$$
O módulo da diferença é:
$|58{,}5 - 58{,}967| = |-0{,}467| = 0{,}467$

2) Determine uma fórmula para encontrar a massa (**q**), em quilogramas, a partir do valor da massa (**l**) em libras, usando o método do professor de Marcel.
Solução:
$$q = \frac{l}{2} - 0{,}1 \cdot \frac{l}{2} = 0{,}9 \cdot \frac{l}{2} \Rightarrow q = \frac{9l}{20}$$

3) Marcel se lembrou que, na academia antiga, costumava usar um aparelho com carga ajustada em 72 kg. Qual será a carga que ele usará, em libras, de acordo com o método sugerido por seu professor?
Solução:
$$72 = \frac{9l}{20} \Rightarrow l = 160 \text{ lb}$$

4) Ao usar a fórmula prática para se transformar x libras em quilogramas, há um erro absoluto **E**, definido por $E = |V_1 - V_2|$ em que $\mathbf{V_1}$ representa o valor, em quilogramas, obtido pelo método do professor, e $\mathbf{V_2}$ o valor, em quilogramas, obtido por meio da regra de três.
Determine o intervalo de variação de **x**, com $x \in \mathbb{N}^*$, para que o erro absoluto seja menor que 0,5 kg.
Considere $1 \text{ lb} \simeq 453$ g.
Solução:
Método do professor: $V_1 = \frac{9x}{20}$ kg $= (0{,}45 \cdot x)$ kg
Método teórico:
$$\begin{cases} 1 \text{ lb} \text{ — } 453 \text{ g} \\ x \text{ lb} \text{ — } V_2 \end{cases} \Rightarrow V_2 = (x \cdot 453) \text{ g} = (0{,}453x) \text{ kg}$$
$|V_1 - V_2| = |0{,}45x - 0{,}453x| = |-0{,}003x| = 0{,}003 \cdot |x|$
Devemos ter:
$0{,}003 \cdot |x| < 0{,}5 \Rightarrow |x| < 166{,}\overline{6} \Rightarrow -166{,}\overline{6} < x < 166{,}\overline{6}$
Como $x \in \mathbb{N}^*$, devemos ter $x < 166$.

Atividade 5: Os índices de obesidade, a Matemática, a Biologia e a Educação Física

Objetivos

- Utilizar as definições de potências e suas propriedades na resolução de problemas ligados aos índices de avaliação da obesidade (IMC e IAC).
- Resolver equações e inequações do 1º grau em situações-problema.
- Tomar consciência dos danos à saúde causados pela obesidade e da importância de uma alimentação balanceada e saudável.
- Vivenciar uma atividade interdisciplinar relacionando a Matemática com a Educação Física e a Biologia.

Material

- Além do material escolar básico (papel, lápis e borracha), será necessário o uso de calculadoras comuns.
- Para as medições nas aulas de Educação Física, deverão ser providenciadas fitas métricas e balanças.

Número de aulas: 3 a 5.

Desenvolvimento

O professor deve distribuir o texto a seguir aos estudantes e realizar a leitura em conjunto.

Dados do Ministério da Saúde, obtidos com a Pesquisa Nacional de Saúde (PNS) mostram que mais da metade (56,9%) dos brasileiros com 18 anos ou mais estão com excesso de peso. O índice de obesidade também cresceu nos últimos anos, chegando a 24,4% entre as mulheres e 16,8% entre os homens.

Entre os fatores que favorecem o aumento do sobrepeso e da obesidade no Brasil estão a mudança no padrão de alimentação do brasileiro e o menor tempo dedicado a atividades físicas.

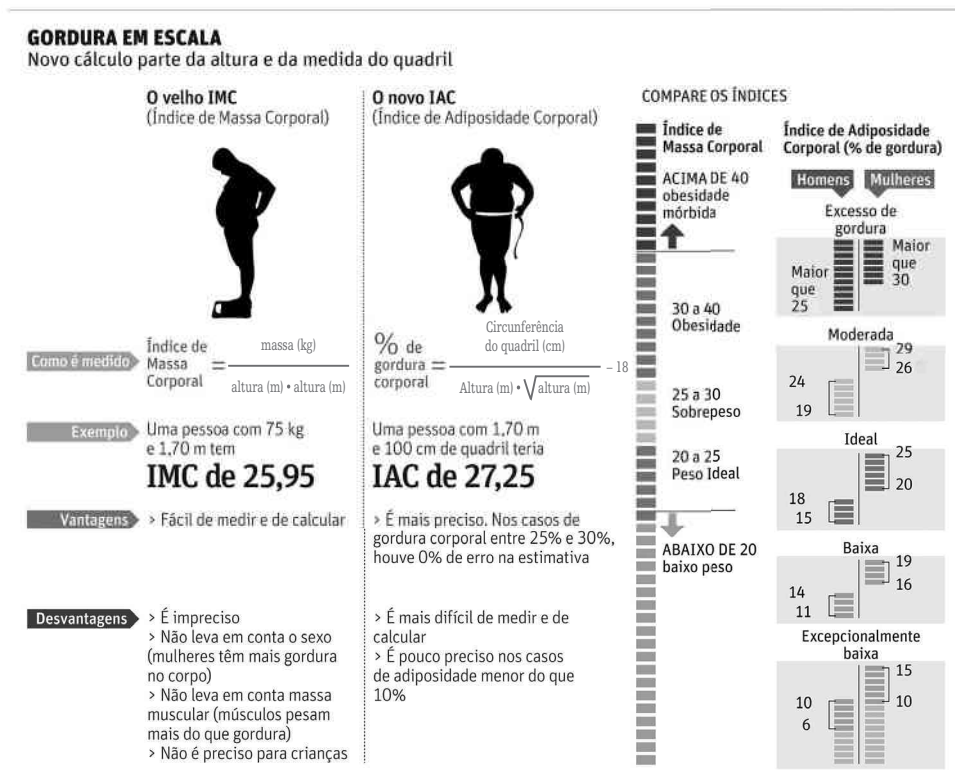
A obesidade é um fator de risco para a saúde e tem relação direta com altos níveis de gordura e açúcar no sangue, excesso de colesterol e pré-diabetes. Pessoas obesas têm mais chance de adquirir doenças cardiovasculares.

O Ministério da Saúde, por meio de parcerias diversas, tem investido na promoção de hábitos saudáveis: metas de redução do consumo excessivo de sal, planos de combate ao tabagismo, construção de polos com infraestrutura e profissionais qualificados para a orientação de atividades físicas e de lazer e melhoria da qualidade de vida do brasileiro.

O critério mais conhecido para medir os estados de obesidade de uma pessoa é o IMC (Índice de Massa Corporal), que, por ser de fácil determinação, é usado há muito tempo. Mas não há unanimidade quanto ao uso do IMC apenas para caracterizar um estado de obesidade: indivíduos com maior massa muscular podem ter o mesmo IMC de indivíduos obesos.

Para caracterizar de forma mais ampla o estado de obesidade de uma pessoa, associa-se o valor do IMC a outro índice – bem mais recente –, o IAC (Índice de Adiposidade Corporal).

Veja, a seguir, uma comparação completa entre os dois índices:

Fontes de pesquisa: Ministério da Saúde; *Folha de S.Paulo*, 04/03/2011.

Na aula de Educação Física, se possível acompanhados também pelo professor de Matemática, os estudantes devem fazer as medições necessárias para se determinar seu IMC e seu IAC. Para isso, eles devem ser divididos em grupos escolhidos por eles, e os professores devem ficar atentos para evitar constrangimentos com eventuais estudantes obesos ou abaixo do peso. Será necessário o uso de balanças e fitas métricas.

Cabe ao professor de Educação Física mostrar aos estudantes como efetuar a correta medição da circunferência do quadril para que eles possam fazer as medições dos colegas.

Cada estudante deverá verificar em que classificação se enquadra, tanto no caso do IMC (baixo peso, peso ideal, sobrepeso, obesidade e obesidade mórbida) como no do IAC (excepcionalmente baixa, baixa, ideal, moderada e excesso de gordura).

Nas aulas de Biologia, abre-se a oportunidade de aprofundamento nos seguintes tópicos:

- as fontes de energia para o corpo humano;
- caracterização e formação dos carboidratos, lipídios e proteínas;
- estudo do colesterol: HDL (benéfico para o organismo) e LDL (o que se acumula nas paredes das artérias);
- vantagens de consumir alimentos integrais;
- alimentação saudável;
- benefícios da atividade física;
- algumas doenças associadas à obesidade: hipertensão arterial, risco maior de ocorrência de doenças cardiovasculares etc.

Na aula de Matemática, os estudantes, divididos em grupos de 3 ou 4 componentes, deverão responder às questões seguintes, com a posterior correção e socialização dos procedimentos utilizados. O objetivo agora é explorar os valores obtidos, associados aos cálculos desses índices. Deverão ser usadas, nesta etapa, calculadoras comuns. É interessante lembrar aos estudantes que, no cálculo do IAC, pode-se usar uma expressão equivalente, pois $h \cdot \sqrt{h} = h \cdot h^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{3}{2}}$; $h > 0$. Em alguns exercícios, a outra expressão pode ser mais conveniente.

1) Usando os dois índices, determine a categoria em que se enquadraria uma mulher de 75 kg, 1,69 m de altura e 100 cm de quadril.

Solução:

$$IMC = \frac{75}{1{,}69^2} \Rightarrow IMC \simeq 26{,}26$$

Categoria: sobrepeso.

$$IAC = \frac{100}{1{,}69^{\frac{3}{2}}} - 18 = \frac{100}{\left(\frac{169}{100}\right)^{\frac{3}{2}}} - 18 = \frac{100}{\left[\left(\frac{13}{10}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} - 18 =$$

$$= \frac{100}{\left(\frac{13}{10}\right)^3} - 18 \simeq 45{,}51 - 18 = 27{,}51$$

Categoria: gordura moderada.

2) Usando os dois índices, determine a categoria em que se enquadra um homem de 80 kg, 1,80 m de altura e 95 cm de quadril. Considere $\sqrt{5} \simeq 2{,}2$.

Solução:

$$IMC = \frac{80}{1{,}8^2} \Rightarrow IMC \simeq 24{,}7$$

Categoria: peso ideal.

$$IAC = \frac{95}{1{,}8^{\frac{3}{2}}} - 18 = \frac{95}{\left(\frac{18}{10}\right)^{\frac{3}{2}}} - 18 = \frac{95}{\left(\frac{9}{5}\right)^{\frac{3}{2}}} - 18 =$$

$$= \frac{95}{\frac{9}{5} \cdot \sqrt{\frac{9}{5}}} - 18 \simeq \frac{95}{\frac{9}{5} \cdot \frac{3}{2{,}2}} - 18 \simeq 38{,}7 - 18 = 20{,}7$$

Categoria: gordura moderada.

3) Uma pessoa mede 1,70 m. Entre que valores poderá variar a sua massa para que, segundo o IMC, ela esteja com o peso ideal?

Solução:

Na classificação peso ideal, devemos ter:

$$20 \leqslant \frac{x}{1{,}7^2} \leqslant 25 \Rightarrow 57{,}8 \text{ kg} \leqslant x \leqslant 72{,}25 \text{ kg}$$

A massa dessa pessoa, em quilogramas, pode variar dentro do intervalo [57,8; 72,25].

4) Considere um homem de 1,96 m de altura. A partir de quais valores da circunferência de seu quadril ele estará com excesso de gordura?

Solução:

$$IAC > 25 \Rightarrow \frac{x}{1{,}96 \cdot \sqrt{1{,}96}} - 18 > 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1{,}96 \cdot 1{,}4} > 43 \Rightarrow x > 117{,}99 \text{ cm}$$

Assim, se a circunferência medir 118 cm ou mais, ele estará com excesso de gordura.

5) Um atleta de 1,69 m apresenta IAC de 20. Determine:

a) a circunferência de seu quadril;

b) seu IMC, sabendo que ele tem 65 kg.

Solução:

Circunferência do quadril:

$$20 = \frac{x}{1{,}69 \cdot \sqrt{1{,}69}} - 18 \Rightarrow 38 = \frac{x}{1{,}69 \cdot 1{,}3} \Rightarrow x \simeq 83{,}5 \text{ cm}$$

IMC:

$$IMC = \frac{65}{1{,}69^2} \Rightarrow IMC \simeq 22{,}76$$

6) Uma mulher mediu o seu IMC e obteve o valor limite entre as categorias peso ideal e sobrepeso. Sabendo que ela tem 75 kg e tem IAC igual a 28, determine a medida da circunferência de seu quadril. Utilize $\sqrt{3} \simeq 1{,}7$ e $\sqrt[4]{3} \simeq 1{,}3$.

Solução:

Observe que o valor limite citado é de 25. Temos:

$$IMC = \frac{75}{h^2} \Rightarrow 25 = \frac{75}{h^2} \Rightarrow h^2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{3} = 1{,}70 \Rightarrow h = 1{,}70 \text{ m}$$

$$IAC = \frac{x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\sqrt{3}}} - 18 \Rightarrow 28 + 18 = \frac{x}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 46 \cdot 1{,}7 \cdot 1{,}3 \Rightarrow x = 101{,}66 \text{ cm}$$

7) Analise e julgue em verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**) as situações **a** e **b** a seguir:

a) Se um homem com 75 kg, 1,70 m e 100 cm de quadril conseguir, por meio de dieta e exercícios, reduzir em 15% sua circunferência do quadril, ele ficará com IAC ideal. Considere $\sqrt{1{,}7} \simeq 1{,}3$.

Solução:

A afirmação é falsa, pois seu novo IAC será:

$$IAC = \frac{85}{\sqrt{1{,}7} \cdot 1{,}7} - 18 = \frac{85}{1{,}3 \cdot 1{,}7} - 18 \simeq 20{,}46$$

Categoria: gordura moderada.

b) Dois amigos têm exatamente a mesma massa e a altura de um é 10% maior que a altura do outro. O IMC do mais alto é cerca de 17% menor que o IMC do seu amigo.

Solução:

A afirmação é verdadeira:

O IMC do mais baixo é: $I_1 = \frac{x}{h^2}$

O IMC do mais alto é:

$$I_2 = \frac{x}{(1{,}1\ h)^2} = \frac{x}{1{,}21\ h^2} = \frac{1}{1{,}21} \cdot \frac{x}{h^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow I_2 \simeq 0{,}8264 I_1 \simeq 0{,}83 I_1$

Assim, o índice de massa corpórea do mais alto é 17% ($1 - 0{,}17 = 0{,}83$) menor que o de seu amigo (mais baixo).

Atividade 6: As funções exponencial e logarítmica nos cálculos de datação radioativa

Objetivos

- Utilizar os conceitos estudados nos capítulos de função exponencial e função logarítmica para resolver problemas envolvendo outras áreas do conhecimento.
- Aprofundar as discussões apresentadas no capítulo 7 sobre função exponencial e meia-vida de um isótopo radioativo.
- Conhecer a técnica de datação da idade de um material por meio do método do carbono-14, usada em Arqueologia e Antropologia.
- Exercitar habilidades como leitura e interpretação de textos científicos.

Material

- Material básico escolar (papel, lápis e borracha). Opcionalmente, poderá ser usada a calculadora científica para obtenção de valores de alguns logaritmos com várias casas decimais, a fim de melhorar as aproximações e os resultados.

Número de aulas: 3 a 4.

Desenvolvimento

O professor deve separar a turma em grupos de 3 ou 4 estudantes e distribuir a cada grupo o texto seguinte.

Datando com o carbono-14

A datação por carbono-14 é um método usado pelos cientistas, principalmente arqueólogos, antropólogos e químicos, para determinar a idade aproximada dos mais diversos artefatos (ossos, manuscritos antigos, tecidos vegetais etc.).

Os especialistas estimam que esse método funciona bem para datações de objetos que tenham entre 100 e 40 000 anos de idade aproximadamente.

Vamos dar uma ideia de como isso funciona. O carbono-14 é radioativo e se desintegra produzindo nitrogênio-14. Sua meia-vida é de 5730 anos, isto é, a cada 5730 anos restará apenas metade dos átomos de carbono-14 (indicaremos por C-14). Os seres vivos recebem o C-14 através de alimentos e água e mantêm um nível constante deste elemento no corpo enquanto permanecem com vida. Quando morrem, o C-14 que se desintegra não é mais substituído, de modo que o nível de C-14 diminui pela metade a cada 5730 anos até ser praticamente nulo. Por meio de uma moderna técnica de medição é possível calcular o nível de C-14 em uma amostra e, através dela, podemos estimar o tempo necessário para que o nível de C-14 existente no corpo antes de sua morte pudesse chegar a esse nível medido.

Essa técnica valeu a Willard Frank Libby (1908-1980) o Prêmio Nobel de Química em 1960.

Fonte de pesquisa: FARIAS, Robson F. A Química do tempo: Carbono-14. *Química nova na escola*. n. 16, novembro, 2002. Disponível em: <qnesc.sbq.org.br/online/qnesc16/v16_A03.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2016.

Com base no texto anterior e na seção *Aplicações* (Meia-vida e radioatividade) resolva os seguintes problemas:

1) Em um pedaço de carvão vegetal, encontrado em uma cova, verificou-se que a taxa de decomposição do C-14 é $\frac{1}{8}$ da taxa de amostra viva com o mesmo tamanho desse carvão. Qual é a sua idade?

Solução:

Como vimos no texto apresentado no livro na seção *Aplicações*, podemos usar a lei $n = \frac{n_0}{2^x}$, sendo $\mathbf{n_0}$ o número de átomos radioativos de uma amostra viva de C-14, **n** o número de átomos de C-14 medido na amostra de carvão recolhida, e **x** o número de meias-vidas transcorridas.

Do enunciado, temos que $n = \frac{1}{8} n_0$

Daí:

$$\frac{1}{8} n_0 = \frac{n_0}{2^x} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{-3} \Rightarrow x = 3 \text{ meias-vidas ou}$$

$3 \cdot 5730$ anos $= 17\,190$ anos

2) Deseja-se estimar a idade de um material orgânico por datação do C-14. Medições feitas em uma amostra indicam que a quantidade de átomos radioativos de C-14 é 60% da quantidade de átomos radioativos de uma amostra viva do mesmo tamanho desse material.

Faça uma estimativa da idade dessa amostra colhida, considerando $\log 2 \simeq 0{,}3010$ e $\log 3 \simeq 0{,}4771$.

Solução:

Devemos ter $n = \frac{3}{5} n_0$

Daí $\frac{3}{5} n_0 = \frac{n_0}{2^x} \Rightarrow 2^x = \frac{5}{3} \Rightarrow \log 2^x = \log\left(\frac{5}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{10}{2}\right) - \log 3}{\log 2} = \frac{\log 10 - \log 2 - \log 3}{\log 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 - \log 2 - \log 3}{\log 2}$$

Se usarmos as aproximações dadas, temos:

$$x = \frac{1 - 0{,}301 - 0{,}4771}{0{,}301} \simeq 0{,}7372 \text{ (0,7372 meias-vidas)}$$

A idade aproximada dessa amostra é, portanto, $0{,}7372 \cdot 5730$ anos $= 4\,224$ anos.

É interessante discutir com a turma as diferenças obtidas de acordo com as aproximações usadas. Se tivéssemos utilizado $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$, teríamos encontrado:

$$x = \frac{1 - 0{,}3 - 0{,}48}{0{,}3} = \frac{0{,}22}{0{,}3} \simeq 0{,}7333 \text{ (0,7333 meias-vidas)}; \ 0{,}7333 \cdot 5730 \text{ anos} \simeq 4\,202 \text{ anos}$$

Nesse problema, a diferença de 22 anos não interfere na ordem de grandeza do resultado; no entanto, é preciso ficar atento às possíveis distorções em outros problemas que requerem aproximações.

3) Sabendo que 20% de uma substância radioativa decai em 10 anos, qual é a meia-vida dessa substância? Use $\log 2 \simeq 0{,}301$.

Solução:

Se 20% da substância se desintegrou, significa que, após 10 anos, a sua atividade radioativa é de 80% de uma amostra viva de mesmo tamanho dessa substância; isto é, $n = \frac{4}{5} n_0$. Daí:

$\frac{4}{5}n_0 = \frac{n_0}{2^x}$ (**x** é o número de meias-vidas)

$2^x = \frac{5}{4} \Rightarrow \log 2^x = \log\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \log 2 = \log\left(\frac{10}{2}\right) - \log 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \log 2 = 1 - \log 2 - 2 \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1 - 3 \log 2}{\log 2} = \frac{1 - 3 \cdot 0{,}301}{0{,}301} \simeq 0{,}3222$

(0,3222 meias-vidas)

Assim, podemos estabelecer a regra de três:

$\begin{cases} 10 \text{ anos} — 0{,}3222 \text{ meias-vidas} \\ x — 1 \text{ meia-vida} \end{cases} \Rightarrow x \simeq 31 \text{ anos}$

4) Leia o seguinte texto:

Os Manuscritos do Mar Morto

Conta-se que, em 1947, um pastor chamado Mohamed Adh-Dhib descobriu, casualmente, nas estreitas Cavernas de Qumran, próximo ao Mar Morto (na região fronteiriça entre Israel e Jordânia), um conjunto de rolos e pergaminhos de papiro, que viriam a ser conhecidos como os "Manuscritos do Mar Morto".

A coleção de manuscritos é extensa, tendo sido encontrados fragmentos de quase todos os livros da Bíblia Hebraica (correspondentes ao Antigo Testamento). Atualmente, estão guardados no Museu do Livro, em Jerusalém – Israel.

Em 1948, uma vez provada a autenticidade dos pergaminhos, tornou-se fundamental descobrir sua data de confecção, a partir do método do carbono-14. O químico Libby, citado no texto anterior, ficou encarregado de realizar essas medições. Ele constatou que a atividade do carbono-14 nos manuscritos era de aproximadamente 11 dpm · g^{-1} (desintegrações por minuto por grama).

Sabendo que a atividade radioativa do C-14 no tecido vivo é de 14 dpm · g^{-1}, determine a idade aproximada dos Manuscritos do Mar Morto.

Considere $\ell n\ 11 \simeq 2{,}3978$, $\ell n\ 14 \simeq 2{,}6391$ e $\ell n\ 2 \simeq 0{,}6931$.

Solução:

De $n = \frac{n_0}{2^x}$ podemos considerar $n_0 = 14$ dpm · g^{-1}, $n = 11$ dpm · g^{-1} e **x** o número de meias-vidas.

Daí:

$11 = \frac{14}{2^x} \Rightarrow \frac{11}{14} = \frac{1}{2^x} \Rightarrow 2^x = \frac{14}{11} \Rightarrow \ell n\ 2^x = \ell n\left(\frac{14}{11}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \ell n\ 2 = \ell n\ 14 - \ell n\ 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\ell n\ 14 - \ell n\ 11}{\ell n\ 2} = \frac{2{,}6391 - 2{,}3978}{0{,}6931} = \frac{0{,}2413}{0{,}6931} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 0{,}34815$ (0,34815 meias-vidas)

Como a meia-vida do C-14 é 5 730 anos, segue que a idade dos manuscritos é: 0,34815 · 5 730 anos ≃ 1 995 anos.

Atividade 7: Sequências e padrões geométricos

Essa atividade complementa a proposta apresentada na seção *Troque ideias* na introdução ao estudo das progressões, podendo ser realizada antes ou depois do estudo da progressão aritmética.

Objetivos

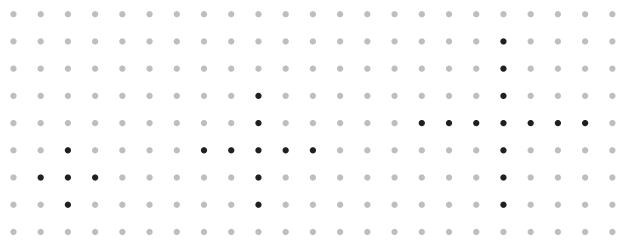
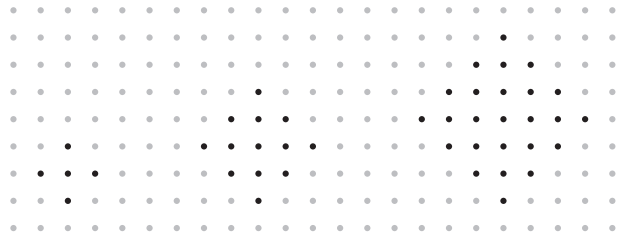
- Observar regularidades em padrões geométricos.
- Formular conjecturas, levantar hipóteses e realizar testes.
- Escrever o termo geral de uma sequência.
- Socializar diferentes soluções para um mesmo problema.

Material

- Material escolar básico (papel, lápis e borracha).
- Caso haja a possibilidade e material adequado, o professor pode utilizar um *data-show* para apresentar aos estudantes as imagens que serão usadas.

Número de aulas: 2 a 3.

Desenvolvimento

O professor deve dividir a classe em grupos e distribuir, a cada estudante, as duas imagens a seguir.

1ª parte da atividade

Os estudantes deverão analisar a sequência de figuras com cuidado, fazendo as observações e anotações que julgarem importantes. Em seguida, deverão responder às seguintes perguntas:

1) Qual é o número de pontos destacados naquela que seria a 5ª figura da sequência? E o número de pontos da 10ª? Represente-as em seu caderno.

Solução:

Observação possível:

n = 1 (1ª figura): há 5 pontos destacados

$\underbrace{4 \cdot 1}_{\text{1 ponto em cada direção (acima, abaixo, à direita, à esquerda)}} + \underbrace{1}_{\text{ponto central}}$

n = 2 (2ª figura): há 9 pontos destacados

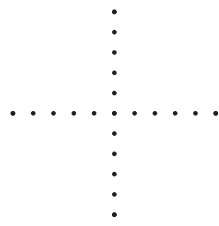
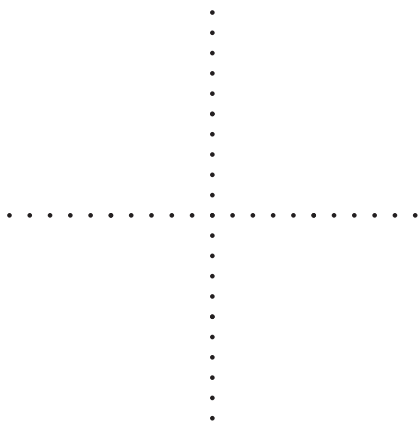
$\underbrace{4 \cdot 2}_{\text{2 pontos em cada direção}} + \underbrace{1}_{\text{ponto central}}$

n = 3 (3ª figura): há 13 pontos destacados

$\underbrace{4 \cdot 3}_{\text{3 pontos em cada direção}} + \underbrace{1}_{\text{ponto central}}$

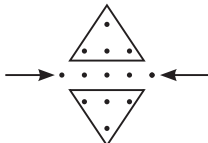
⋮

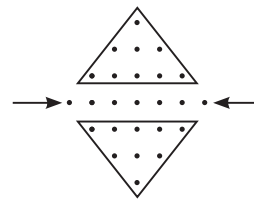
O estudante pode resolver esse problema, mesmo não tendo aprendido progressão aritmética.

5ª figura: $4 \cdot 5 + 1 = 21$ (21 pontos)

10ª figura: $4 \cdot 10 + 1 = 41$ (41 pontos)

2) Nessa sequência, qual é a posição da figura que apresenta 93 pontos destacados?
   Solução:
   Devemos determinar **n** tal que:
   $4 \cdot n + 1 = 93 \Rightarrow n = 23$ (23ª figura)
3) Há alguma figura que apresenta 122 pontos destacados? E 497 pontos destacados?
   Solução:
   $122 = 4 \cdot n + 1 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$ (para essa sequência, não existe uma figura com 122 pontos)
   $497 = 4 \cdot n + 1 \Rightarrow n = 124$ (124ª figura)
4) Qual é a quantidade de pontos destacados na enésima figura, isto é, qual é o termo geral dessa sequência?
   Solução:
   $a_n = 4 \cdot n + 1;\ n \in \mathbb{N}^*$ (termo geral da sequência)

2ª parte da atividade

Após análise, os estudantes deverão responder às questões seguintes:

1) Qual é o número de pontos destacados da 5ª figura? E da 10ª figura?
   Solução:
   Vamos encontrar o termo geral da sequência que represente o número total de pontos em uma figura.
   1º modo: Sem conhecer os conceitos de progressão aritmética:
   Uma possível observação é que, considerando a "horizontal com o maior número de pontos", as figuras são simétricas em relação a essa horizontal.
   Por exemplo, se $n = 2$ (2ª figura), temos:

Total de pontos: $5 + 2 \cdot 4 = 13$

Se $n = 3$ (3ª figura), a quantidade de pontos destacados é:

Total de pontos: $7 + 2 \cdot 9 = 25$

Na 4ª figura, teríamos um total de pontos correspondente a: $9 + 2 \cdot 16 = 41$

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3 + 2 \cdot 1 = (2 \cdot 1 + 1) + 2 \cdot 1^2$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 5 + 2 \cdot 4 = (2 \cdot 2 + 1) + 2 \cdot 2^2$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 7 + 2 \cdot 9 = (2 \cdot 3 + 1) + 2 \cdot 3^2$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 9 + 2 \cdot 16 = (2 \cdot 4 + 1) + 2 \cdot 4^2$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

enésima figura $\Rightarrow a_n = (2 \cdot n + 1) + 2 \cdot n^2 = 2n^2 + 2n + 1$

2º modo: Utilizando conceitos de progressão aritmética.

Outra possibilidade é usar a soma dos **n** primeiros termos de uma progressão aritmética e a simetria da figura (neste caso, o termo "horizontal" corresponde à linha com o maior número de pontos de cada figura).

Para tanto, vamos observar as sequências a seguir:

$n = 1 \Rightarrow \underbrace{3}_{\text{pontos na "horizontal"}} + 2 \cdot 1$

$n = 2 \Rightarrow \underbrace{5}_{\text{pontos na "horizontal"}} + 2 \cdot (1 + 3)$

$n = 3 \Rightarrow \underbrace{7}_{\text{pontos na "horizontal"}} + 2 \cdot (1 + 3 + 5)$

$n = 4 \Rightarrow \underbrace{9}_{\text{pontos na "horizontal"}} + 2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7)$

Em geral, na enésima figura, temos:

$$a_n = \underbrace{2 \cdot n + 1}_{\text{pontos na "horizontal"}} + 2 \cdot \underbrace{(1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1)}_{\text{soma dos } \mathbf{n} \text{ primeiros naturais ímpares}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = 2n + 1 + \frac{\cancel{2} \cdot [1 + (2n - 1)] \cdot n}{\cancel{2}} =$$

$$= 2n + 1 + 2n^2 = 2n^2 + 2n + 1$$

Para responder à pergunta, podemos fazer:

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 61$

$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 = 221$

2) Qual é o termo geral da sequência de pontos destacados, isto é, qual é o número de pontos destacados na figura que ocupa a enésima posição?
   Solução:
   $a_n = 2n^2 + 2n + 1;\ n \in \mathbb{N}^*$
3) Qual é a posição de uma figura que apresenta 313 pontos destacados?
   Solução:
   $313 = 2n^2 + 2n + 1 \Rightarrow n^2 + n - 156 = 0 \Rightarrow n = 12$ (12ª figura)

Essa atividade permite mostrar aos estudantes o fato de que, na Matemática, um mesmo problema pode ser resolvido de formas distintas, utilizando-se ou não de conhecimentos prévios. É bem provável que, na condução dessa atividade, surjam várias alternativas de resoluções para esses problemas.

Atividade 8: Construções com régua e compasso e uma nova fórmula para calcular a área de um triângulo

Objetivos

- Revisar algumas construções geométricas com régua e compasso.
- Determinar, com régua e compasso, o incentro de um triângulo.
- Deduzir uma expressão da área do triângulo em função das medidas de seus lados e da medida do raio da circunferência inscrita.

Material

- Lápis, borracha, régua graduada e compasso.

Número de aulas: 2 a 3.

Desenvolvimento

1ª etapa:

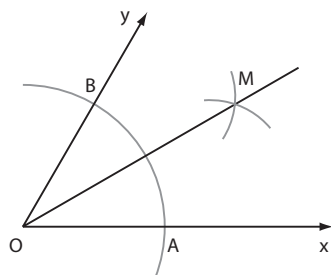
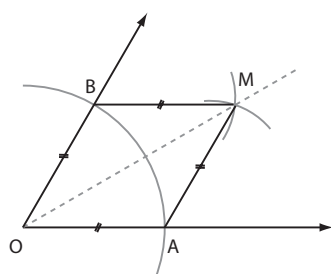
O professor deverá revisar duas construções geométricas com régua e compasso:

I. Dadas duas semirretas ($\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$), de mesma origem **O**, construir a bissetriz do ângulo $x\hat{O}y$:

1º passo: Com a ponta do compasso colocada em **O**, trace um arco de circunferência que intersecta **x** e **y** nos pontos **A** e **B**.

2º passo: Com a ponta do compasso em **A**, trace um arco de circunferência de raio de medida AO e, em seguida, com a ponta do compasso em **B**, trace outro arco de circunferência cujo raio tenha a mesma medida que a do anterior. Da interseção desses dois arcos você obterá um ponto **M**.

3º passo: Traçando a semirreta $\overline{OM}$ você terá obtido a bissetriz procurada, ou seja, você dividiu o ângulo $x\hat{O}y$ em dois ângulos congruentes.

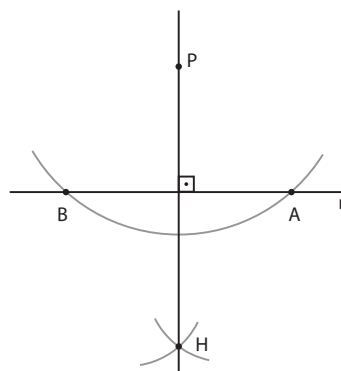
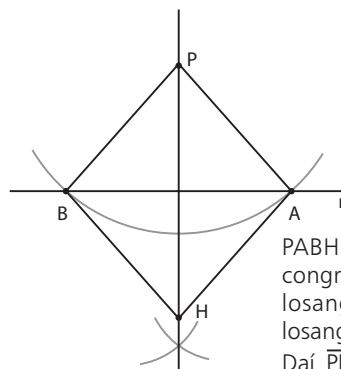
Construção:

Justificativas:

AOBM é um losango pois AO = OB = AM = = BM (raio), $\overline{OM}$ é diagonal e, desse modo, med($A\hat{O}M$) = med($B\hat{O}M$), isto é, $\overline{OM}$ é bissetriz.

II. Dados uma reta **r** e um ponto **P**, P $\notin$ r, construir a reta perpendicular a **r**, traçada por **P**.

1º passo: Com a ponta do compasso em **P**, trace um arco de circunferência de raio de medida **m** que intersecte **r** nos pontos **A** e **B** ($m > d_{P,r}$).

2º passo: Com a ponto do compasso em **A** trace um arco de circunferência de raio de medida **m** e em seguida, com a ponta do compasso em **B**, trace outro raio de circunferência com raio de mesma medida. Da interseção desses dois arcos, você obterá o ponto **H**.

3º passo: Traçando a reta $\overleftrightarrow{PH}$ você terá obtido a perpendicular procurada.

Construção:

Justificativas:

PABH possui quatro lados congruentes ⇒ PABH é um losango e as diagonais do losango são perpendiculares. Daí $\overline{PH} \perp \overline{AB}$.

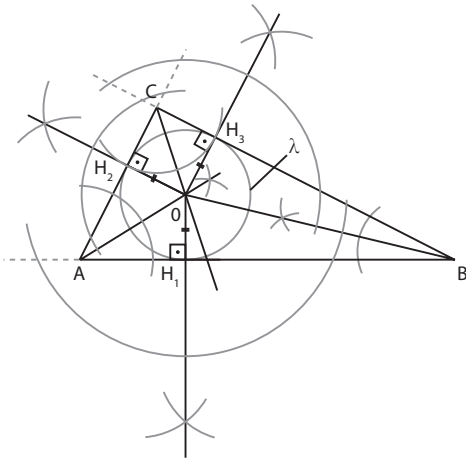
2ª etapa:

Relembrando essas duas construções, o professor deve dividir a turma em equipes que deverão seguir os passos adiante, a fim de obter uma fórmula para se calcular a área de um triângulo em função das medidas do seus lados e da medida do raio da circunferência nele inscrita.

1º passo: Construa em seu caderno um triângulo escaleno ABC, ou seja, um triângulo em que as medidas dos lados a = BC, b = AC e c = AB são, duas a duas, distintas entre si.

2º passo: Trace as bissetrizes internas dos ângulos dos vértices **A**, **B** e **C** desse triângulo e note que elas se intersectam em um mesmo ponto **O**, que é chamado **incentro** do triângulo ABC.

3º passo: Trace $\overline{OH_1}$, $\overline{OH_2}$ e $\overline{OH_3}$: alturas dos triângulos AOB, AOC e BOC, relativas aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

4º passo: Trace a circunferência λ, de centro em **O** e raio $\overline{OH_1}$. Se, até aqui, sua construção foi precisa, você poderá observar que tal circunferência é tangente internamente aos três lados do triângulo ABC nos pontos $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ e $\mathbf{H_3}$, ou seja, $OH_1 = OH_2 = OH_3 = r$ = medida do raio de λ.

5º passo: Lembrando que o perímetro do triângulo ABC é dado por 2p = a + b + c e determinando as áreas dos triângulos AOC, AOB e BOC, você poderá obter a expressão procurada, ou seja, a área do triângulo ABC, em função de seu semiperímetro (**p**) e da medida do raio da circunferência nele inscrita (**r**).

Solução:

$$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle AOB} + A_{\triangle BOC} + A_{\triangle AOC} \quad (*)$$

$$A_{\triangle AOB} = \frac{AB \cdot OH_1}{2} = \frac{c \cdot r}{2}$$

$$A_{\triangle BOC} = \frac{BC \cdot OH_3}{2} = \frac{a \cdot r}{2}$$

$$A_{\triangle AOC} = \frac{AC \cdot OH_2}{2} = \frac{b \cdot r}{2}$$

Voltando em (*), obtemos:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot (a + b + c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{r}{2} \cdot 2p \Rightarrow A_{\triangle ABC} = p \cdot r$$

Assim, deduzimos a fórmula que permite calcular a área de um triângulo em função de seu semiperímetro (**p**) e da medida do raio da circunferência nele inscrita (**r**).

Atividade 9: Estatística e semelhança de triângulos

Objetivos

- Construir e interpretar gráficos estatísticos a partir da análise de um conjunto de dados.
- Aplicar, em uma situação-problema cotidiana, a relação existente entre a razão de semelhança de elementos lineares de triângulos e a razão entre as suas respectivas áreas.
- Ressaltar a importância do cuidado que se deve ter na análise de gráficos nos meios de comunicação.

Material

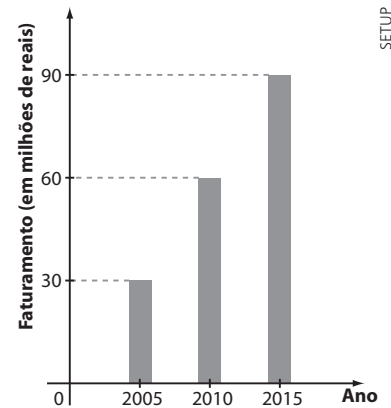
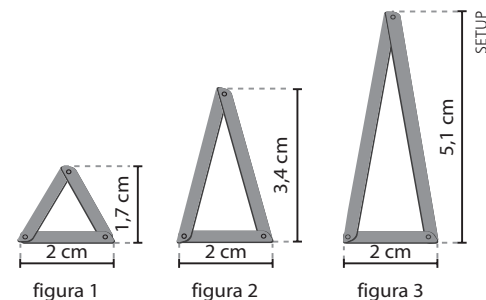
- Papel, caneta, lápis, borracha e régua.

Número de aulas: 2.

Desenvolvimento

O professor deve organizar a turma em grupos de até três estudantes. Cada grupo deverá receber e ler o seguinte texto.

Texto:

O gráfico de barras seguinte mostra a evolução do faturamento anual de uma empresa que fabrica triângulos de segurança para veículos de passeio, usados por condutores para sinalizar, a uma distância segura, alguma situação de emergência envolvendo o veículo.

O departamento de *marketing* pretende mostrar o resultado da empresa num anúncio em uma revista especializada. Para isso, imaginou-se, no lugar das barras do gráfico anterior, construir um pictograma com imagens de triângulos de segurança de dimensões distintas para representar o aumento nas vendas. Foi sugerida a construção de três triângulos com a mesma medida para a base e alturas de medidas proporcionais às vendas. Desse modo, a área da figura 2 seria o dobro da área da figura 1, e a área da figura 3 seria o triplo da área da figura 1, como se observa a seguir:

Analise, do ponto de vista matemático, a ideia sugerida para divulgação dos resultados. Se necessário, construa um novo pictograma.

O professor deve dar tempo para os grupos apresentarem o que foi discutido e decidido. A socialização das ideias deve incluir alguns pontos importantes, destacados a seguir:

- A razão entre os faturamentos da empresa nos anos 2010 e 2005 é dada por: $k_1 = \frac{60\,000\,000}{30\,000\,000} = 2$

A razão entre os faturamentos nos anos 2015 e 2005 é: $k_2 = \frac{90\,000\,000}{30\,000\,000} = 3$

Essas razões podem ser obtidas dividindo-se as medidas dos segmentos mostrados no pictograma, que correspondem às alturas dos triângulos mostrados: $\frac{3,4 \text{ cm}}{1,7 \text{ cm}} = 2$; $\frac{5,1 \text{ cm}}{1,7 \text{ cm}} = 3$

Do ponto de vista matemático, o correto seria construir **triângulos semelhantes**, possibilitando ao leitor maior clareza na interpretação dos resultados, além de evitar eventuais distorções no formato original do triângulo de segurança. Desse modo, seria necessário dobrar também a medida da base do triângulo na figura 2, comparando-se com a medida da base do triângulo da figura 1.

Analogamente, deve-se triplicar a medida da base do triângulo representado na figura 3, em relação à medida da base do triângulo na figura 1. Veja, a seguir, esse novo pictograma, que preserva o formato original do triângulo de segurança:

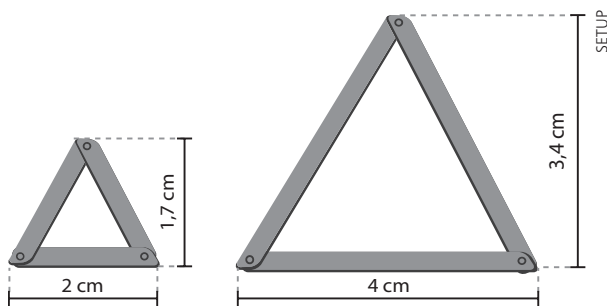
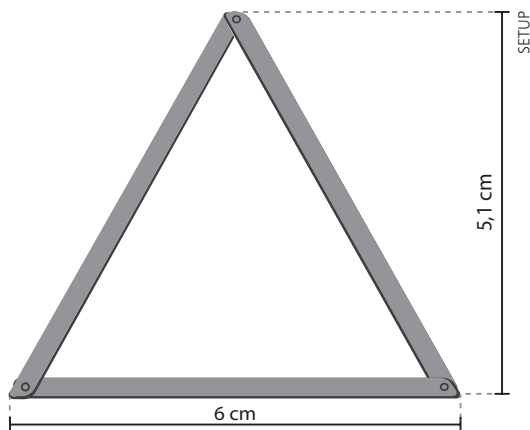
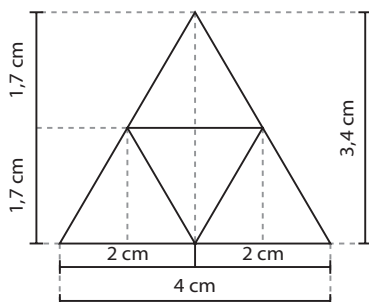



figura 4 figura 5 figura 6

Observe, nesse caso, que:

- Os triângulos representados nas figuras 4 e 5 são semelhantes e a razão de semelhança entre as medidas das bases dos triângulos é igual à razão de semelhança entre as medidas de suas alturas, ou seja: $k = \dfrac{4\text{ cm}}{2\text{ cm}} = \dfrac{3{,}4\text{ cm}}{1{,}7\text{ cm}} \Rightarrow k = 2$
- A razão entre suas áreas é $k^2 = (2)^2 = 4$, como é mostrado na figura seguinte:

- Solicite aos estudantes que comparem o triângulo da figura 6 com o triângulo obtido da figura 4, verificando que são necessários 9 triângulos congruentes ao da figura 4 para cobrir a superfície do triângulo da figura 6, ou seja, $k^2 = 9$.

(Atividade elaborada com base em: *Aplicações da Matemática escolar* – Trabalho conjunto da *Mathematical Association of America* e da *National Council of Teachers of Mathematics*. Trad.: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.)

Atividade 10: Construção de gráficos estatísticos em programas de planilhas eletrônicas

Objetivos

- Familiarizar os estudantes com um tipo de ferramenta digital de trabalho e de fácil acesso, rápido e de prático manuseio, com amplo uso em diversas áreas no mercado de trabalho.
- Usar representações gráficas para organizar e resumir um conjunto de dados.
- Construir algumas representações gráficas específicas (barras, setores e linhas) com base em duas situações apresentadas nesta atividade.

Material

- Será necessário usar os computadores do laboratório de informática do colégio. Recomendamos que, no máximo, três estudantes utilizem cada um dos computadores disponíveis.

Número de aulas: 3 a 4.

Desenvolvimento

O professor deverá comentar inicialmente com a turma que, para essa atividade, será necessário utilizar algum programa de planilha eletrônica (aplicativos para computador que ajudam na organização e análise de dados). Alguns exemplos de aplicativos são o Microsoft Excel (parte integrante do pacote de aplicativos Office), o Calc (parte integrante do pacote de aplicativos Libbre Office) e o Numbers (para usuários de Macintosh, também conhecido como Mac, parte integrante do pacote de aplicativos iWork). Esses programas funcionam com dados representados em uma grade de células dispostas em linhas numeradas e colunas nomeadas com letras (por exemplo, a célula D9 se encontra na 9ª linha da coluna **D**). Cada célula pode conter textos ou dados numéricos. Os aplicativos podem também exibir esses dados por meio de representações gráficas. A construção dessas representações nesses aplicativos é semelhante, podendo haver ligeiras diferenças, que não comprometem o andamento do trabalho. Nessa atividade, serão exibidas imagens de um desses aplicativos apenas como referência e posterior consulta pelo professor, que poderá desenvolver a atividade no aplicativo que preferir. Além disso, de acordo com o programa instalado no computador, pode haver pequenas variações em função da versão instalada.

O professor deve dividir a turma em duplas ou grupos de três estudantes. Para cada equipe, distribuir o texto a seguir, acompanhado da tabela 1. Se preferir, ele poderá reproduzir esse texto e a tabela na lousa (ou quadro de giz).

Texto:

Em um pequeno município, uma pesquisa realizada avaliou o grau de satisfação da população com a administração do prefeito, após um ano de mandato. Foram ouvidos duzentos moradores, que compõem a amostra. O resultado da pesquisa está representado na tabela 1 a seguir.

Tabela 1:

Grau de satisfação	Frequência absoluta
Pouco satisfeito	37
Satisfeito	105
Muito satisfeito	58

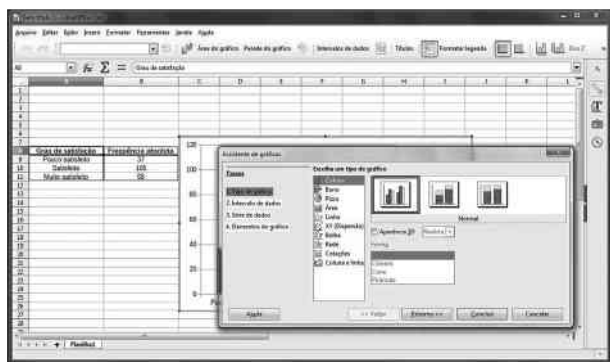
A proposta é construir, usando um dos programas de planilha eletrônica citados anteriormente, um gráfico de colunas, um de setores e um de linhas para representar os dados.

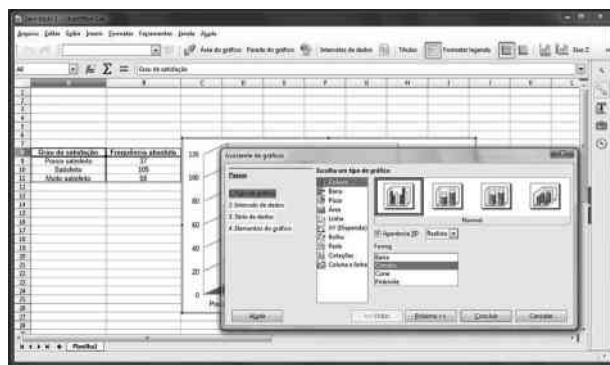
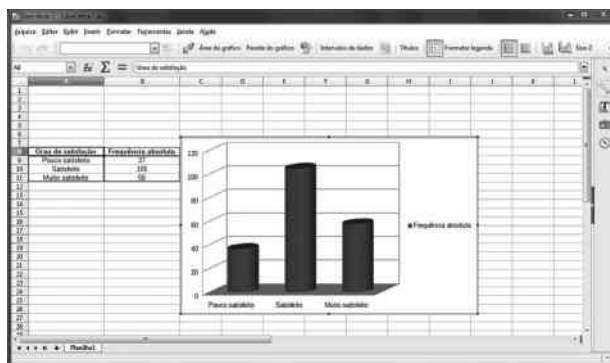
Todos os passos a seguir para a elaboração dos gráficos de colunas, setores e linhas serão desenvolvidos no Calc. É importante ressaltar que esse recurso pode ser realizado nos demais programas citados anteriormente com algumas diferenças.

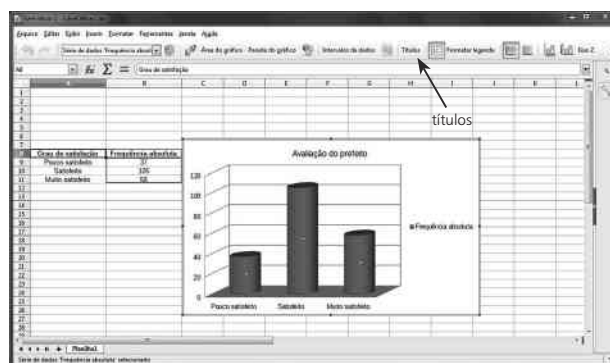
- **Gráfico de colunas**

  O primeiro passo é introduzir, em uma planilha, os dados da tabela 1, a partir de uma célula qualquer, por exemplo, A8, como mostra a figura a seguir.

Na sequência, é preciso selecionar os dados que serão utilizados na construção do gráfico. Para isso, clique e arraste o *mouse*, com o botão apertado, pelas células que compõem a tabela.

Ao clicar na opção *Inserir* no menu superior e, em seguida, no item *Gráfico*, diversas opções de gráficos aparecem numa nova janela. A imagem a seguir mostra como visualizar as opções de gráficos disponíveis: coluna, barra, pizza, área, linha, dispersão, bolha, rede, cotações e coluna e linha.

Selecionando o tipo de gráfico *Coluna*, diferentes opções de gráficos de colunas aparecem. Note que, se clicarmos em *Aparência 3D*, são habilitadas diferentes formas (*Barra*, *Cilindro*, *Cone* e *Pirâmide*).

IMAGENS: COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Ao escolher a primeira opção de gráfico em forma de Cilindro, obtemos o gráfico mostrado a seguir.

Ao clicar no botão *Títulos*, na barra superior, uma nova janela é aberta. Nela é possível inserir nomes para os eixos e um título para esse gráfico, por exemplo *Avaliação do prefeito* ou *Como a população avalia a administração do prefeito?*.

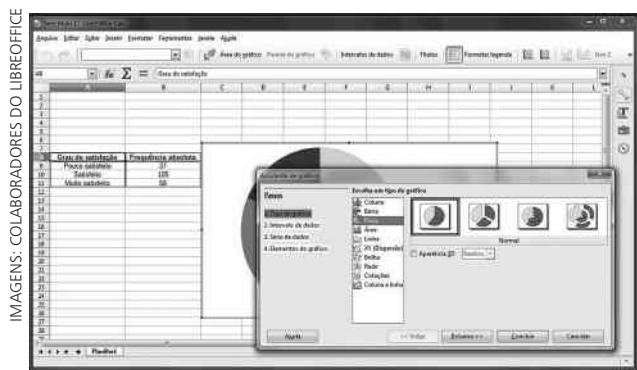
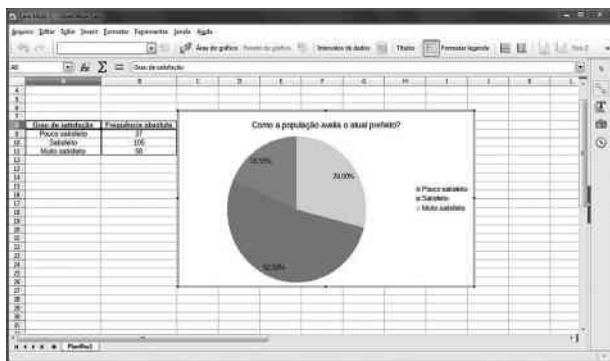
Ressalte aos estudantes que também é possível escolher alguns detalhes da apresentação do gráfico, por exemplo, as cores das colunas. Para tanto, deve-se clicar duas vezes sobre o gráfico, e em seguida clicar na aba *Área*, escolhendo a opção de cor desejada.

Com os mesmos dados da tabela 1, os estudantes podem construir um **gráfico de setores** de acordo com os procedimentos detalhados a seguir.

- **Gráfico de setores**

  Os estudantes devem selecionar previamente a tabela.

  Em seguida, ao clicar na opção *Inserir*, e depois no item *Gráficos*, selecionar a opção *Pizza*. Ao clicar nessa opção, podemos observar diversos modelos de gráficos de setores divididos em duas categorias: 2D (em que são utilizados círculos e setores circulares, conforme visto no capítulo 13 do

livro) ou 3D (nesse caso, são utilizados cilindros no lugar dos círculos). A visualização a seguir permite a observação das categorias 2D.

IMAGENS: COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Ao selecionarmos a opção destacada na imagem (em 2D), obtemos o gráfico mostrado na figura a seguir.

Observe que, nesse gráfico, também foi digitado o título (Como a população avalia o atual prefeito?) e, clicando com o botão direito sobre o gráfico, foram inseridos os rótulos de dados na forma de porcentagens. Nessa opção visualizamos para cada grau de satisfação da tabela 1 as respectivas porcentagens a partir do número de pessoas entrevistadas.

O professor pode comentar com os estudantes que as porcentagens visualizadas no gráfico foram obtidas do seguinte modo:

- a frequência relativa correspondente ao grau de satisfação *Pouco satisfeito* é $\frac{37}{200} = 0{,}185$. Essa porcentagem é 18,5%.
- a frequência relativa correspondente ao grau de satisfação *Satisfeito* é $\frac{105}{200} = 0{,}525$. Essa porcentagem é 52,5%.
- a frequência relativa correspondente ao grau de satisfação *Muito satisfeito* é $\frac{58}{200} = 0{,}29 = 29\%$.

- **Gráfico de linhas**

Na última etapa dessa atividade, a proposta é que os estudantes construam um gráfico de linhas. O professor deve relembrar os estudantes que essa representação gráfica é especialmente útil quando se quer representar a variação dos valores de uma grandeza em um intervalo de tempo.

Cada grupo deverá receber a tabela 2 a seguir. Se preferir, o professor pode reproduzir essa tabela para os estudantes na lousa (ou quadro de giz).

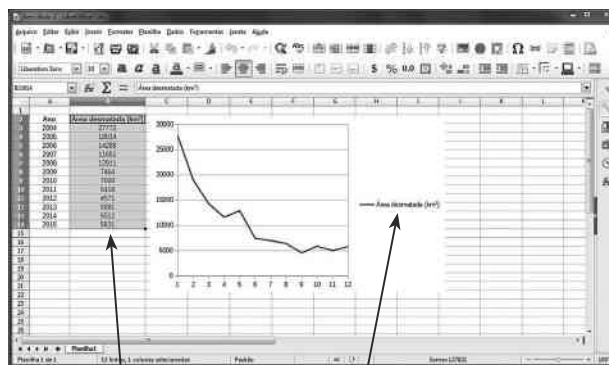
Tabela 2:

Área desmatada na Amazônia Legal, em km², no período compreendido entre 2004 e 2015

Ano	Área desmatada (km²)
2004	27 772
2005	19 014
2006	14 286
2007	11 651
2008	12 911
2009	7 464
2010	7 000
2011	6 418
2012	4 571
2013	5 891
2014	5 012
2015	5 831

Fonte: Projeto PRODES. Disponível em: <www.obt.inpe.br/prodes/index.php>. Acesso em: 19 abr. 2016.

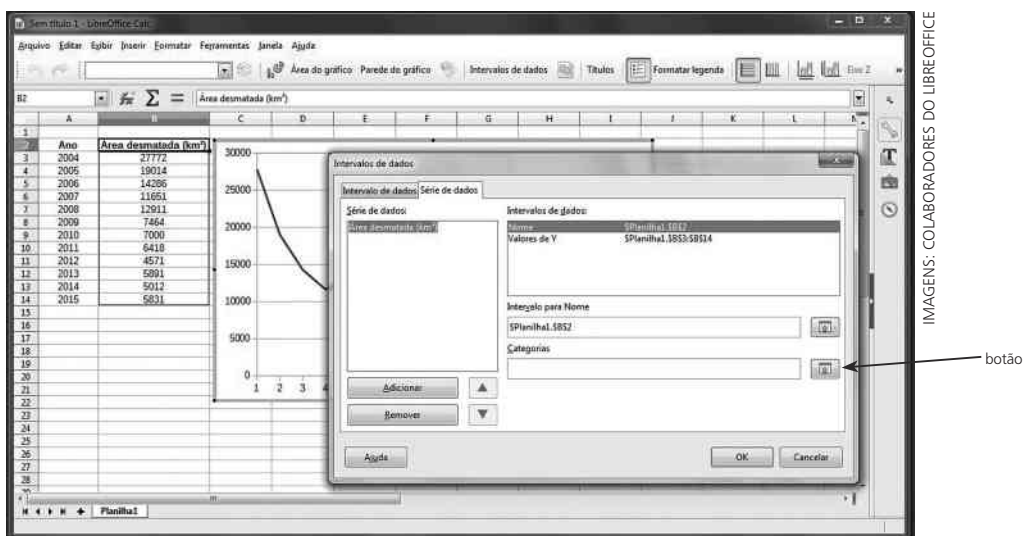
O primeiro passo é digitar as informações dessa tabela na planilha. Escolhemos a coluna definida pelo intervalo entre as células A2 e A14 para digitação dos anos e a coluna adjacente (B2 até B14) para digitação dos dados correspondentes à área desmatada.

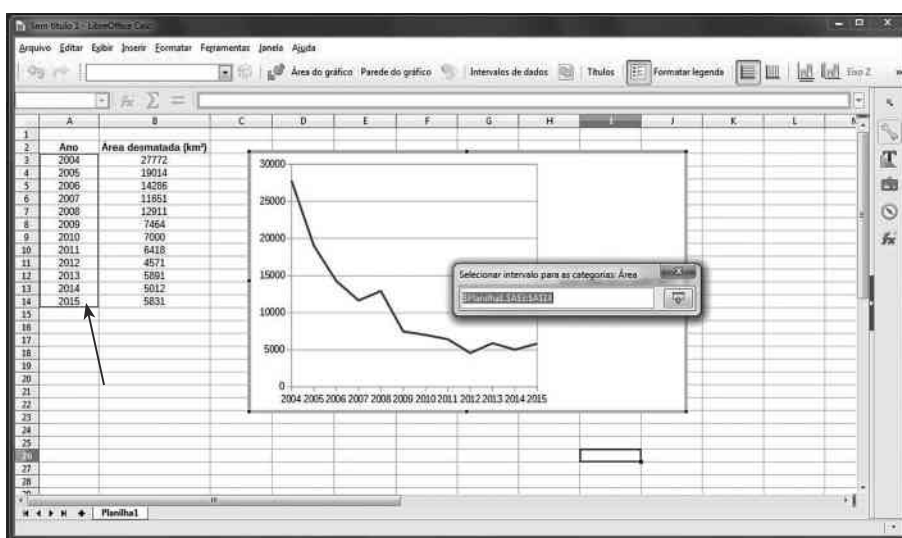
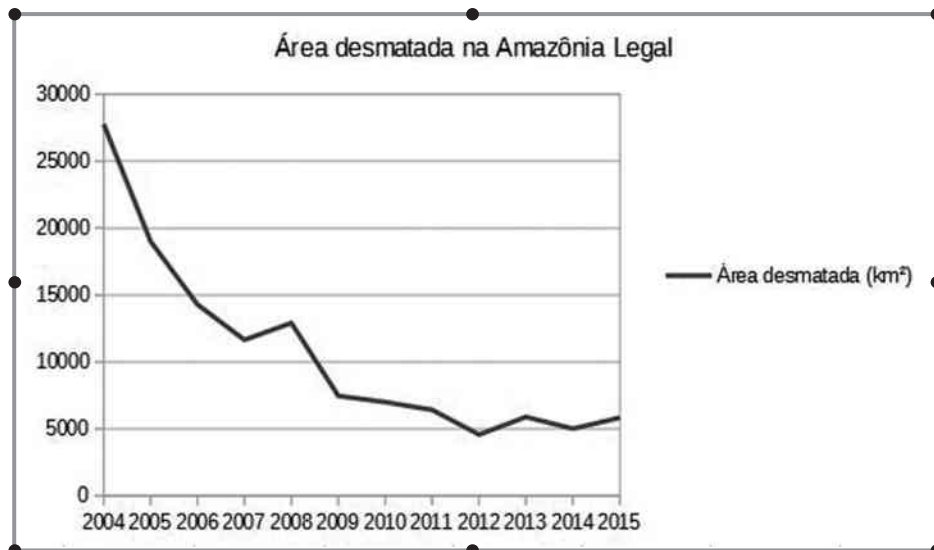
Na sequência, selecionamos a coluna correspondente à área desmatada. Ao clicar na opção *Inserir* no menu principal, e depois no item *Gráfico*, aparece a opção *Linha* dentro dos tipos de gráfico. Ao selecionarmos a terceira opção obtemos o gráfico da figura a seguir:

Apenas os dados dessa coluna devem ser selecionados.

A legenda da série 1 refere-se aos valores da área desmatada.

Note que no eixo horizontal do gráfico anterior aparecem marcações sucessivas de 1 a 12, sendo que 1 refere-se ao ano 2004, 2 ao ano 2005 e assim sucessivamente até 12 (referente ao ano 2015).

No entanto, é possível alterar os valores 1, 2, 3, ..., 12 para 2004, 2005, 2006, ..., 2015. Para isso, é necessário selecionar o gráfico e clicar no botão *Intervalo de dados*, na barra superior. Quando clicarmos nesse botão, aparecerá uma janela correspondente à imagem a seguir.

IMAGENS: COLABORADORES DO LIBREOFFICE

Clicando no botão indicado pela seta na imagem anterior, ao lado do item *Categorias*, uma nova janela será aberta, intitulada *Selecionar intervalo para as categorias*: Área, em que se pede para relacionar um intervalo.

Nesse momento, devem-se selecionar todos os valores numéricos da variável *Ano* (observe as linhas destacadas que demarcam esses valores na imagem a seguir).

Por fim, clicamos no botão OK e inserimos o título obtendo o gráfico de linhas proposto.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

Noções de conjuntos

Exercícios

1. $A = \{x \mid x \text{ é um número inteiro}\} \Rightarrow -4 \in A, \frac{1}{3} \notin A, 3 \in A$ e $0{,}25 \notin A$
$B = \{x \mid x < 1\} \Rightarrow -4 \in B, \frac{1}{3} \in B, 3 \notin B$ e $0{,}25 \in B$
$C = \{x \mid 15x - 5 = 0\} \Rightarrow -4 \notin C, \frac{1}{3} \in C$, pois $15 \cdot \frac{1}{3} - 5 = 0$, $3 \notin C$ e $0{,}25 \notin C$
$D = \left\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\right\} \Rightarrow -4 \notin D, \frac{1}{3} \notin D$ e $3 \notin D$, $0{,}25 = \frac{1}{4} \in D$

2. F = {x | x é estado do Sudeste brasileiro} ⇒ F = {Espírito Santo, Minas Gerais, São Paulo, Rio de Janeiro}
G = {x|x é capital de um país sul-americano}
Assim:
a) Rio de Janeiro ∈ F (Verdadeira)
b) México ∈ G (Falsa, pois o México não é um país sul-americano)
c) Lima ∉ G (Falsa, pois Lima é capital do Peru)
d) Montevidéu ∈ G (Verdadeira, pois Montevidéu é a capital do Uruguai)
e) Espírito Santo ∉ F (Falsa)
f) São Paulo ∈ F (Verdadeira)

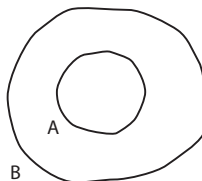
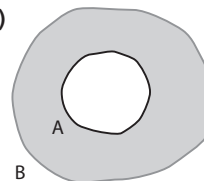
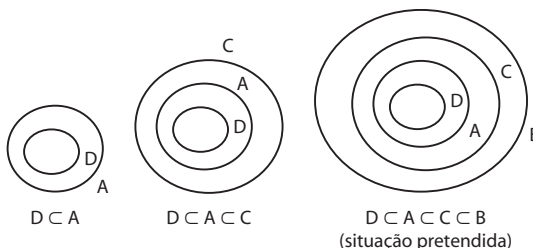
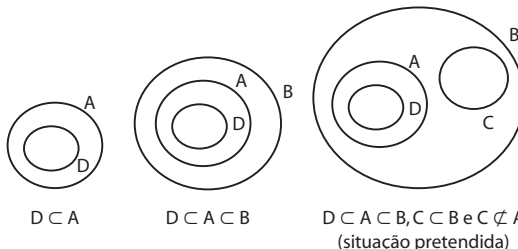
3. Como, usualmente, não aparecem elementos repetidos na notação de conjuntos, então:
- A = {x | x é letra da palavra beterraba} = {b, e, t, r, a}
- B = {x | x é nome de um estado brasileiro cuja letra inicial é p} = {Pará, Piauí, Paraíba, Pernambuco, Paraná}
- $x = \frac{a}{b}$, em que $1 < a < 4$ (ou seja, $a = 2$ ou $a = 3$) e $1 < b < 4$ (ou seja, $b = 2$ ou $b = 3$)
  Assim, obtemos: $x = \frac{2}{3}$ e $x = \frac{3}{2}$.
  Logo: $C = \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$

4. $H = \{-1, 0, 2, 4, 9\}$
$A = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 1\} = \{-1, 0\}$
$B = \left\{x \mid x \in H \text{ e } \frac{2x - 1}{3} = 1\right\}$; como $\frac{2x - 1}{3} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2$, então $B = \{2\}$
$C = \{x \mid x \in H \text{ e } x \text{ é um quadrado perfeito}\} = \{0, 4, 9\}$
$D = \{x \mid x \in H \text{ e } x < 0\} = \{-1\}$
$E = \{x \mid x \in H \text{ e } 3x + 1 = 10\}$; como $3x + 1 = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 3 \notin H$, então $E = \varnothing$

5. **a)** Falsa, pois o conjunto ∅ não tem elementos.
b) Falsa, pois {a, b} não é elemento do conjunto {a, b, c, d}.
c) Verdadeira, pois: $2x + 9 = 13 \Rightarrow x = 2$.
d) Verdadeira, pois **a** é elemento do conjunto {a, {a}}.
e) Verdadeira, pois não existe um número **x** tal que $x < 0$ e $x \geqslant 0$.
f) Verdadeira, pois ∅ é elemento do conjunto {∅, {a}}.

6. $A = \{x \mid x = 1 \text{ e } x = 3\} = \varnothing$
B = {x | x é um número primo positivo e par} = {2} (unitário)
$C = \left\{x \mid 0 < x < 5 \text{ e } \underbrace{\frac{3x + 5}{2} = 4}_{x = 1}\right\} = \{1\}$ (unitário)
D = {x | x é capital da Bahia} = {Salvador} (unitário)
E = {x | x é mês cuja letra inicial do nome é p} = ∅
$F = \left\{x \mid \frac{2}{x} = 0\right\} = \varnothing$

7. M = {0, 3, 5}
Lembrando que o símbolo ∈ relaciona elemento com conjunto, enquanto ⊂ estabelece uma relação entre conjuntos, temos:

a) 5 ∈ M **(V)**	**d)** 0 ∈ M **(V)**	**g)** 0 ∈ ∅ **(F)**
b) 3 ⊂ M **(F)**	**e)** ∅ ⊂ M **(V)**	**h)** 0 ⊂ M **(F)**
c) ∅ ∈ M **(F)**	**f)** 0 = ∅ **(F)**	

8. **a)** **b)**

9. **a)** Situação pretendida: D ⊂ A ⊂ C ⊂ B

b) Situação pretendida: D ⊂ A ⊂ B, C ⊂ B e C ⊄ A

Professor, procure obter outras respostas em conjuntos com os estudantes.

10. A = {1, 2}; B = {2, 3}; C = {1, 3, 4} e D = {1, 2, 3, 4}

a) B ⊂ D **(V)**	**d)** D ⊃ A **(V)**
b) A ⊂ B **(F)**	**e)** C ⊅ B **(V)**
c) A ⊄ C **(V)**	**f)** C = D **(F)**

11. $A = \{x \mid x \text{ é um número ímpar positivo}\} = \{1, 3, 5, ...\}$
$B = \{y \mid y \text{ é um número inteiro e } 0 < y \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
Pede-se: $\{z \mid z \in B \text{ e } z \notin A\} = \{2, 4\}$.

12. $A = \{a, b, c\}$

a) $C \notin A$ **(F)**
b) $\{c\} \in A$ **(F)**
c) $\{a, c\} \subset A$ **(V)**
d) $\{a, b\} \in A$ **(F)**
e) $\{b\} \subset A$ **(V)**
f) $\{a, b, c\} \subset A$ **(V)**

13. $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $Z = \{0, 1, 2\}$
a) $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$
b) Entre outros: $\{0, 2, 4, 6\}$, $\{0, 4, 6, 8\}$ e $\{2, 4, 6, 8\}$
c) $P(Z) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$

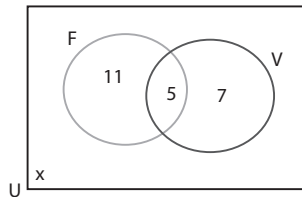
14. I. Como não existe **x** tal que $x \neq x$, então a sentença $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ é verdadeira.
II. Como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, então $\varnothing \subset \{\varnothing\}$ é uma sentença verdadeira.
III. Como $\{\varnothing\}$ é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto $\varnothing$, então a sentença $\varnothing \in \{\varnothing\}$ é verdadeira.
IV. De acordo com a justificativa do item II, a sentença $\varnothing \subset \varnothing$ é verdadeira.

15. $U = \{0, 1, 2, 3\}$
I. $\varnothing \in U$ (Falsa, pois $\varnothing$ não é elemento de **U**.)
II. $3 \in U$ e $U \supset \{3\}$ (Verdadeira, pois 3 é elemento de **U** e $\{3\}$ é subconjunto de **U**.)
III. Verdadeira, pois os subconjuntos unitários de **U** são $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$.
IV. Falsa, pois $n(U) = 4 \Rightarrow n(P(U)) = 2^4 = 16$.

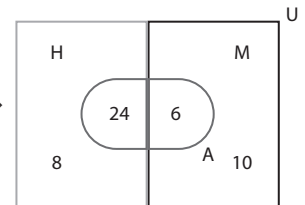
16. $A = \{p, q, r\}$, $B = \{r, s\}$ e $C = \{p, s, t\}$
a) $A \cup B = \{p, q, r, s\}$
b) $A \cup C = \{p, q, r, s, t\}$
c) $B \cup C = \{p, r, s, t\}$
d) $A \cap B = \{r\}$
e) $A \cap C = \{p\}$
f) $B \cap C = \{s\}$

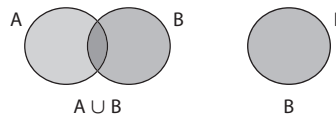
17. **a)** $(A \cap B) \cup C = \{r\} \cup C = \{r, p, s, t\}$
b) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \{r\} \cap C = \varnothing$
c) $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \{p\} \cup \{s\} = \{p, s\}$
d) $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{p, q, r, s, t\} \cap \{p, r, s, t\} = \{p, r, s, t\}$

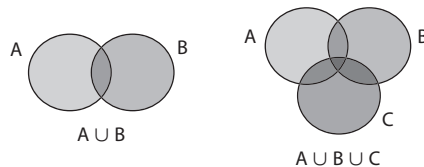
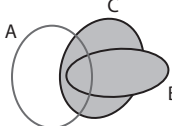
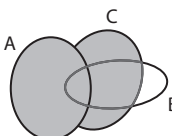
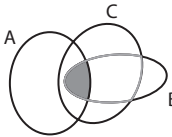
18. $U = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$;
$A = \{x \in U \mid x < 0\} = \{-4, -3, -2, -1\}$;
$B = \{x \in U \mid -3 < x < 2\} = \{-2, -1, 0, 1\}$;
$C = \{x \in U \mid x \geq -1\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
a) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = \{-2, -1\} \cap \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{-1\}$
b) $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = \{-4, -3, -2, -1\} \cup \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} = U$
c) $C \cup (B \cap A) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{-2, -1\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
d) $(B \cup A) \cap C = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\} \cap \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} = \{-1, 0, 1\}$

19. Sejam:
U: conjunto dos alunos do 1º ano.
F: conjunto dos alunos de **U** que jogam futebol.
V: conjunto dos alunos de **U** que jogam voleibol.
$n(U) = 36$; $n(F) = 16$; $n(V) = 12$ e $n(F \cap V) = 5$
x: número de alunos que não jogam futebol nem voleibol.

Temos:
$n(U) = x + 11 + 5 + 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 36 = x + 23 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 13$

20. Sejam **U**: conjunto dos funcionários do escritório; **M**: conjunto das funcionárias; **H**: conjunto dos homens; **A**: conjunto dos que têm automóvel. Temos:

$n(U) = 48$
$n(M) = \frac{1}{3} \cdot n(U) = \frac{1}{3} \cdot 48 = 16$
$n(H) = n(U) - n(M) = 48 - 16 = 32$
$n(A) = 30$
$n(A \cap H) = \frac{3}{4} \cdot n(H) = \frac{3}{4} \cdot 32 = 24$
$\Rightarrow$

Assim:
a) $n(M \cap A) = 6$
b) $n(H \cup A) = n(H) + n(A) - n(H \cap A) = 32 + 30 - 24 = 38$

21. **A** e **B**: conjuntos quaisquer
a) $A \cup \varnothing = A$ **(V)**
b) $B \cap \varnothing = \varnothing$ **(V)**
c) $(A \cap B) \subset B$ **(V)**
d) Observe os diagramas seguintes:

$\Rightarrow B \supset (A \cup B)$ **(F)**
Ou: se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4, 5\}$, temos:
$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
Logo: $B = \{0, 2, 4, 5\} \not\supset A \cup B$

e) $(B \cup C) \subset B$ **(F)**
f) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ **(V)**
g) $\varnothing \not\subset (A \cap B)$ **(F)**
h) Observe os diagramas seguintes:

$\Rightarrow (A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$ **(V)**
(Sugestão: use diagramas de Venn para justificar as respostas.)

22. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$
Pede-se **X**, tal que: $A \cup X = \{1, 2, 3\}$, $B \cup X = \{3, 4\}$ e $C \cup X = A \cup B$

$A \cup X = \{1, 2, 3\}$ e $A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow X \subset \{1, 2, 3\}$ (1)
$B \cup X = \{3, 4\}$ e $B = \{3, 4\} \Rightarrow X \subset \{3, 4\}$ (2)
$C \cup X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\} \Rightarrow X = \{3\}$
Como $X = \{3\}$ satisfaz as condições (1) e (2), então é a resposta procurada.

23. Temos: $\begin{cases} X \subset \{1, 2, 3, 4\} \\ \{1, 2\} \subset X \end{cases}$, ou seja, os conjuntos **X** procurados têm, no mínimo, dois elementos (1 e 2).
Logo, $X = \{1, 2\}$, $X = \{1, 2, 3\}$, $X = \{1, 2, 4\}$ ou $X = \{1, 2, 3, 4\}$

24. Em cada caso, estão destacadas nos diagramas uma linha mais clara (circundando um dos conjuntos) e uma região sombreada (correspondente a outro conjunto). Isso permitirá analisar a veracidade das afirmações dadas.

a)

A: região circundada pela linha mais clara
$B \cup C$: região sombreada
Logo, $(B \cup C) \subset A$ é falsa.

b)

$B \cap C$: região circundada pela linha mais clara
$A \cup C$: região sombreada
Logo, $(B \cap C) \subset (A \cup C)$ é verdadeira.

c)

$B \cap C$: região circundada pela linha mais clara
$A \cap B$: região sombreada
Logo, $(A \cap B) \subset (B \cap C)$ é verdadeira.

d) $(A \cap B) \cup B = \varnothing$ é falsa, pois, como $(A \cap B) \subset B$, temos $(A \cap B) \cup B = B$

25. $A = \{a, b, c\}$; $B = \{a, c, d, e\}$; $C = \{c, d\}$ e $D = \{a, d, e\}$.
a) $A - B = \{b\}$ **(V)**
b) $B - C = \{a, e\}$ **(V)**
c) $D - B = \varnothing \neq \{c\}$ **(F)**
d) $\complement_A^C = \varnothing$ (Falsa, pois $C \not\subset A$)
e) $\complement_B^{\varnothing} = B - \varnothing = B$ **(V)**
f) $\complement_B^D = \{c\} = B - D$ **(V)**
g) $(A \cap B) - D = \{a, c\} - \{a, d, e\} = \{c\} \neq \{a, d, e\}$ **(F)**
h) $B - (A \cup C) = \{a, c, d, e\} - \{a, b, c, d\} = \{e\}$ **(V)**
i) $(\complement_B^C) \cup (\complement_B^D) = (B - C) \cup (B - D) = \{a, e\} \cup \{c\} = \{a, e, c\}$ **(V)**

26. $A = \{2, 4, 8, 12, 14\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $C = \{1, 2, 3, 18, 20\}$
a) $A - C = \{4, 8, 12, 14\}$
b) $B - C = \{5, 10, 15, 25\}$
c) $(C - A) \cap (B - C) = \{1, 3, 18, 20\} \cap \{5, 10, 15, 25\} = \varnothing$
d) $(A - B) \cap (C - B) = A \cap \{1, 2, 3, 18\} = \{2\}$

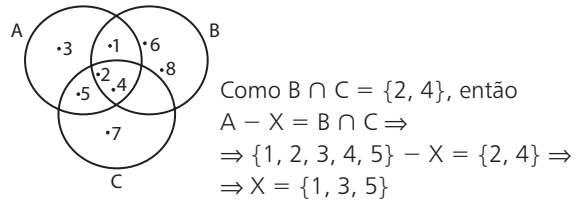
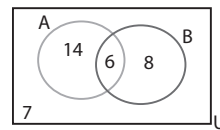
27. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$(A - B) \cap C = \{1, 2, 3\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3\}$
Como $(A - B) \cap C$ tem 1 elemento, então o número de seus subconjuntos é $2^1 = 2$.

28. Obs.: $Z - X = Z \Rightarrow Z \cap X = \varnothing$
Assim, temos:

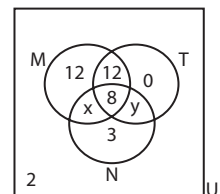
$X \not\subset Y$ e $X \cap Y \neq \varnothing$
$Z \subset Y$ e $Z - X = Z$

29. $U = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$A = \{x \in U \mid x \leqslant 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$B = \{x \in U \mid x \text{ é ímpar}\} = \{-1, 1, 3, 5\}$
$C = \{x \in U \mid -2 \leqslant x < 1\} = \{-2, -1, 0\}$
a) $A \cap B = \{-1, 1, 3\}$
b) $A \cup C = A$
c) $A - C = \{1, 2, 3\}$
d) $C - B = \{-2, 0\}$
e) $\complement_A^C = A - C = \{1, 2, 3\}$
f) $\complement_B^A$: não pode ser determinado, pois $A \not\subset B$.
g) $\overline{B} = U - B = \{-2, 0, 2, 4\}$
h) $(A \cap C) - B = C - B = \{-2, 0\}$
i) $C \cup (A - B) = C \cup \{-2, 0, 2\} = \{-2, -1, 0, 2\}$
j) $(A - B) \cup (B - A) = \{-2, 0, 2\} \cup \{5\} = \{-2, 0, 2, 5\}$
k) $\overline{C} \cap \overline{A} = (U - C) \cap (U - A) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5\} = \{4, 5\}$
l) $\overline{B} \cap (C - B) = (U - B) \cap (C - B) = \{-2, 0, 2, 4\} \cap \{-2, 0\} = \{-2, 0\}$

30. Representando os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{2, 4, 5, 7\}$ em um diagrama de Venn, temos:

Como $B \cap C = \{2, 4\}$, então
$A - X = B \cap C \Rightarrow$
$\Rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\} - X = \{2, 4\} \Rightarrow$
$\Rightarrow X = \{1, 3, 5\}$

31. $A \subset U$, $B \subset U$
$n(U) = 35$; $n(A) = 20$; $n(A \cap B) = 6$; $n(A \cup B) = 28$.

a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow 28 = 20 + n(B) - 6 \Rightarrow n(B) = 14$
b) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 6 = 14$
c) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 14 - 6 = 8$
d) $A \cup \overline{A} = U \Rightarrow n(A \cup \overline{A}) = n(U) \underset{A \cap \overline{A} = \varnothing}{\Longrightarrow}$
$\underset{A \cap \overline{A} = \varnothing}{\Longrightarrow} n(A) + n(\overline{A}) = n(U) \Rightarrow 20 + n(\overline{A}) = 35 \Rightarrow$
$\Rightarrow n(\overline{A}) = 15$
e) $n(\overline{B}) = n(U) - n(B) = 35 - 14 = 21$
f) $n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B) = 35 - 6 = 29$
g) $n(\overline{A - B}) = n(U) - n(A - B) = 35 - 14 = 21$
h) $n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B) = 35 - 28 = 7$

Desafio

No diagrama de Venn ao lado, onde **x** representa o número de alunos que frequentaram as piscinas apenas pela manhã e à noite e **y** o número dos que as frequentaram apenas à tarde e à noite, foram inseridos os dados do problema.
Pede-se: $x + y + 11$
Como $n(U) = 40$, temos:
$2 + 12 + 12 + x + 8 + y + 3 = 40 \Rightarrow x + y = 3$
Logo: $x + y + 11 = 3 + 11 = 14$

CAPÍTULO 2

Conjuntos numéricos

Exercícios

1. **a)** $A = \{5, 6, 7, 8, ...\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A \cap B = \{5, 6\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, ...\} = \mathbb{N}$
b) $A = \{2, 3, 4, 5, ...\}$ e $B = \{3, 4, 5, ...\}$
$A \cap B = B$; $A \cup B = A$
c) $A = \{..., 8, 9\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A \cap B = B$; $A \cup B = A$
d) $A = \{3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$
$A \cap B = \{3\}$; $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

2. **a)** $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$, entre outros.
b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2 \text{ ou } 7 < x < 11\}$, entre outros.
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$, entre outros.
d) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 3\}$, entre outros.

3. **a)** $-5 + 6 = 1$
b) 11
c) $|3| + |-3| = 3 + 3 = 6$
d) $2 - 15 + 4 = -9$
e) $-11 + 6 + 3 = -2$
f) $-8 + 3 \cdot 3 = 1$
g) $|2 - 6| - |3 - 6| = |-4| - |-3| = 4 - 3 = 1$
h) $|-5| - |15| - |0| = 5 - 15 - 0 = -10$

4. **a)** $|x| = 18 \Rightarrow x = -18$ ou $x = 18$
b) $|x| < 3 \Rightarrow x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

5. Observe que:
- Todo múltiplo de 6 é também múltiplo de 3. Assim, o único elemento desse conjunto que é múltiplo de 6 é também múltiplo de 3.
- Todo múltiplo de 6 é também múltiplo de 2 (isto é, é par). Assim, dos 7 números pares que o conjunto possui, apenas um é múltiplo de 6.

Então, esse conjunto possui:
- Três múltiplos de 3, sendo que um deles é múltiplo de 6 (é par) e os outros dois não.
- Seis números pares que não são múltiplos de 3. O outro número par já foi contado.

O total pedido é $3 + 6 = 9$.

6. $a = |-8| = 8$; $b = -6$ e $c = |5| = 5$
a) $8 + (-6) = 2$
b) $-6 \cdot 5 = -30$
c) $5 - 8 = -3$
d) $8 \cdot (-6) + 5 = -43$
e) $-6 - 8 \cdot 5 = -46$
f) 36
g) $|-6 - 5| = |-11| = 11$
h) $|8 - (-6)| = |14| = 14$

7. **a)** Falsa, pois 2 é primo e par.
b) Falsa, pois 4 e -4 têm mesmo módulo, mas $-4 \neq 4$.
c) Falsa, pois $1^2 = 1$.
d) Falsa, pois $(-2)^3 = -8$; $(-2)^2 = 4$ e $-8 < 4$.
e) Falsa, pois tome $a = 2$ e $b = -5$; $a^2 = 4$ e $b^2 = (-5)^2 = 25$. Temos $25 > 4$.

8. **a)** Verdadeiro.
b) Verdadeiro.
c) Falso, pois existe $x = \frac{1}{3}$ tal que $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.
d) Verdadeiro.
e) Falso, pois $-\frac{7}{3} \in \mathbb{Q}$.
f) Verdadeiro.
g) Falso, pois $-\frac{17}{9} \in \mathbb{Q}$.
h) Verdadeiro.
i) Falso, pois $\mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}_- = \{0\}$.
j) Falso, pois $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$, $\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$.

9. $m = 3 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}$

a) $-m + n = -\frac{13}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{15}{3} = -5 \in \mathbb{Q}$; podemos representá-lo por $-5{,}0$ ou $-\frac{5}{1}$.
b) $m + n - \frac{13}{4} = \frac{13}{3} - \frac{2}{3} - \frac{13}{4} = \frac{5}{12} \in \mathbb{Q}$; a forma decimal é $0{,}41\overline{6}$.

10. **a)** $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
b) $\frac{105}{100} = \frac{21}{20}$
c) $-\frac{102}{10} = -\frac{51}{5}$
d) $\frac{33}{100}$
e) $\frac{33}{10}$
f) $-\frac{225}{100} = -\frac{9}{4}$

11. **a)** $\frac{12}{5} = 2{,}4$
b) 0,57
c) 0,08
d) 0,024
e) $\frac{25 - 256}{80} = -2{,}8875$

12. $\frac{1}{30}, -\frac{5}{13}, \frac{4}{11}, \frac{1\,000}{3}$

13. $2{,}\overline{8} = \frac{26}{9}$ e $1{,}\overline{6} = \frac{5}{3}$

$$y = \left(\frac{26}{9} \div \frac{5}{3}\right) + \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{26}{9} \cdot \frac{3}{5}\right) - 1 = \frac{26}{15} - 1 = \frac{11}{15} = 0{,}73333... = 0{,}7\overline{3}$$

14. $-\frac{17}{5} = -3{,}4$; $-\frac{33}{10} = -3{,}3$

Respostas possíveis: $-3{,}32$; $-3{,}375$; $-3{,}38$ etc.

15. **a)** $\begin{cases} x = 0{,}444... & (1) \\ 10x = 4{,}444... & (2) \end{cases}$

Subtraindo (1) de (2): $9x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{9}$

b) $\begin{cases} x = 0{,}1414... & (1) \\ 100x = 14{,}1414... & (2) \end{cases}$

Subtraindo (1) de (2): $99x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{99}$

c) $\begin{cases} x = 2{,}777... & (1) \\ 10x = 27{,}777... & (2) \end{cases}$

Subtraindo (1) de (2): $9x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{9}$

d) $\begin{cases} x = 1{,}715715... & (1) \\ 1\,000x = 1715{,}715715... & (2) \end{cases}$

Subtraindo (1) de (2): $999x = 1714 \Rightarrow x = \frac{1714}{999}$

e) $\begin{cases} x = 1{,}12333... & (1) \\ 100x = 112{,}3333... & (2) \\ 1\,000x = 1123{,}3333... & (3) \end{cases}$

Subtraindo (2) de (3): $900x = 1\,011 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{1\,011}{900} = \frac{337}{300}$

f) $\begin{cases} x = 0{,}02323... & (1) \\ 10x = 0{,}2323... & (2) \\ 1\,000x = 23{,}2323... & (3) \end{cases}$

Subtraindo (2) de (3): $990x = 23 \Rightarrow x = \frac{23}{990}$

g) $\begin{cases} x = 1{,}030303... & (1) \\ 100x = 103{,}030303... & (2) \end{cases}$

Subtraindo (1) de (2): $99x = 102 \Rightarrow x = \frac{102}{99} = \frac{34}{33}$

h) $\begin{cases} x = 1{,}0303030... & (1) \\ 10x = 10{,}303030... & (2) \\ 1\,000x = 1030{,}3030... & (3) \end{cases}$

Observe que $1{,}0\overline{3} = 1{,}0\overline{30}$

Subtraindo (2) de (3): $990x = 1020 \Rightarrow x = \frac{1\,020}{990} = \frac{34}{33}$

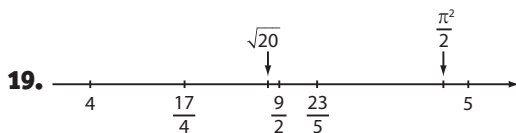
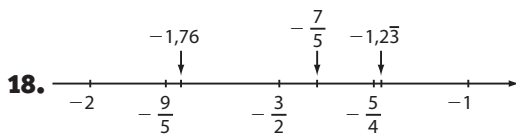
16. $x \in \mathbb{Q}$; $\frac{1}{x} = -x \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{Q}$

17. a) $0{,}2 = \frac{1}{5}$; $1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$ e $0{,}8 = \frac{4}{5}$ Então:

$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{5} = \frac{4}{15} + \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$

b) $\left[\frac{3}{5} : \left(-\frac{1}{4}\right) + 2\right]^2 = \left(-\frac{12}{5} + 2\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

18. Reta numérica: -2, $-\frac{9}{5}$, $-1{,}76$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{7}{5}$, $-\frac{5}{4}$, $-1{,}2\overline{3}$, -1

19. Reta numérica: 4, $\frac{17}{4}$, $\sqrt{20}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{23}{5}$, $\frac{\pi^2}{2}$, 5

São irracionais: $\sqrt{20}$ e $\frac{\pi^2}{2}$.

20. a) Irracional.
b) Racional.
c) Irracional.
d) Irracional.
e) Racional: $\sqrt{\frac{20}{80}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
f) Racional.
g) Racional: $(\sqrt{2})^2 - 1^2 = 1 \in \mathbb{Q}$
h) Racional: $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\right)$
i) Irracional: $(\sqrt{15})$
j) Irracional.
k) Racional: $\sqrt{9} = 3$

21. a) Falsa, pois, se $x = -2{,}3$, então $-x = 2{,}3 \in \mathbb{R}_+$.
b) Falsa, pois, se $x = \frac{1}{2}$, então $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.
c) Falsa, pois, se $x = -5$, temos $2 \cdot x = -10$ e $3 \cdot x = -15$; $2x > 3x$.
d) Verdadeira.
e) Falsa, pois, se $x + 2 < x$, então $0x < -2 \Rightarrow 0 < -2$; absurdo.

22. a) $x^3 = -8 \Rightarrow x = -2 \notin \mathbb{N}$; conjunto vazio.
b) $x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$; como $x \in \mathbb{R}_-$, temos $x = -2$; conjunto unitário.
c) $-\frac{1}{5} = -0{,}2$; $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$
O único inteiro entre $-0{,}2$ e $0{,}\overline{6}$ é 0; conjunto unitário.
d) $x^2 < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$; conjunto vazio.
e) $|x| = -4 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$; conjunto vazio.
f) $x^5 = 0 \Rightarrow x = 0 \in \mathbb{Q}$, conjunto unitário.
g) $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ conjunto unitário.
h) $x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ conjunto vazio.

23. $x = 1 : 0{,}05 = 20$; $y = 2 : 0{,}2 = 10$

$A = \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{20}{80}} = \sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, portanto é irracional.

$B = \sqrt{x - \frac{x}{y}} = \sqrt{20 - \frac{20}{10}} = \sqrt{18} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, portanto é irracional.

$C = A \cdot B = \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Q}$, portanto é racional.

$D = \frac{B}{A} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3 \in \mathbb{Q}$, portanto é racional.

$E = A + B = \sqrt{2} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, portanto é irracional.

24. a) $1{,}73^2 < 3 < 1{,}74^2$; $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$; 1,73 e 1,74 são aproximações de $\sqrt{3}$ com erro menor que 0,01.
b) $1{,}732^2 < 3 < 1{,}733^2$; $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$; assim, 1,732 e 1,733 são aproximações para $\sqrt{3}$ com erro inferior a 0,001.

25. Uma das formas de resolver o exercício é atribuir valores para **a** e **b**; por exemplo: $a = -\frac{6}{5} = -1{,}2$ e $b = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

a) Verdadeiro, pois $\frac{a}{b} = \frac{-\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$ está à esquerda de **a**.
b) Falso, pois $b^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} < 1$. (Professor, chame a atenção dos estudantes para o fato de que o quadrado de um número real pode ser menor que o próprio número).
c) Verdadeiro, pois $a + b = -\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{5}$ está entre -1 e 0.
d) Falso, pois $a^2 = \left(-\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} > 1$ está à direita de 1.
e) Falso, pois $b - a = \frac{4}{5} - \left(-\frac{6}{5}\right) = 2$ está à direita de 1.
f) Verdadeiro, pois $\frac{1}{b} = \frac{5}{4} = 1{,}25 > 1$.
g) Falso, pois $\frac{1}{a} = -\frac{5}{6}$ e $-1 < -\frac{5}{6} < 0$.

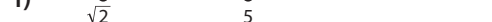
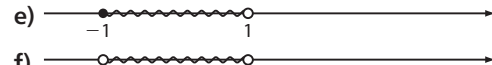
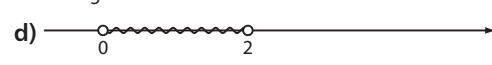
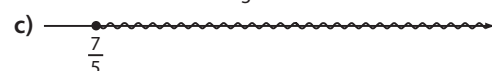
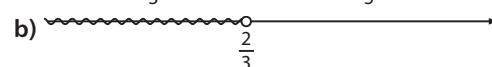
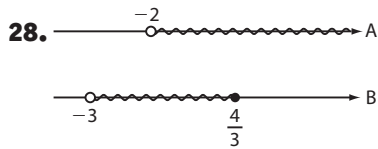
26. a) Reta: intervalo de -3 (aberta) a 5 (fechada)
b) Reta: intervalo até $\frac{2}{3}$ (aberta)
c) Reta: intervalo a partir de $\frac{7}{5}$ (fechada)
d) Reta: intervalo de 0 (aberta) a 2 (aberta)
e) Reta: intervalo de -1 (fechada) a 1 (aberta)
f) Reta: intervalo de $\sqrt{2}$ (aberta) a 5 (aberta)

27. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\sqrt{2}\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{4} < x \leq 1\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} < x \leq 0\right\}$

28. (A: from −2, open, to the right; B: from −3, open, to $\frac{4}{3}$, closed)

a) $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} =]-3, +\infty[$

b) $A \cap B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \frac{4}{3}\right\} = \left]-2, \frac{4}{3}\right]$

c) $A - B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4}{3}\right\} = \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$

d) $B - A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq -2\} =]-3, -2]$

29. (from −2, open, to $1,\overline{3}$, closed)

Há três números inteiros: −1, 0 e 1.

30. $\left[-1, \frac{3}{2}\right[\cup [2, +\infty[$

31. **a)** $\frac{16}{5} = 3,2$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** 4 **d)** 20 **e)** 2 **f)** 5 **g)** $\frac{10 \text{ min}}{120 \text{ min}} = \frac{1}{12}$ **h)** $\frac{8\,000 \text{ g}}{500 \text{ g}} = 16$

32. **a)** $2x = 9$; $x = \frac{9}{2}$

b) $12x = 5x + 5$; $x = \frac{5}{7}$

c) $8 - 4x = 3x + 15$; $x = -1$

d) $2x - 2 = 3x - 6$; $x = 4$

33. **X**: $\frac{1,5 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^4} = 50$ (50 habitantes/km²)

Y: $\frac{1,2 \cdot 10^5}{1,5 \cdot 10^3} = 80$ (80 habitantes/km²)

Z: $\frac{8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^4} = 40$ (40 habitantes/km²)

∴ A região menos densamente povoada é a região **Z**.

34. **a)** $0,2 \cdot 600 = 120$
b) $0,15 \cdot 840 = 126$
c) $120 \div 2 = 60$
d) $123,5 \div 10 = 12,35$
e) $0,27 \cdot 2\,500 = 675$
f) $0,075 \cdot 400 = 30$
g) $3,5 \cdot 75 = 262,50$
h) $0,154 \cdot 350 = 53,9$
i) $0,03 \cdot 90 = 2,7$
j) $0,005 \cdot 2\,100 = 10,50$

35. $950 + \frac{4}{100} \cdot 10\,000 = 950 + 400 = 1\,350$ (1 350 reais)

$950 + \frac{4}{100} \cdot 20\,000 = 950 + 800 = 1\,750$ (1 750 reais)

36. **a)** $\frac{10}{40} = 0,25 = 25\% \therefore x = 25$

b) $\frac{3,6}{72} = \frac{36}{720} = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\% \therefore x = 5$

c) $\frac{120}{150} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80\% \therefore x = 80$

d) $\frac{136}{400} = \frac{34}{100} = 34\% \therefore x = 34$

e) $\frac{150}{120} = 1,25 = 125\% \therefore x = 125$

37. $0,55 \cdot (60 \text{ g}) = 33 \text{ g}$

38. **a)** Biologia: $120 - 48 - 36 = 36$

A razão é $\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$.

b) $\frac{F}{Q} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$

c) Seja **n** o número pedido. Devemos ter:

$\frac{n + 36}{n + 120} = \frac{2}{5}$ (ou 40%)

$\Rightarrow 5n + 180 = 2n + 240 \Rightarrow n = 20$

39.
- Fabricante **A**: $\frac{15}{150} = 0,1 = 10\%$ (10% de peças defeituosas, então o lote foi reprovado)
- Fabricante **B**: $\frac{10}{250} = \frac{40}{1\,000} = \frac{4}{100} = 4\%$ (4% de peças defeituosas, então o lote foi aprovado)
- Fabricante **C**: $\frac{11}{180} = 0,06\overline{1} = 6,1\%$ (6,1% de peças defeituosas)
  Podemos também calcular $5\% \cdot 180 = 9$. Assim, para o lote ser aprovado, deve haver, no mínimo, 171 peças boas ($180 - 9 = 171$). Então, o lote foi reprovado.
- Fabricante **D**: $\frac{10}{200} = \frac{5}{100} = 5\%$ (5% de peças defeituosas, então há 95% de peças boas e o lote foi aprovado).
- Fabricante **E**: $\frac{13}{230} \simeq 0,056 = 5,6\%$ (5,6% de peças defeituosas, então o lote foi reprovado).

40. Janeiro: 1710 voos no horário ($0,95 \cdot 1\,800 = 1\,710$) e 90 voos com atraso

Fevereiro: 1215 voos no horário ($0,90 \cdot 1\,350 = 1\,215$) e 135 voos com atraso

Bimestre: Total de voos: $1\,800 + 1\,350 = 3\,150$; Nº de voos no horário: $1\,710 + 1\,215 = 2\,925$

O percentual pedido é $\frac{2\,925}{3\,150} \simeq 0,92857$; aproximadamente 92,86%.

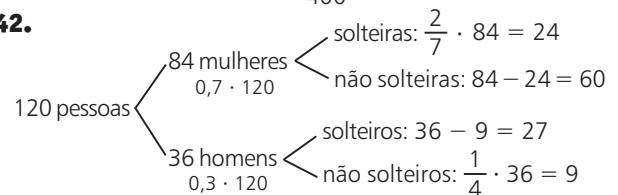
41. **a)** $0,28 \cdot 180 = 50,40$

Novo preço: $180 - 50,40 = 129,60$ (129,60 reais)

b) Valor do desconto: $400 - 260 = 140$ (140 reais)

O percentual pedido é $\frac{140}{400} = 0,35 = 35\%$.

42.

120 pessoas
- 84 mulheres ($0,7 \cdot 120$)
  - solteiras: $\frac{2}{7} \cdot 84 = 24$
  - não solteiras: $84 - 24 = 60$
- 36 homens ($0,3 \cdot 120$)
  - solteiros: $36 - 9 = 27$
  - não solteiros: $\frac{1}{4} \cdot 36 = 9$

a) 27

b) $60 + 9 = 69$; $\frac{69}{120} = 0,575 = 57,5\%$

43. **a)** De cada 20 pessoas, 3 são não pagantes e 17 são pagantes.

Temos: $\frac{17}{20} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 85$. Logo, 85% são pagantes.

b) $\frac{3}{20} = \frac{x}{45\,000} \Rightarrow 20x = 135\,000 \Rightarrow x = 6\,750$

Desafio

a) $56 = 2^3 \cdot 7$

$33 = 3 \cdot 11$

O produto $56 \cdot 33 \cdot x$ será um quadrado perfeito se, na decomposição em fatores primos, todos os expoentes são números pares.

Assim, o menor valor possível de **x** é $2^1 \cdot 7^1 \cdot 3^1 \cdot 11^1 =$ $= 462$. Observe que $56 \cdot 33 \cdot x = 2^4 \cdot 7^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$, que é o quadrado de $2^2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 11 = 924$.

b) $540 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \Rightarrow 540^2 = 2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^2$
Para que $z \cdot 540^2$ seja ao mesmo tempo cubo e quadrado perfeito, os expoentes dos primos 2, 3 e 5 devem ser múltiplos simultâneos de 2 e 3, isto é, de 6. Assim, o menor valor de **z** é $2^2 \cdot 5^4 = 2\,500$.

CAPÍTULO 3

Funções

Exercícios

1. a) O valor de 1 m² é: $\frac{2800}{40} = \frac{1750}{25} = ... = 70$ (70 reais).
Assim, um pedido de 100 m² custará $100 \cdot 70 = 7\,000$ (7 000 reais) e um pedido de 250 m² custará $250 \cdot 70 =$ $= 17\,500$ (17 500 reais).

b) $y = 70 \cdot x$

2. a)

Número de litros	0,25	0,5	2	3	10	25	40
Distância percorrida (km)	2,25	4,5	18	27	90	225	360

b) $d = 9 \cdot L$

3. a)

Tempo	15 min = = 0,25 h	0,5 hora	2 horas	5 horas
Distância (km)	225	450	1 800	4 500

b) $\frac{2\,880}{900} = 3{,}2$ (3,2 horas = 3 horas e 12 minutos)

c) $d = 900 \cdot t$

4. a) 1 dia de atraso: $85 + 1{,}70 + 0{,}03 = 86{,}73$ (86,73 reais)
5 dias de atraso: $85 + 1{,}70 + 5 \cdot 0{,}03 = 86{,}85$ (86,85 reais)
10 dias de atraso: $85 + 1{,}70 + 10 \cdot 0{,}03 = 87$ (87 reais)
30 dias de atraso: $85 + 1{,}70 + 30 \cdot 0{,}03 = 87{,}60$ (87,60 reais)

b) $y = 85 + 1{,}70 + 0{,}03 \cdot x$, isto é, $y = 86{,}70 + 0{,}03 \cdot x$

5. a)

Lado (cm)	1	3,5	5	8	10
Perímetro (cm)	4	14	20	32	40
Área (cm²)	1	12,25	25	64	100

b) $p = 4\ell$

c) $a = \ell \cdot \ell = \ell^2$

d) Sim; não.

6. a)

Número de torneiras	1	4	6	8	10
Tempo (minutos)	40	10	$6{,}\overline{6}$	5	4

b) Observe, na tabela anterior, que $t \cdot n = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{n}$.

c) Como 1 min = 60 s, temos que 36 s correspondem a $\frac{36}{60} = 0{,}6$ minuto e, desse modo, $t = 1{,}6$ (1,6 minuto).
Daí, $1{,}6 = \frac{40}{n} \Rightarrow 1{,}6\,n = 40 \Rightarrow n = 25$ (25 torneiras).

7. a)

Número de horas	1	2	3	4	5	6
Número de células	2	4	8	16	32	64

b)

Número de horas	7	8	9	10
Número de células	128	256	512	1 024

Tempo mínimo: 10 horas.

c) $n = 2^t$

8. a) Sim, pois para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ associado a esse **x**.

b) Sim, pois para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ associado a esse **x**.

c) Não, pois existe um $x \in A$ associado a dois valores distintos de $y \in B$.

d) Não, pois existe um $x \in A$ que não está associado a $y \in B$.

9. a) Sim, $y = x$ ou $y = x^3$ ou $y = x^5$ ...

b) Não.

c) Sim; $y = 2x$.

d) Não.

10. a) Sim.

b) Sim.

c) Não, pois, se $x = 2$, $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ e $5 \notin B$.

d) Sim.

11. a) $y = x + 1$; sim.

b) $y = x^2$; sim.

c) $y = -x$; não, pois, com exceção de $x = 0$, o oposto de **x** não pertence a $\mathbb{N}$.

12. a) $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 + 4 = 6$

b) $f(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - (-1) + 4 = 8$

c) $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 0 + 4 = 4$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{17}{4}$

e) $f(\sqrt{2}) = 3 \cdot (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} + 4 = 10 - \sqrt{2}$

13. a) $f(0) = (3 + 0) \cdot (2 - 0) = 6$
$f(-2) = (3 + (-2)) \cdot (2 - (-2)) = 4$
$f(1) = (3 + 1) \cdot (2 - 1) = 4$

b) $f(a) = (3 + a) \cdot (2 - a) = 6 - a - a^2$
$f(-a) = (3 - a) \cdot (2 + a) = 6 + a - a^2$
A diferença pedida é igual a $(-2a)$.

14. a) $f(0) = 2 \cdot 0 + (-1)^0 = 1$

b) $f(1) = 2 \cdot 1 + (-1)^1 = 1$

c) $f(2) = 2 \cdot 2 + (-1)^2 = 5$

d) $f(-2)$ não existe, pois $-2 \notin \mathbb{N}$.

e) $f(37) = 2 \cdot 37 + (-1)^{37} = 73$

15. a) $\frac{f(0) + g(-1)}{f(1)} =$
$= \frac{(3 \cdot 0^2 - 0 + 5) + [(-2) \cdot (-1) + 9]}{3 \cdot 1^2 - 1 + 5} = \frac{16}{7}$

b) $g(x) = f(-3) + g(-4) \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x + 9 = 3 \cdot (-3)^2 - (-3) + 5 + (-2) \cdot (-4) + 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\frac{43}{2}$

16. **a)** $\frac{4x - 2}{3} = 6 \Rightarrow x = 5$

b) $\frac{4x - 2}{3} = -10 \Rightarrow x = -7$

c) $\frac{4x - 2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ não existe

d) $\frac{4x - 2}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$ não existe

17. **a)** $t = 0 \Rightarrow v(0) = 1\,800 \cdot \left(1 - \frac{0}{20}\right) = 1\,800$ (1 800 reais)

b) $t = 1 \Rightarrow v(1) = 1\,800 \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right) = 1\,710$ (1 710 reais)

A desvalorização é, portanto, $1\,800 - 1\,710 = 90$ (90 reais).

c) $1\,260 = 1\,800 \cdot \left(1 - \frac{t}{20}\right) \Rightarrow \frac{1\,260}{1\,800} = 1 - \frac{t}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}7 = 1 - \frac{t}{20} \Rightarrow \frac{t}{20} = 0{,}3 \Rightarrow t = 6$ (6 anos)

18. **a)** $f(-8) = -4 \Rightarrow -\frac{3}{4} \cdot (-8) + m = -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 + m = -4 \Rightarrow m = -10$

b) $f(1) = -\frac{3}{4} \cdot 1 - 10 = -\frac{43}{4}$

c) $-\frac{3}{4}x - 10 = -12 \Rightarrow -\frac{3}{4}x = -2 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

19. **a)** $y = 400 - \frac{5}{2} \cdot 60 = 250$ (250 pagantes)

b) $320 = 400 - \frac{5}{2}x \Rightarrow \frac{5x}{2} = 80 \Rightarrow x = 32$ (32 reais)

c) $y = 400 - \frac{5}{2} \cdot 90 = 175$ (175 pagantes)

Como o ingresso cobrado foi R$ 90,00, a arrecadação foi $175 \cdot 90 = 15\,750$ (15 750 reais).

20. **a)** $f(1) = m \cdot 4^1 = 12 \Rightarrow m = 3$

b) $f(2) = 3 \cdot 4^2 = 48$

21. **a)** $p(0) = 10 - \frac{2}{0 + 1} = 8$ (8 milhares de pessoas, ou seja, 8 000 pessoas)

b) $p(3) = 10 - \frac{2}{3 + 1} = 10 - 0{,}5 = 9{,}5$ (9,5 milhares de pessoas, ou seja, 9 500 pessoas).

c) $p(4) = 10 - \frac{2}{4 + 1} = 10 - 0{,}4 = 9{,}6$ (9,6 milhares de pessoas, ou seja, 9 600 pessoas)

O acréscimo é $p(4) - p(3) = 9\,600 - 9\,500 = 100$ (100 pessoas).

d) 9 900 pessoas = 9,9 milhares de pessoas

Devemos determinar **x** correspondente a $p(x) = 9{,}9$:

$9{,}9 = 10 - \frac{2}{x + 1} \Rightarrow \frac{2}{x + 1} = 0{,}1 \Rightarrow \frac{2}{x + 1} = \frac{1}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 19$.

Daqui a 19 anos.

22. **a)** $N = \frac{5 \cdot 28 + 28}{4} = 42$

b) $36 = \frac{5 \cdot C + 28}{4} \Rightarrow 5C + 28 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 23{,}2$ (23,2 cm)

c) Sejam $\mathbf{N_1}$ e $N_2 = N_1 + 4$ as numerações e $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ os respectivos comprimentos, temos:

- $N_1 = \frac{5 \cdot C_1 + 28}{4} \Rightarrow 5C_1 + 28 = 4N_1 \Rightarrow$

  $\Rightarrow C_1 = \frac{4 \cdot N_1 - 28}{5}$

- $N_1 + 4 = \frac{5 \cdot C_2 + 28}{4} \Rightarrow 5C_2 + 28 = 4N_1 + 16 \Rightarrow$

  $\Rightarrow C_2 = \frac{4 \cdot N_1 - 12}{5}$

Daí, $C_2 - C_1 = \left(\frac{4 \cdot N_1 - 12}{5}\right) - \left(\frac{4 \cdot N_1 - 28}{5}\right)$

$C_2 - C_1 = \frac{\cancel{4N_1} - 12 - \cancel{4N_1} + 28}{5} \Rightarrow C_2 - C_1 = \frac{16}{5} = 3{,}2$

O comprimento de seus pés diferem em 3,2 cm.

23. $f(a) + f(a + 1) = 3 \cdot f(2a) \Rightarrow$

$\Rightarrow (-3a + 5) + [-3(a + 1) + 5] = 3 \cdot (-3 \cdot 2a + 5) \Rightarrow$

$\Rightarrow -3a + 5 - 3a + 2 = -18a + 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6a + 7 = -18a + 15 \Rightarrow 12a = 8 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

24.
- $t = 0$ corresponde a $n(t) = 900 \Rightarrow 900 = a \cdot 0^2 + b \Rightarrow$ $\Rightarrow b = 900$
- $t = 15$ corresponde a $n(t) = 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 15^2 + b$; como $b = 900$, temos $0 = 225a + 900 \Rightarrow a = -4$

  $n(t) = -4 \cdot t^2 + 900$

  $n(5) = -4 \cdot 5^2 + 900 = 800$ (800 pessoas doentes)

25. **a)**

D = A
CD = B
Im = {0, 1, 2, 3, 4}

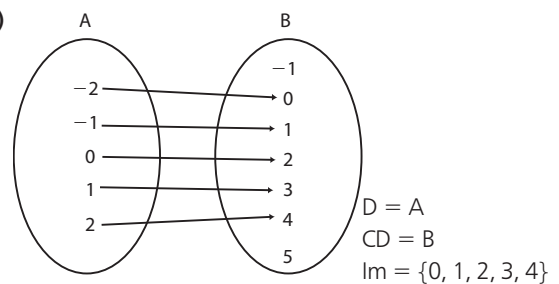
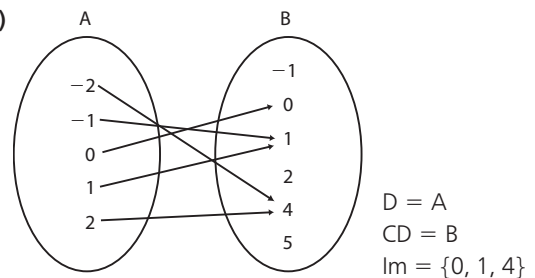
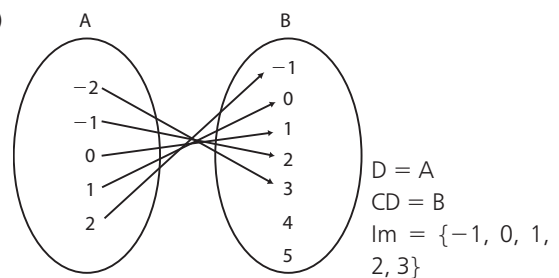
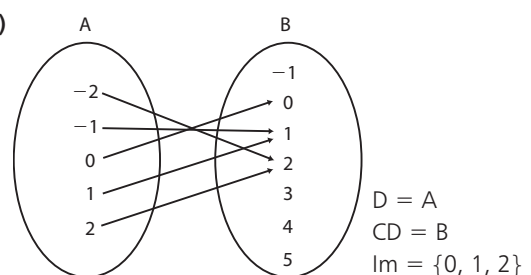
b)

D = A
CD = B
Im = {0, 1, 4}

c)

D = A
CD = B
Im = {−1, 0, 1, 2, 3}

d)

D = A
CD = B
Im = {0, 1, 2}

26. $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e
$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$Im = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$; Os elementos de **B** que não pertencem a Im são: $-5, -4, -2, 0, 2$ e 4, num total de 6.

27. O conjunto imagem de **f** é $Im = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leqslant 0\} = \mathbb{Z}_-$.

28. **a)** $\mathbb{R}$ **c)** $x \neq 0$ e $D = \mathbb{R}^*$
b) $\mathbb{R}$ **d)** $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ e $D = \mathbb{R} - \{1\}$

29. **a)** $x - 2 \geqslant 0$ e $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
b) $\mathbb{R}$
c) $x - 3 \geqslant 0$ e $\sqrt{x - 3} \neq 0 \Rightarrow x \geqslant 3$ e $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x > 3$;
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
d) $x + 1 \geqslant 0$ e $x \neq 0 \Rightarrow x \geqslant -1$ e $x \neq 0$;
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1 \text{ e } x \neq 0\}$

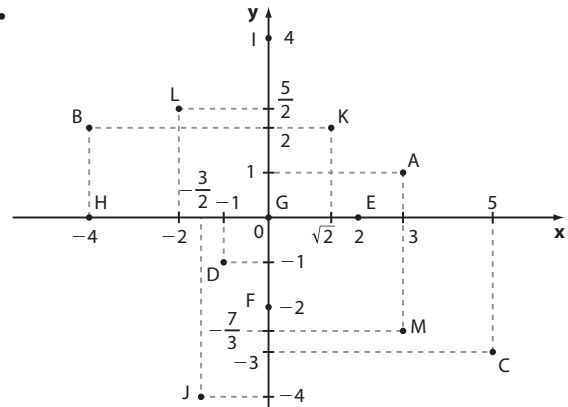
30. **a)** $2x - 1 \geqslant 0$ e $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$ e $x \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$
b) $-3x + 5 \geqslant 0$ e $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{5}{3}$ e $x \geqslant 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$
$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}\right\}$
c) $x^3 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \neq 0, x \neq 2$ e $x \neq -2$
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2, x \neq 0, x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$
d) Devemos ter $x^2 + 5 \geqslant 0$. Como, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, então $x^2 + 5 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, $D = \mathbb{R}$.

31. **a)** Das 10:00 às 12:00; das 12:30 às 14:00; das 15:30 às 16:00; das 17:00 às 18:00.
b) Das 12:00 às 12:30; das 14:00 às 15:30; das 16:30 às 17:00.
c) Entre R$ 9,20 e R$ 12,00.
d) 15:00; um valor próximo das 16:00 e às 17:00.
e) Alta; 2%.

32. **a)** Julho de 2013.
b) Fevereiro de 2015.
c) IPCA subiu: março a abril e julho a dezembro.
IPCA caiu: janeiro a março e abril a julho.
d) Em 6 meses: jan./13; jan./15; fev./15; mar./15; abr./15 e jun./15.
e) Não; veja, por exemplo, o ano de 2015.

33. **a)** Verdadeira.
b) Falsa. Em 2009 a taxa em BH caiu (em relação a 2008) de 6,8% para 6,1% e a taxa em SP subiu de 8,3% para 8,9%.
c) Verdadeira. (6 pontos percentuais)
d) Falsa. Em 2013: RJ → 4,7% e BH → 4,3%
e) Falsa. Apenas a taxa era menor; para saber o número de desempregados é preciso conhecer as populações economicamente ativas das duas regiões.

34. **a)** 1994 a 1995; 1997 a 1999; 2000 a 2003; 2005 a 2006 e 2009 a 2010.
b) 1994 e 1995; aumento superior a 1 000 km^2.
c) Maior área: 2003
d) 2005 a 2006 e 2007 a 2008.
e) Área de um campo de futebol: $(70\,m) \cdot (100\,m) = 7\,000\,m^2$
Área desmatada: $474\ km^2 = 474\,000\,000\ m^2$
Número de campos de futebol: $\frac{474\,000\,000}{7\,000} \simeq$
$\simeq 67\,714{,}28$. São 67 714 campos.

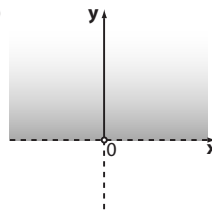
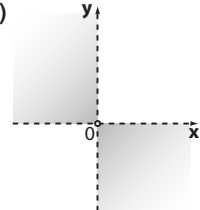
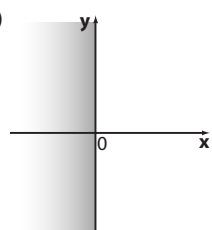
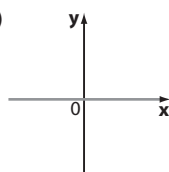
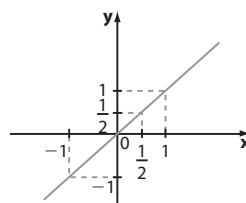
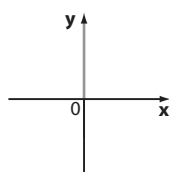
35.

36. A(4, 2) D(4, −5) G(0, −6)
B(−4, 6) E(0, 4) H(5, 0)
C(−5, −3) F(−3, 0) I(0, 0)

37. **a)** $x = 2$ e $y = -5$
b) $\begin{cases} x + 4 = 5 \\ y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ e $y = 4$
c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 4$ e $y = -1$

38. $\begin{cases} m^2 = 16 \Rightarrow m = +4 \text{ ou } m = -4 \\ m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4 \end{cases}$
Portanto, $m = -4$.

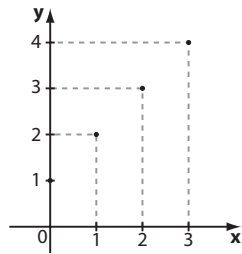
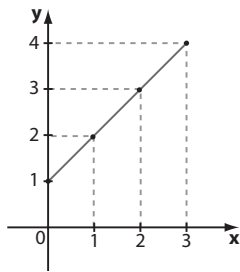
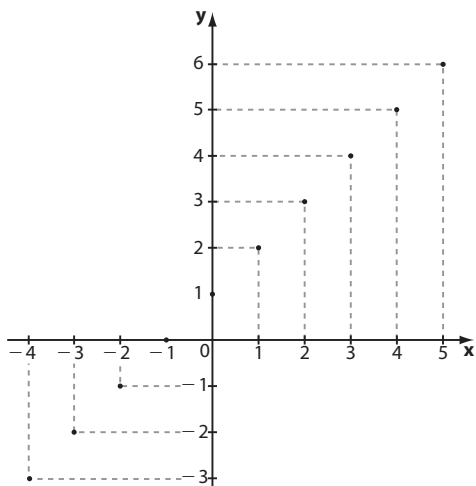
39. $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

40. $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = +1$ ou $m = -1$

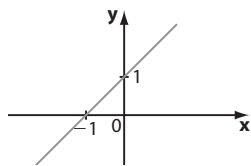
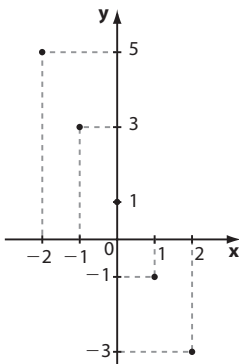
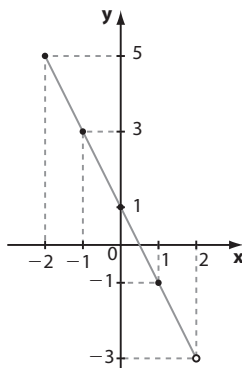
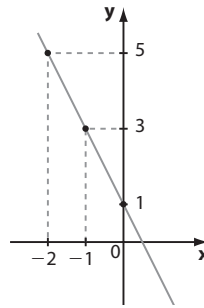
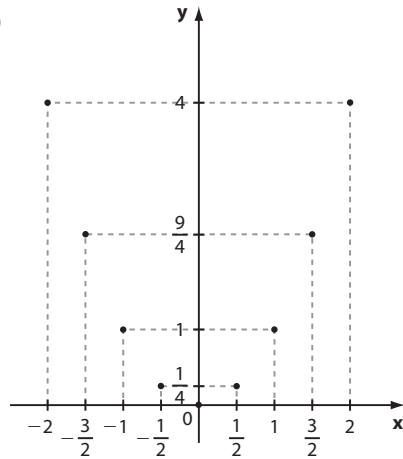
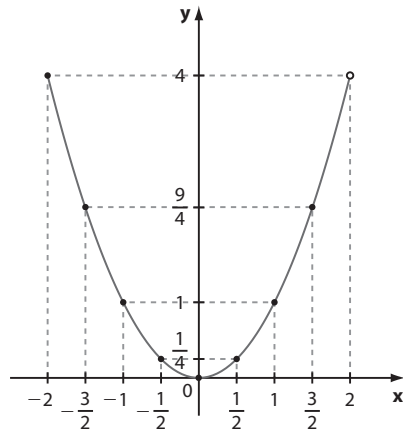
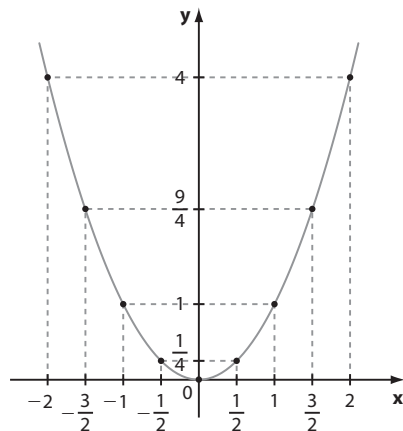
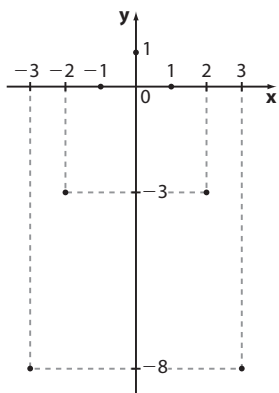
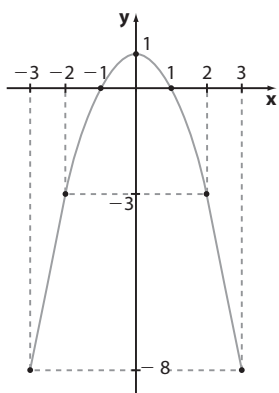
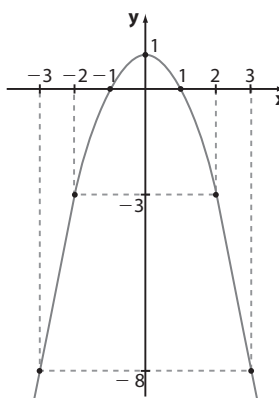
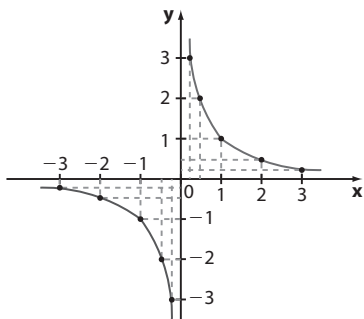
41. **a)**

d)

b)

e)

c)

f)

42. **a)** $a < 0$ e $b > 0$
b) Como $a < 0$, temos que $-a > 0$ e $b > 0$, e o ponto **Q** pertence ao 1º quadrante.

43. a) $-a < 0 \Rightarrow a > 0$; $b < 0$

b) Como $a > 0$ e $b < 0$, o ponto **S** pertence ao 4º quadrante.

44. a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$
$Im = \{1, 2, 3, 4\}$

b) $A = [0, 3]$
$Im = [1, 4]$

c) $A = \mathbb{Z}$
$Im = \mathbb{Z}$

d) $A = \mathbb{R}$
$Im = \mathbb{R}$

45. a)

b)

c)

46. a)

b)

c)

47. **a)**

b)

c)

48.

49. $y = 2x + b$; Pelo gráfico, se $x = 0$, então $y = 3$:
$3 = 2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$

50. $y = ax^2 + b$; Pelo gráfico, se $x = 0$, então $y = 2$:
$2 = a \cdot 0^2 + b \Rightarrow b = 2$
Agora, $y = ax^2 + 2$; Pelo gráfico, se $x = 1$, então $y = 3$:
$3 = a \cdot 1^2 + 2 \Rightarrow a = 1$

51. **a)** $f(a) = 5 \Rightarrow -3a + 2 = 5 \Rightarrow a = -1$
$f(b) = -7 \Rightarrow -3b + 2 = -7 \Rightarrow b = 3$
b) A abscissa de **P** é obtida fazendo $y = 0$, isto é,
$-3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

52. *c*, *d*, *e* e *g*.
c) Para cada $x < 0$ há duas imagens associadas.
d) $x = -3$ possui duas imagens: 1 e −1.
e) Observe que para $-1 < x < 1$ não há imagem correspondente.
g) $x = 1$ está associado a infinitos valores de **y**; para $x \neq 1$ não há imagem.

53. **a)** **f** é crescente se $x > 0$; **f** é decrescente se $x < 0$.
b) **f** é crescente se $x > -3$; **f** é decrescente se $x < -3$.
c) **f** é constante se $x < 2$; **f** é crescente se $x > 2$.
d) **f** é crescente se $-2 < x < 4$; **f** é decrescente se $x < -2$ ou $x > 4$.
e) **f** é crescente em $\mathbb{R}$.

54. **a)** Raiz: $x = -3$
$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -3 \\ y < 0, \text{ se } x < -3 \end{cases}$

b) Raízes: $x = 0$ e $x = 2$
$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ y < 0, \text{ se } 0 < x < 2 \end{cases}$

c) Raízes: −1 e 1
$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ y < 0, \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases}$

d) Raízes: −5, −3 e 1
$\begin{cases} y > 0 \text{ se } -5 < x < -3 \text{ ou } x > 1 \\ y < 0 \text{ se } x < -5 \text{ ou } -3 < x < 1 \end{cases}$

e) Não há raízes reais.
$\begin{cases} y > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\ y < 0 \text{ não ocorre} \end{cases}$

f) Raízes: −3 e $\frac{15}{2}$
$\begin{cases} y > 0, \text{ se } -3 < x < \frac{15}{2} \\ y < 0, \text{ se } x < -3 \text{ ou } x > \frac{15}{2} \end{cases}$

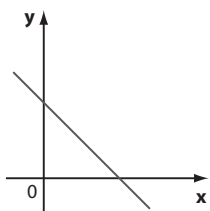
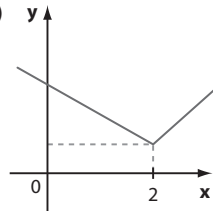
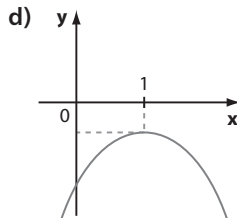
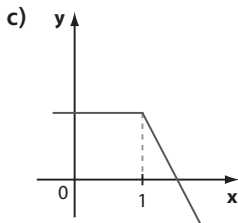
55. **a)** $f(-1) = 4$; $f(0) = 4$; $f(-3) = \frac{3}{2}$ e $f(3) = 0$
b) $x < -2$; $]-\infty, -2[$
c) $\frac{3}{2} < x < \frac{9}{2}$; $\left]\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right[$
d) $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 3 \\ y < 0, \text{ se } 3 < x < \frac{9}{2} \end{cases}$
e) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{2} < y \leq 4\right\}$
f) 3

56. Respostas possíveis:

a)

b)

c)

d)

57. **a)** Im = $\mathbb{R}_+$
b) Im = {4}
c) Im = $]-\infty, 3]$
d) Im = $\mathbb{R}^*_-$

58. **a)** **P**; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$
b) **O**
c) **I**; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$
d) **P**; $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

59. **a)** $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{4 - 4}{2} = 0$

b) $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{7 - 3}{2} = 2$

c) $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{-3 - 3}{2} = -3$

d) $\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{4 - 4}{2} = 0$

60. A taxa de variação nos cinco primeiros anos é o quádruplo da taxa de variação nos cinco últimos anos. Nos cinco primeiros anos o lucro cresceu quatro vezes mais rápido que nos últimos cinco anos:
De 2000 a 2005: $\dfrac{100 - 60}{5} = 8$ (8 milhares/ano)
De 2010 a 2015: $\dfrac{115 - 105}{5} = 2$ (2 milhares/ano)

61. **a)** $\dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{2^4 - 2^1}{3} = \dfrac{14}{3} \simeq 4,\overline{6}$

b) $\dfrac{g(4) - g(1)}{4 - 1} = \dfrac{16 - 4}{3} = 4$

c) $\dfrac{h(4) - h(1)}{4 - 1} = \dfrac{-8 + 0,5}{3} = -2,5$

d) $\dfrac{i(4) - i(1)}{4 - 1} = \dfrac{-7 - 2}{3} = -3$

62. **a)** i) $\dfrac{3\,952 - 2\,766}{1970 - 1960} = 118,6$ (118,6 municípios/ano)

ii) $\dfrac{3\,991 - 3\,952}{1980 - 1970} = 3,9$ (3,9 municípios/ano)

iii) $\dfrac{5\,565 - 1\,889}{2010 - 1950} \simeq 61,3$ (61,3 municípios/ano)

b) A T.M.V. da função no período de 1991 a 2000 é aproximadamente 112,9 municípios/ano $\left(\dfrac{5\,507 - 4\,491}{9} \simeq \simeq 112,9\right)$, que é menor que a taxa obtida no item *i* do item anterior. Assim, entre os censos de 1960 e 1970 o número de municípios cresceu mais rápido.

Desafio

h está definida se $f(x) - g(x) \geqslant 0$, isto é, $f(x) \geqslant g(x)$.

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$, de modo que $f(x) > g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, temos D = $\mathbb{R}$.

b) Os gráficos de **f** e **g** se intersectam em dois pontos cujas abscissas são $-\dfrac{1}{2}$ e 3.

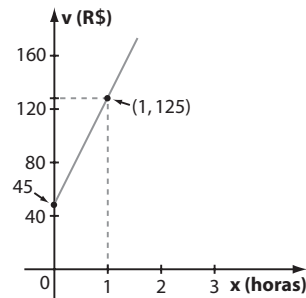
- Se $x < -\dfrac{1}{2}$, $f(x) > g(x)$ e, neste caso, **h** está definida.
- Se $-\dfrac{1}{2} < x < 3$, $g(x) > f(x)$, e, neste caso, **h** não fica definida.
- Se $x > 3$, $f(x) > g(x)$ e, neste caso, **h** fica definida.
- Se $x = -\dfrac{1}{2}$ ou $x = 3$, temos $f(x) = g(x)$ e a diferença $f(x) - g(x)$ vale zero; neste caso, $h(0) = \sqrt{0} = 0 \in \mathbb{R}$.

Assim, o domínio de **h** é $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\dfrac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3\right\}$.

c) Para todo $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) > f(x)$ e, neste caso, não se define a função **h**, dada por $h(x) = \sqrt{f(x) - g(x)}$.
Se x = 0, temos $f(0) = g(0) = 0$ e $h(0) = \sqrt{0} = 0$.
Assim, x = 0 é o único elemento do domínio da função **h**, isto é, D = {0}.

Função afim

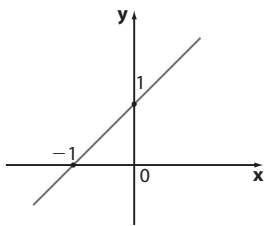
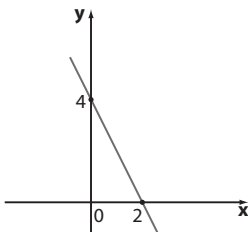
Exercícios

1. **a)** $45 + 2,5 \cdot 80 = 245$ (245 reais)
b) $45 + 4 \cdot 80 = 365 < 400$; assim, é possível contratá-lo.
c) $v(x) = 45 + 80 \cdot x$

2. **a)** Ele deve ganhar 180 g, ou 0,18 kg, por dia; sua massa após uma semana é $75 + 0,18 \cdot 7 = 76,26$ (76,26 quilogramas).
b) $m(n) = 75 + 0,18n$
c) O número **n** de dias necessários para ele atingir ao menos 80 kg é a solução da inequação
$75 + 0,18n > 80 \Rightarrow n > \dfrac{5}{0,18} = 27,77...$
Então, com 28 dias de treinamento, sua massa será maior do que 80 kg.
Outro modo é calcular a massa ao fim de um mês: $75 + 0,18 \cdot 30 = 80,4$, que é maior do que 80 kg.
A resposta é sim.

3. **a)** 1ª opção: $p(t) = 18$; 2ª opção: $p(t) = 2,5 \cdot t$
b) Na 2ª opção, ele teria pagado $2,5 \cdot 5 = 12,50$ (12,50 reais). Assim, ao escolher a 1ª opção, ele pagou a mais $18 - 12,50 = 5,50$ (5,50 reais).
c) $18 = 2,5 \cdot t \Rightarrow t = 7,2$ (7,2 horas).
Como $0,2\text{h} = 0,2 \cdot 60$ minutos = 12 minutos, o tempo pedido é 7 horas e 12 minutos.

4. **a)** $15 \cdot 30 = 450$ (450 L)
b) $y = 15x$
c) $y = 21\,000 - 15x$
d)
- 21 m^3 equivalem a 21 000 L
- $21\,000 \div 15 = 1\,400$ (1 400 minutos)
- $1\,400 \div 60 = 23,\overline{3} = 23\frac{1}{3}$

Portanto, são 23 horas e 20 minutos.

5. **a)** Usando os pontos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$:

b) Usando os pontos $(0, 4)$ e $(2, 0)$:

c) Usando os pontos $(0, 2)$ e $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$:

d) Usando os pontos $(0, -2)$ e $(-2, 0)$:

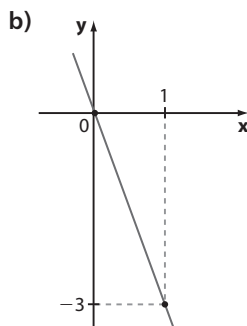
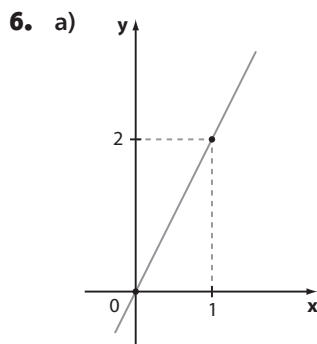
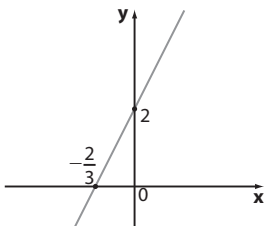
e)

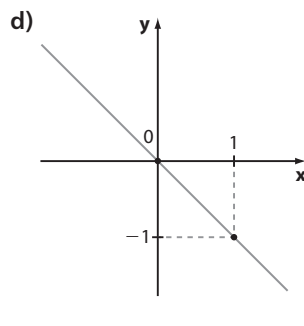
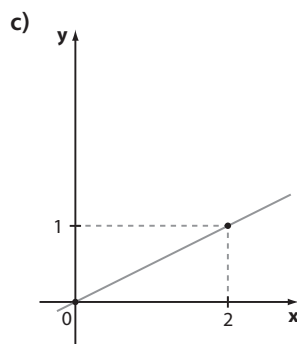
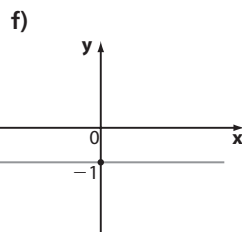
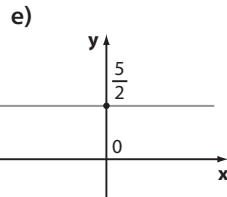
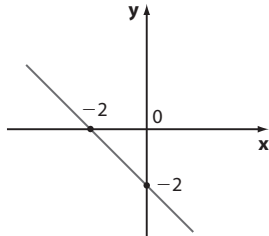
f)

6. **a)**

b)

c)

d)

A propriedade observada é que todas as retas passam pela origem $(0, 0)$.

7. Se $y = ax + b$, substituindo os pontos $(-1, 5)$ e $(2, -4)$, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 5 = -a + b \\ -4 = 2a + b \end{cases}, \text{ de solução } a = -3 \text{ e } b = 2.$$

Então, $y = -3x + 2$.

8. Substituindo os pontos em $y = ax + b$, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 2 = -4a + b \\ 5 = 2a + b \end{cases}, \text{ de solução } a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 4.$$

A equação é $y = \frac{1}{2}x + 4$.

9. **a)** Substituindo os pontos $(0, 0)$ e $(-1, 3)$ na expressão $y = ax + b$, tem-se que $b = 0$ e $a = -3$. A equação é $y = -3x$.

b) Substituindo os pontos $(-1, 1)$ e $(0, 4)$ na expressão $y = ax + b$, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 1 = -a + b \\ 4 = 0 + b \end{cases} \Rightarrow b = 4 \text{ e } a = 3$$

A equação é $y = 3x + 4$.

c) Como a reta é paralela ao eixo Ox, trata-se de uma função constante, cuja lei é $y = \frac{11}{3}\left(\text{ou } y - \frac{11}{3} = 0\right)$.

10. Sejam **v** o valor da corrida e **x** o número de quilômetros rodados.

$v(x) = ax + b$

$$\begin{cases} 48{,}80 = a \cdot 10 + b \\ 111{,}80 = a \cdot 25 + b \end{cases} \Rightarrow a = 4{,}2 \text{ e } b = 6{,}80$$

$v(x) = 4{,}2x + 6{,}80$

Assim, $v(18) = 4{,}2 \cdot 18 + 6{,}80 = 82{,}40$ (82,40 reais)

11. **a)** Usando os pontos $(0, 0)$ e $(1, 2)$, determina-se que $y = 2x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Assim, para $x = \frac{1}{2}$, tem-se $y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

b) Para $1 \leqslant x \leqslant 4$, observa-se que a função é constante, isto é, para todo **x** neste intervalo tem-se $y = 2$. Logo, $f(3) = 2$.

c) A reta que passa por $(4, 2)$ e $(6, 4)$ tem equação $y = x - 2$.

Assim, para $x = \frac{11}{2} = 5{,}5$, temos $y = 5{,}5 - 2 = 3{,}5$.

12. Lei de **f**: $y = ax + b$

$$\begin{cases} 3 = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + b \end{cases} \Rightarrow b = 3 \text{ e } a = 2$$

$f(x) = 2x + 3$

$f(4) = 2 \cdot 4 + 3 = 11$

Assim, a reta correspondente à função **g** passa por $(0, 15)$ e $(4, 11)$.

$g(x) = mx + n$

$$\begin{cases} 15 = m \cdot 0 + n \\ 11 = m \cdot 4 + n \end{cases} \Rightarrow n = 15 \text{ e } m = -1$$

$g(x) = -x + 15 \Rightarrow g(8) = -8 + 15 = 7$

13. **a)** $y = ax + b$

$$\begin{cases} 1\,220 = a \cdot 8\,000 + b \\ 1\,100 = a \cdot 5\,000 + b \end{cases} \Rightarrow a = 0{,}04 \text{ e } b = 900$$

$y = 0{,}04 \cdot x + 900$

b) R$ 900,00

c) Não; pois a parte fixa do salário não dobra (apenas a parte variável dobra).
Façamos um teste:
$x = 5\,000 \Rightarrow y = 1\,100$
$x = 10\,000 \Rightarrow y = 0{,}04 \cdot 10\,000 + 900 = 1\,300$

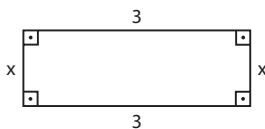
14. a) $3x = x + 2 \Rightarrow x = 1$; $f(1) = 3 \cdot 1 = 3$ e o ponto é $(1, 3)$.
b) $-x + 3 = 2x - 6 \Rightarrow x = 3$
$f(3) = -3 + 3 = 0$; o ponto é $(3, 0)$.
c) $x + 2 = x - 4 \Rightarrow 0 \cdot x = -6 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
Assim, as retas **r** e **s** são paralelas; $r \cap s = \varnothing$.

15. a) $\frac{x}{y} = \frac{1{,}2}{2{,}4} = \frac{1}{2}$ Assim:
$\frac{2{,}1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4{,}2$; $\frac{0{,}85}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 1{,}7$; $\frac{c}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 2$
b) $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ Daí: $\frac{15}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 10$; $\frac{60}{b} = \frac{3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3b = 120 \Rightarrow b = 40$

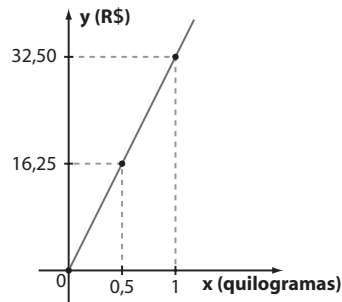
16. $\frac{15\,000}{12\,000} = \frac{x}{5\,400 - x} \Rightarrow 4x = 2\,700 - 5x \Rightarrow x = 3\,000$
Paulo deve receber R$ 3 000,00 e Roberto, R$ 2 400,00.
Observe que $\frac{15}{12} = \frac{3\,000}{2\,400} = \frac{5}{4}$.

17.
- Sim; observe que, se o lado mede **x**, o perímetro mede 4x; se o lado mede 2x, o perímetro mede $4 \cdot 2x = 8x$ (que é o dobro de 4x). Como $p = 4 \cdot \ell \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{p}{\ell} = 4$.
- Não; tome, por exemplo, $\ell_1 = 1 \Rightarrow A_1 = 1^2 = 1$. Dobrando-se a medida do lado, isto é, $\ell_2 = 2$, tem-se $A_2 = 2^2 = 4$ (a área quadruplica).

18.

3
x x
3

a) O perímetro do retângulo é:
$3 + 3 + x + x = 6 + 2x$;
$x = 1$ m $\Rightarrow$ perímetro $= 8$ m
$x = 2$ m $\Rightarrow$ perímetro $= 10$ m — não dobrou!
Assim, o perímetro não é diretamente proporcional a **x**.
b) Sim; $A = 3 \cdot x \Leftrightarrow \frac{A}{x} = 3$; isso mostra que a área é diretamente proporcional a **x**. Vejamos:
$x = 2 \Rightarrow A = 3 \cdot 2 = 6$
$x = 4 \Rightarrow A = 3 \cdot 4 = 12$ — dobrou!

19. a) Sim, observe que $\frac{7{,}5}{3} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \ldots = 2{,}5$
b) $d = 2{,}5$ g/cm^3
c) $m = 2{,}5 \cdot V$

20. a) 300 g: $3{,}25 \cdot 3 = 9{,}75$ (9,75 reais)
600 g: $3{,}25 \cdot 6 = 19{,}50$ (19,50 reais)
b) O preço de 1 kg (1 000 g) é $3{,}25 \cdot 10 = 32{,}5$;
$y = 32{,}5 \cdot x$

c) $17{,}55 = 32{,}5 \cdot x \Rightarrow x = 0{,}54$ kg $= 540$ g

21.
- Modelo I: Em 3 minutos, 14,1% já foi carregado.
- Por minuto, o percentual carregado é: $\frac{14{,}1\%}{3} = 4{,}7\%$.
- Tempo de carregamento: $\frac{100}{4{,}7} \simeq 21{,}3$
(21,3 min > 20 min). Descartado.
- Modelo II: Por minuto, o percentual carregado é $\frac{14{,}5\%}{3} = 4{,}8\overline{3}\%$
Tempo de carregamento: $\frac{100}{4{,}83} \simeq 20{,}7$
(20,7 min > 20 min). Descartado.
- Modelo III: Por minuto, o percentual carregado é $\frac{14{,}7\%}{3} = 4{,}9\%$.
Tempo de carregamento: $\frac{100}{4{,}9} \simeq 20{,}4$
(20,4 min > 20 min). Descartado.
- Modelo IV: Por minuto, o percentual carregado é $\frac{15{,}3\%}{3} = 5{,}1\%$
Tempo de carregamento: $\frac{100}{5{,}1} \simeq 19{,}6$
(19,6 min < 20 min). Aprovado.

Observe que não é necessário fazer todas essas contas; basta saber se os quocientes $\frac{100}{4{,}7}$; $\frac{100}{4{,}83}$; $\frac{100}{4{,}9}$; e $\frac{100}{5{,}1}$ são maiores ou menores do que 20.

22. a) $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
b) $-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
c) $-\frac{3x - 5}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$
d) $4x = 0 \Rightarrow x = 0$
e) $\frac{2x}{5} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$
f) $-x = 0 \Rightarrow x = 0$

23. Se -2 é raiz, $a \cdot (-2) - 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$
A lei da função é $y = -\frac{3}{2}x - 3$ e $f(3) = -\frac{9}{2} - 3 = -\frac{15}{2}$.

24. a) $12x + 5 = 2x + 8 \Rightarrow 10x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{10}$; $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$
b) $5(3 - x) + 2(x + 1) = -x + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 15 - 5x + 2x + 2 = -x + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x = -12 \Rightarrow x = 6$; $S = \{6\}$
c) $5x + 20(1 - x) = 5 \Rightarrow 5x + 20 - 20x = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 1$; $S = \{1\}$
d) $-x + 4(2 - x) = -2x - (10 + 3x) \Rightarrow$
$\Rightarrow -x + 8 - 4x = -2x - 10 - 3x \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{-5x} + 8 = \cancel{-5x} - 10 \Rightarrow 8 = -10$; $S = \varnothing$

e) $\frac{2x}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x}{2} + \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4x}{6} - \frac{3}{6} = \frac{15}{6}x + \frac{8}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -1;\ S = \{-1\}$

f) $\frac{6x}{5} - \frac{x+3}{2} = \frac{x}{3} - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{36}{30}x - \frac{15}{30}x - \frac{45}{30} = \frac{10x}{30} - \frac{30}{30} \Rightarrow x = \frac{15}{11};$
$S = \left\{\frac{15}{11}\right\}$

25. $med(\hat{B}) = x;\ med(\hat{A}) = x + 10°;$
$med(\hat{C}) = 2(x + 10°) - 30° = 2x - 10°$
Daí, $x + (x + 10°) + (2x - 10°) = 180° \Rightarrow x = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow med(\hat{B}) = 45°;\ med(\hat{A}) = 55°$ e $med(\hat{C}) = 80°$

26. a) André hoje: $x \to$ André há 5 anos: $x - 5$
Carlos hoje: $x + 4 \to$ Carlos há 5 anos: $x + 4 - 5 =$
$= x - 1$
Daí, $(x - 5) + (x - 1) = 84 \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45$ e
$45 + 4 = 49$.
André tem 45 anos e Carlos tem 49 anos.

b) Seja **n** o número de anos pedido; Carlos tinha $(49 - n)$ anos e André tinha $(45 - n)$ anos. Daí:
$49 - n = 2 \cdot (45 - n) \Rightarrow n = 41$ (há 41 anos)

27. Seja **n** o número de equipamentos que Carlos revisou;
$\begin{cases} \text{Bruno: } n - 2 \\ \text{André: } n - 2 - 3 = n - 5 \end{cases}$
$n + (n - 2) + (n - 5) = 53 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3n = 60 \Rightarrow n = 20$
Carlos: 20; Bruno: 18; André: 15.

28. Seja **x** o valor recebido por hora de trabalho:
Paulo deverá receber 4x
Joana deverá receber $3x + \frac{1}{3}x = \frac{10x}{3}$
$\left(\text{observe que } 3\text{ h }20\text{ min} = 3\text{ h} + \frac{1}{3}\text{ h} = \frac{10\text{ h}}{3}\right)$
Daí, $4x = \frac{10x}{3} + 15 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 15 \Rightarrow x = 22{,}50$.
Paulo: $4 \cdot 22{,}50 = 90$ (90 reais)
Joana: $\frac{10}{3} \cdot 22{,}5 = 75$ (75 reais)

29. a) $a = 4 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$
$a = -3 \Rightarrow -5x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1$
$a = 0 \Rightarrow -2x - 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

b) Não; se $a = 2$ temos $(2 - 2) \cdot x - 5 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \cdot x = 5$; não existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaz a equação, logo a equação não tem solução.
Se $a \neq 2$, a equação tem uma única solução, dada por $x = \frac{5}{a - 2}$.

30. Sejam: $\begin{cases} \text{Arquibancada: } x \text{ reais} \\ \text{Numerada: } (x + 30) \text{ reais} \end{cases}$

- $70\% \cdot 3\,200 = 2\,240$ (2 240 arquibancada e 960 numerada)
- Como a renda foi de 140 800 reais, podemos escrever:
$2\,240 \cdot x + 960 \cdot (x + 30) = 140\,800 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3\,200x = 112\,000 \Rightarrow x = 35$
Assim, o ingresso para arquibancada custava R$ 35,00 e para numerada, R$ 65,00.

31. a) 4 **b)** −3 **c)** 1 **d)** −1

32. a) A taxa de variação é: $\frac{75 - 50}{3 - 1} = \frac{25}{2} = 12{,}5$
(12,5 kg/mês)
Assim, se com 1 mês de vida o mamífero já tinha 50 kg, ele nasceu com $50 - 12{,}5 = 37{,}5$ (37,5 kg).

b) $37{,}5 + 2 \cdot 12{,}5 = 62{,}5$ (62,5 kg)

c) $37{,}5 + 4{,}5 \cdot 12{,}5 = 93{,}75$ (93,75 kg)

33. a) Do enunciado, sabemos que o volume de água na represa diminuiu 250 milhões de metros cúbicos $(500 - 250 = 250)$ em 8 anos. Como o decréscimo é linear, por ano ela perde $\frac{250}{8} = 31{,}25$ (31,25 milhões de metros cúbicos).
De 2017 a 2021 são 4 anos; assim, em 31/12/2021 ela terá $250 - 4 \cdot 31{,}25 = 250 - 125 = 125$ (125 milhões de metros cúbicos).

b) Da data do item *a*, terá passado 0,5 ano.
Assim, em 30/06/2022, serão $125 - \frac{1}{2} \cdot 31{,}25 =$
$= 109{,}375$ (109,375 milhões de metros cúbicos).

c) Considerando $t = 0$ a data de 31/12/2009, a lei que representa o volume (**V**), em milhões de m^3, do reservatório é: $V(t) = 500 - 31{,}25 \cdot t$, com **t** em anos.
Daí, $V(t) = 0 \Rightarrow 500 - 31{,}25 \cdot t = 0 \Rightarrow t = 16$ (16 anos)
Logo, a represa ficaria vazia em dezembro de 2025.

34. Em quatro anos, o quadro valorizou R$ 1 200,00 $(4\,500 - 3\,300 = 1\,200)$. Em 5 anos, valorizou **x** reais.
$\frac{4}{5} = \frac{1\,200}{x} \Rightarrow x = 1\,500$
Daqui a 5 anos o quadro custará:
R$ 4 500,00 + R$ 1 500,00 = R$ 6 000,00

35. a) Para produzir 0 litro são gastos R$ 4 000,00; assim, o valor 4 000 corresponde ao custo fixo de produção da empresa.

b) $5{,}2 - 4{,}0 = 1{,}2$; assim, com R$ 1 200,00 são fabricados 8 litros; o custo por litro é $\frac{1\,200}{8} = 150$ (150 reais).

c) $7\,000 - 4\,000 = 3\,000$;
$3\,000 \div 150 = 20$ (20 litros)

36. a) $\frac{33 - 29{,}5}{14 - 11{,}5} = \frac{3{,}5}{2{,}5} = 1{,}4$
A temperatura aumenta 1,4 °C por hora.
9:30 $\to 29{,}5 - 2 \cdot 1{,}4 = 26{,}7$ (26,7 °C)
15:00 $\to 33 + 1{,}4 = 34{,}4$ (34,4 °C)

b) $y = ax + b$
$a = 1{,}4$ (taxa de variação)
Como às 11:30 a temperatura era de 29,5 °C, temos:
$29{,}5 = 1{,}4 \cdot 3{,}5 + b \Rightarrow b = 24{,}6$
$y = 24{,}6 + 1{,}4x$

37. a) $a = 3$ e $b = -2$; crescente.
b) $a = -1$ e $b = 3$; decrescente.
c) $a = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{5}{3}$; decrescente.
d) $a = 9$ e $b = 0$; crescente.
e) $a = 4$ e $b = 8$; crescente.

38. a) $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 3$ **b)** $a = 1$ e $b = -1$

39. a) Considerando, por exemplo, os pontos (0, 0) e (2, 2 600), temos: $\frac{(2\,600 - 0)\text{ L}}{(2 - 0)\text{ h}} = 1\,300$ L/h

b) $a = 1\,300$

$b = 0$ (a reta passa pela origem)

c) $y = 1\,300x$

d) $26\,000 = 1\,300x \Rightarrow x = 20$ (20 horas)

40. **a)** $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -1 \\ y < 0, \text{ se } x < -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 2 \\ y < 0, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

41. **a)**

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > -\frac{1}{4} \\ y < 0, \text{ se } x < -\frac{1}{4} \end{cases}$

b)

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < \frac{1}{3} \\ y < 0, \text{ se } x > \frac{1}{3} \end{cases}$

c)

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 0 \\ y < 0, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

d)

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > 3 \\ y < 0, \text{ se } x < 3 \end{cases}$

e)

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x > 0 \\ y < 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

f)

$\begin{cases} y > 0, \text{ se } x < 3 \\ y < 0, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

42. **a)**

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

b)

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4}\right\}$

c)

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

d)

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

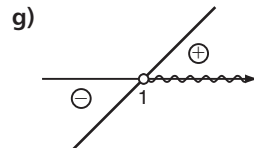
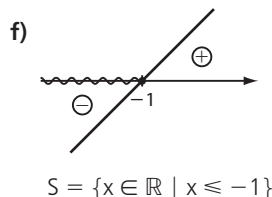
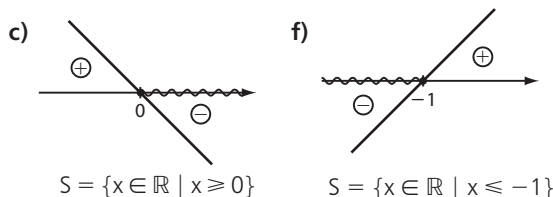
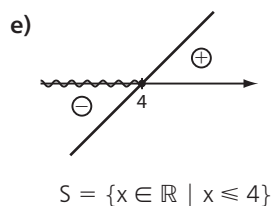
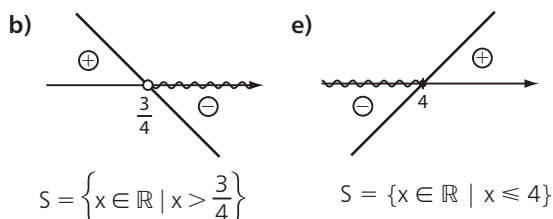
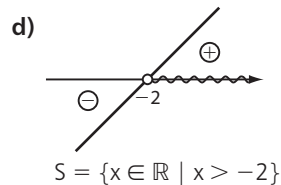
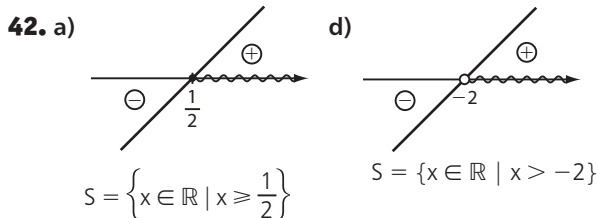
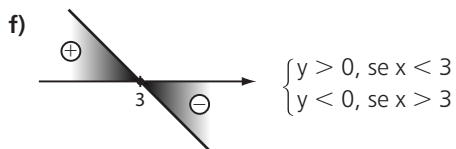
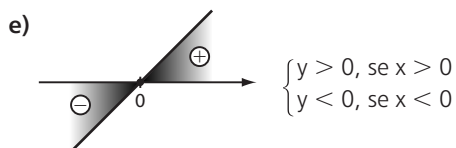
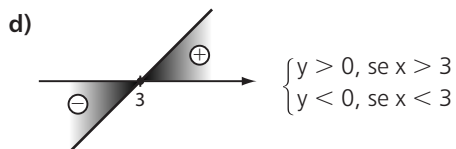
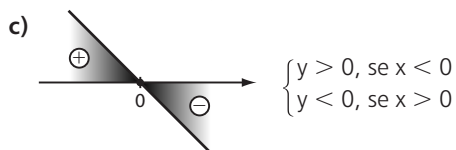
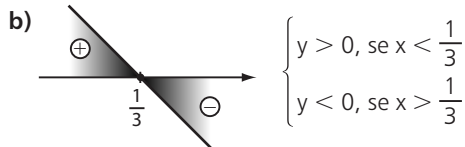
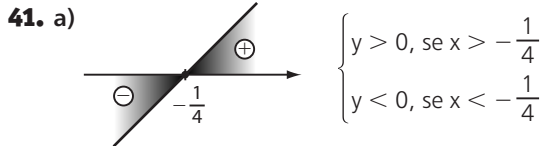
e)

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

f)

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

g)

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

43. **a)** $\frac{x-1}{3} - \frac{x-2}{2} \leqslant 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2(x-1)}{6} - \frac{3(x-2)}{6} \leqslant \frac{12}{6} \Rightarrow x \geqslant -8$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -8\}$

b) $\frac{2(3-x)}{5} + \frac{x}{2} \geqslant \frac{1}{4} + \frac{2(x-1)}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{24(3-x)}{60} + \frac{30x}{60} \geqslant \frac{15}{60} + \frac{40(x-1)}{60} \Rightarrow x \leqslant \frac{97}{34}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{97}{34}\right\}$

c) $\frac{3x-1}{4} - \frac{x-3}{2} \geqslant \frac{x+7}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3x-1}{4} - \frac{2(x-3)}{4} \geqslant \frac{x+7}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 5 \geqslant x + 7 \Rightarrow 0 \cdot x \geqslant 2$ não tem solução;

$S = \varnothing$

d) $(x-3)^2 - (4-x)^2 \leqslant \frac{x}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 - (16 - 8x + x^2) \leqslant \frac{x}{2} \Rightarrow x \leqslant \frac{14}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{14}{3}\right\}$

e) $\frac{4x-3}{5} - \frac{2+x}{3} < \frac{3x}{5} + 1 - \frac{2x}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3(4x-3)}{15} - \frac{5(2+x)}{15} < \frac{9x}{15} + \frac{15}{15} - \frac{2x}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x - 19 < 7x + 15 \Rightarrow 0 \cdot x < 34$, que é verdadeiro para todo **x** real; $S = \mathbb{R}$.

44. É dado que $2x - \frac{x}{2} < 6 \Rightarrow x < 4$.

Os números inteiros positivos que são soluções desse problema são 1, 2 e 3.

45. **a)** Para 2,5 h de trabalho, temos os seguintes valores, em reais:

Banda **A**: $800 + 250 \cdot 2{,}5 = 1\,425$

Banda **B**: $650 + 280 \cdot 2{,}5 = 1\,350$

É preferível contratar a banda **B**.

b) preço **A** < preço **B** $\Rightarrow 800 + 250x < 650 + 280x \Rightarrow$ $\Rightarrow 150 < 30x \Rightarrow 5 < x$, isto é, $x > 5$. Para mais de 5 horas de festa é mais econômico contratar **B**.

46. **a)** $-732{,}20 + 40 \cdot n$

b) 1º modo:

A dívida de Aline é de R$ 732,20. Após **n** meses (**n** depósitos), sua dívida será de $732{,}20 - 40 \cdot n$. Assim, devemos ter $732{,}20 - 40 \cdot n < 200 \Rightarrow$ $\Rightarrow 532{,}20 < 40 \cdot n \Rightarrow 13{,}305 < n \Rightarrow n > 13{,}305$; como **n** é natural, devemos ter $n = 14$ meses (nesse caso, seu saldo devedor é $732{,}20 - 40 \cdot 14 = 172{,}20$).

2º modo:

Se Aline deve menos de R$ 200,00, o saldo da sua conta deve ser um número maior do que -200, isto é, $-732{,}20 + 40 \cdot n > -200 \Rightarrow$

$\Rightarrow 40n > 532{,}20 \Rightarrow n > 13{,}305 \xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 14$

c) $-732{,}20 + 40n > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow\ 40n > 732{,}20 \Rightarrow\ n > 18{,}305$
Como $n \in \mathbb{N}$, devemos ter n = 19 meses. Nesse caso, seu saldo seria: $-732{,}20 + 40 \cdot 19 = 27{,}80$ (27,80 reais).

47. Temos:
$y = 50\,000 - 90t$, sendo **y** o número de quilogramas de soja produzidos no mês **t**, contado a partir de janeiro de 2017 (t = 0).
Devemos ter $y < 40\,000$, isto é,
$50\,000 - 90t < 40\,000 \Rightarrow 10\,000 < 90t \Rightarrow t > 111{,}\overline{1}$.
Como $t \in \mathbb{N}$, o menor valor de **t** que satisfaz é t = 112.
Como $112 = 9 \cdot 12 + 4$, concluímos que t = 112 meses corresponde a maio de 2026.

48. a) $-1 < 2x \leqslant 4 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \leqslant 2;$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x \leqslant 2\right\}$

b) $3 < x - 1 < 5 \Rightarrow 4 < x < 6;\ S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 6\}$

c) $4 > -x > -1 \Rightarrow -4 < x < 1;\ S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1\}$

d) $3 \leqslant x + 1 \leqslant -x + 6$
$2 \leqslant x \qquad 2x \leqslant 5 \Rightarrow x \leqslant \frac{5}{2}$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

e) $2x \leqslant -x + 9 \leqslant 5x + 21$
$3x \leqslant 9 \qquad -12 \leqslant 6x$
$x \leqslant 3 \qquad x \geqslant -2$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$

49. a) Locadora 1: $y = 100 + 0{,}30 \cdot x$
Locadora 2: $y = 60 + 0{,}40 \cdot x$
Locadora 3: $y = 150$

b) Locadora 1 < Locadora 2 $\Rightarrow$
$\Rightarrow 100 + 0{,}30x < 60 + 0{,}40x \Rightarrow 40 < 0{,}1x \Rightarrow$
$\Rightarrow 400 < x$, isto é, $x > 400$.
A partir de 401 km rodados.

c) Devemos ter, simultaneamente, Locadora 3 < Locadora 1 e Locadora 3 < Locadora 2, isto é:
$150 < 100 + 0{,}3x \Rightarrow 50 < 0{,}3x \Rightarrow 166{,}\overline{6} < x$ (*)
$150 < 60 + 0{,}4x \Rightarrow 90 < 0{,}4x \Rightarrow 225 < x$ (**)
De (*) ∩ (**) segue que $x > 225$ e, assim, a partir de 226 km deve-se optar pela locadora 3.

Desafio

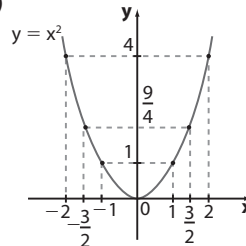
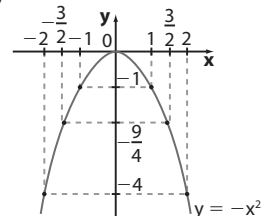
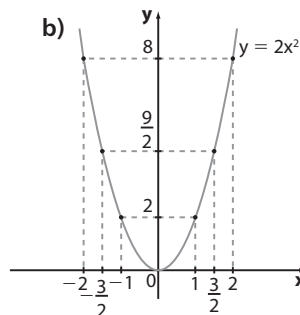
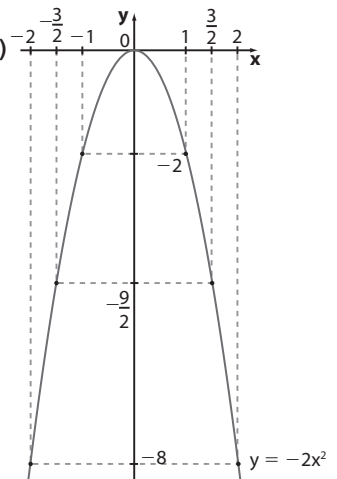
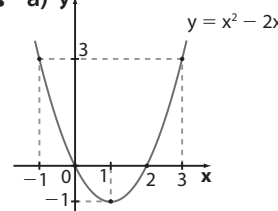
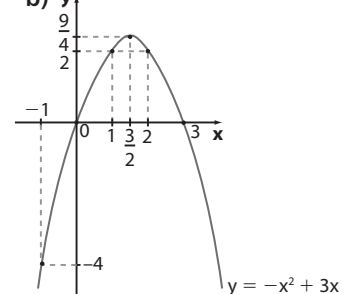
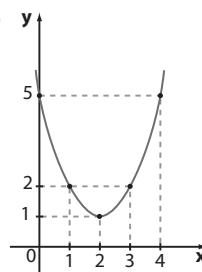
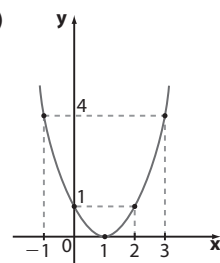
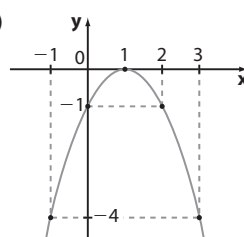
- Por hora, os 6 ralos escoam $\frac{900\ m^3}{6} = 150\ m^3$. Cada ralo escoa $\frac{150\ m^3}{6} = 25\ m^3$ de água por hora.
- No novo reservatório, com capacidade de 500 m³, o escoamento deve ser feito em 4 horas. Como cada ralo escoa, por hora, 25 m³, em 4 horas cada um terá que escoar $4 \cdot 25\ m^3 = 100\ m^3$. Assim, a quantidade de ralos deverá ser $\frac{500\ m^3}{100\ m^3} = 5$.

Alternativa *c*.

Capítulo 5 Função quadrática

Exercícios

1. a)

$y = x^2$

c)

b)

d)

2. a)

b)

3. a)

c)

b)

4. **a)** $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

b) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4 \pm 4}{-2} \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

c) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 15}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 8}{-2} \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases}$

d) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 9 \cdot (-1)}}{2 \cdot 9} = \frac{\pm 6}{18} \begin{cases} x = +\frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

e) $x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 0}{-2} = 3$

f) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3} = \frac{0}{6} = 0$

g) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-11}}{2} \notin \mathbb{R}$

h) $x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{-2} = \begin{cases} x = +\sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

i) $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

j) $(x + 3) \cdot (x - 5) = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 5$

5. **a)** $x = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{9 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{2} =$

$= \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$ $S = \{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$

b) $9x^2 - 6x + 1 + x^2 - 4x + 4 - 25 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} =$

$= \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$ $S = \{-1, 2\}$

c) $2 \cdot (x^2 + 6x + 9) - 5x - 15 + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{4} = \frac{-7 \pm 3}{4} =$

$= \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$ $S = \left\{-1, -\frac{5}{2}\right\}$

d) Para $x \neq 0$, tem-se: $\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3x}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} =$

$= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$S = \left\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$

e) $x^2 + 2x - 3 = 5 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} =$

$= \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$ $S = \{-4, 2\}$

6. **a)** $\begin{cases} -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = +1 \\ x = -1 \end{cases} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \end{cases}$

$= \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

$S = \{-1, 1, 2\}$

b) É comum os estudantes "cancelarem" erroneamente o fator $(x - 1)$ nos dois membros da equação. Porém, é interessante alertá-los de que só se pode dividir os dois membros da igualdade por $x - 1$ se $x \neq 1$. Ao cancelarmos o fator $(x - 1)$, ignoramos a raiz $x = 1$ da equação.

$x^2 - 3x + 2 = 2x^2 + 3x - 2x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} =$

$= \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$

$S = \{-5, 1\}$

c) $x^2 + 10x + 25 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - 22x - 16 = 0$

$x = \frac{22 \pm \sqrt{484 - 4 \cdot 3 \cdot (-16)}}{6} = \frac{22 \pm 26}{6} =$

$= \begin{cases} x = 8 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$S = \left\{-\frac{2}{3}, 8\right\}$

d) $x \cdot (x^2 + 10x + 21) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 + 10x + 21 = 0 \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 1 \cdot 21}}{2} = \frac{-10 \pm 4}{2} =$

$= \begin{cases} x = -7 \\ x = -3 \end{cases}$

$S = \{-7, -3, 0\}$

e) $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$

$\begin{cases} y = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = +1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{cases}$

$S = \{-2, -1, 1, 2\}$

7. $(2x + 1) \cdot (x - 3) = -5 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$

8. $x \cdot (x + 4) = 621 \Rightarrow x^2 + 4x - 621 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{2500}}{2} \Rightarrow x = -27$ (não serve) ou $x = 23$
As dimensões são 23 cm e 27 cm e o perímetro é $2 \cdot (23 + 27) = 100$ (100 cm).

9. Seja **n** o número inicial de professores.
- No início, cada professor pagaria $\dfrac{6400}{n}$;
- Com a desistência de 6 professores, cada um teve que pagar $\dfrac{6400}{n-6}$.

Do enunciado temos que $\dfrac{6400}{n-6} = \dfrac{6400}{n} + 240 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6400 \cdot \left(\dfrac{1}{n-6} - \dfrac{1}{n}\right) = 240 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{n-6} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{3}{80}$; $n \neq 0$ e $n \neq 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 80 \cdot [n - (n - 6)] = 3n(n - 6) \Rightarrow$
$\Rightarrow 80 \cdot 6 = 3n^2 - 18n \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 - 6n - 160 = 0 \xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 16$
Assim, 10 professores $(16 - 6 = 10)$ foram à viagem.

10. a) $t = 0 \Rightarrow V_A(0) = 4{,}20$ reais
$V_B(0) = 3{,}20$ reais

b) $V_A(4) = 4{,}20 + \dfrac{1}{4} \cdot 4 = 5{,}20$
$V_B(4) = \dfrac{1}{16} \cdot 4^2 - \dfrac{1}{8} \cdot 4 + 3{,}20 = 1 - 0{,}5 + 3{,}20 = 3{,}70$
Como $V_A > V_B$, concluímos que é a ação da empresa **A**.

c) $V_A(t) = V_B(t) \Rightarrow 4{,}20 + \dfrac{1}{4}t = \dfrac{1}{16}t^2 - \dfrac{1}{8}t + 3{,}20 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{1}{16}t^2 - \dfrac{3}{8}t - 1 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t - 16 = 0 \xRightarrow{t > 0}$
$\xRightarrow{t > 0} t = 8$ (8 anos)
$V_A(8) = 4{,}20 + \dfrac{1}{4} \cdot 8 = 4{,}20 + 2{,}00 =$
$= 6{,}20$ (6,20 reais).

11. Sejam:
p: preço inicial do copo
n: número inicial de copos vendidos
Temos:
$$\begin{cases} n \cdot p = 180 & (1) \\ (p + 0{,}50) \cdot (n - 18) = 180 & (2) \end{cases}$$
De (2), temos:
$\underbrace{np}_{\Downarrow (1)} - 18p + 0{,}5n - 9 = 180$
$180 - 18p + 0{,}5n - 9 = 180 \Rightarrow n = 18 + 36p;$
Substituindo em (1), obtemos:
$(18 + 36p) \cdot p = 180$
$2p^2 + p - 10 = 0 \xRightarrow{p>0} p = 2$ e $n = 90$
a) R$ 2,00 **b)** 90 **c)** 72

12. $\Delta = 0 \Rightarrow 4 - 4 \cdot 1 \cdot p = 0 \Rightarrow p = 1$

13. $\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4 \cdot 5 \cdot m > 0 \Rightarrow m < \dfrac{4}{5}$
$\left\{m \in \mathbb{R} \mid m < \dfrac{4}{5}\right\}$

14. $\Delta = 16 - 4 \cdot (m + 3) = 4 - 4m$
2 raízes reais e distintas se $4 - 4m > 0$, ou seja, $m < 1$.
1 única raiz real se $4 - 4m = 0$, ou seja, $m = 1$.
Nenhuma raiz real se $4 - 4m < 0$, ou seja, $m > 1$.

15. $\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4 \cdot 4 \cdot (p + 2) < 0 \Rightarrow p > -\dfrac{23}{16}$
Como $-\dfrac{23}{16} = -1{,}4375$, o menor número inteiro que satisfaz a inequação é -1.

16. a) Soma: $-\dfrac{-1}{3} = \dfrac{1}{3}$; Produto: $\dfrac{-5}{3}$
b) Soma: $-\dfrac{6}{-1} = 6$; Produto: $\dfrac{-5}{-1} = 5$
c) Soma: $-\dfrac{0}{2} = 0$; Produto: $\dfrac{-7}{2}$
d) Soma: $-\dfrac{-3}{1} = 3$; Produto: $\dfrac{-2}{1} = -2$
e) Soma: -1; Produto: -20

17. a) $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(-6)}{2} = 3$
b) $r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{2}$
c) $r_1 \cdot r_2 + 3r_1 + 3r_2 + 9 = \dfrac{3}{2} + 3 \cdot (r_1 + r_2) + 9 =$
$= \dfrac{3}{2} + 3 \cdot 3 + 9 = \dfrac{39}{2}$
d) $\dfrac{r_2 + r_1}{r_1 \cdot r_2} = \dfrac{3}{\frac{3}{2}} = 2$
e) $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2 \cdot \dfrac{3}{2} \Rightarrow 6 = r_1^2 + r_2^2$

18. a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = -11 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -3$ e $x_2 = -8$
b) $p = x_1 \cdot x_2 = 24$

19. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 25 \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 11$ e $x_2 = 14$
$2p = x_1 \cdot x_2 = 154 \Rightarrow p = 77$

20. Sejam $\mathbf{r_1}$ e $3r_1$ as raízes dessa equação. O produto das raízes é igual a $\dfrac{c}{a} = \dfrac{48}{1} = 48 \Rightarrow r_1 \cdot 3r_1 = 48 \Rightarrow 3r_1^2 = 48 \Rightarrow$
$\Rightarrow r_1^2 = 16 \xRightarrow{r_1 < 0} r_1 = -4$; as raízes são -4 e -12.
A soma das raízes é $(-4) + (-12) = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow$
$\Rightarrow -16 = -\dfrac{2m}{1} \Rightarrow m = 8$

21. Devemos encontrar dois números cuja:
a) soma seja 2 e o produto -3: os números são 3 e -1; $S = \{3, -1\}$
b) soma seja -6 e o produto 5: os números são -5 e -1; $S = \{-5, -1\}$
c) soma seja -4 e o produto -5: os números são -5 e 1; $S = \{-5, 1\}$
d) soma seja -2 e o produto -35: os números são -7 e 5; $S = \{-7, 5\}$

22. a) $x_1 > 0$; $x_2 > 0$
$S > 0$ e $P > 0$
b) $x_1 < 0$; $x_2 < 0$
$S < 0$ e $P > 0$
c) $x_1 < 0$; $x_2 > 0$; $|x_2| > |x_1|$
$S > 0$ e $P < 0$

23. Se 0 é raiz, então:
$0^2 + m \cdot 0 + (m^2 - m - 12) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Rightarrow m = -3$ ou $m = 4$
Como a soma das raízes é positiva (pois uma é nula e a outra é positiva), temos: $-\dfrac{m}{1} > 0 \Rightarrow m < 0$
Daí: $m = -3$

24. a) Raízes: 0 e 8
$f(x) = x \cdot (x - 8)$

b) Raízes: 5 e 2
$f(x) = (x - 5) \cdot (x - 2)$

c) Raízes: 0 e 5
$f(x) = -2x \cdot (x - 5)$

d) Raízes: 5 e 5
$f(x) = -(x - 5)^2$

e) Raízes: $\frac{1}{2}$ e 2
$f(x) = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x - 0{,}5) =$
$= (2x - 1)(x - 2)$

25. a) $x_v = \frac{6}{2} = 3$ e $y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 + 4 = -5$. Logo, $V(3, -5)$.

b) $x_v = -\frac{-1}{-4} = -\frac{1}{4}$ e $y_v = -2\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) + 3 = \frac{25}{8}$. Logo, $V\left(-\frac{1}{4}, \frac{25}{8}\right)$.

c) $x_v = -\frac{0}{2} = 0$ e $y_v = 0^2 - 9 = -9$. Logo, $V(0, -9)$.

26. a) $y_v = -\frac{3\,600 - 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)} = 450$ (máximo)

b) $y_v = -\frac{16 - 4 \cdot 1 \cdot 8}{4 \cdot 1} = 4$ (mínimo)

c) $y_v = -\frac{4 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} = -4$ (máximo)

d) $y_v = -\frac{0 - 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3} = 2$ (mínimo)

27. a) $y_v = -\frac{0 + 4 \cdot 1 \cdot 2}{4 \cdot 1} = -2$ e $a > 0$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -2\}$

b) $y_v = -\frac{0 - 4 \cdot (-1) \cdot 5}{4 \cdot (-1)} = 5$ e $a < 0$
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 5\}$

c) $y = -x^2 + x + 2$
$y_v = -\frac{1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}{4 \cdot (-1)} = \frac{9}{4}$ e $a < 0$
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{9}{4}\right\}$

d) $y = x^2 + 3x \Rightarrow y_v = -\frac{9 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -\frac{9}{4}$ e $a > 0$
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{4}\right\}$

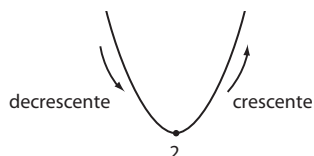
28. $x_v = 5 = \frac{-b}{2 \cdot (-3)} \Rightarrow b = 30$ e $y = -3x^2 + 30x + c$
Como $y_v = 50$, então $50 = -3 \cdot 5^2 + 30 \cdot 5 + c \Rightarrow$
$\Rightarrow c = -25$.

29. a) $h(1) = 35$ (35 metros)

b) Se $h = 75$, tem-se $40t - 5t^2 = 75 \Rightarrow t = 3$ s e $t = 5$ s.

c) $h_{máx.} = y_v = \frac{-1600}{4 \cdot (-5)} = 80$ (80 metros).

d) No instante em que a bola retorna ao solo, tem-se $h = 0$, ou seja, $40t - 5t^2 = 0$, o que ocorre para $t = 8$ s.

30. a) Como $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2{,}4)}{2 \cdot 0{,}6} = 2$, concluímos que o vértice tem abscissa 2; como $a > 0$, o vértice é um ponto de mínimo, isto é,

Se $x < 2$, a função é decrescente. Assim, o valor do quilograma diminuiu de 2010 ($x = 0$) para 2012 ($x = 2$).

b) $x = 2 \Rightarrow v(2) = 0{,}6 \cdot 2^2 - 2{,}4 \cdot 2 + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow v(2) = 2{,}4 - 4{,}8 + 6 = 3{,}6$ (3 600 reais)

c) Se $x \in [2, 10]$, a função é crescente e, nesse intervalo, o valor máximo é atingido quando $x = 10$ (em 2020).
$v(10) = 0{,}6 \cdot 10^2 - 2{,}4 \cdot 10 + 6$
$v(10) = 60 - 24 + 6 = 42$ (42 000 reais)

31. a) 700 *downloads*: $y = 0{,}7$ milhar corresponde a $x = 1$:
$0{,}7 = -\frac{1}{50} \cdot 1^2 + c \cdot 1 \Rightarrow \frac{7}{10} = -\frac{1}{50} + c \Rightarrow$
$c = \frac{36}{50} = \frac{18}{25}$
Daí, $y = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{18}{25}x$
Devemos determinar **x** tal que $y = 0$:
$0 = -\frac{1}{50} \cdot x^2 + \frac{18}{25}x \Rightarrow 0 = -x^2 + 36x \xRightarrow{x > 0}$
$\xRightarrow{x > 0} x = 36$ (36 semanas)

b) $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{18}{25}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{50}\right)} = \frac{-\frac{18}{25}}{-\frac{1}{25}} = 18$ (18 semanas)

$y_V = -\frac{1}{50} \cdot 18^2 + \frac{18}{25} \cdot 18 = -\frac{324}{50} + \frac{324}{25} =$
$= \frac{324}{50} = 6{,}48$ (6,48 milhares de *downloads*, isto é, 6 480 *downloads*).

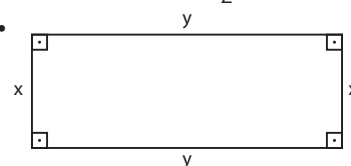
32. a)
- $3x + 3y = 150 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$ (*)
- Área (**A**) a ser cercada: $x \cdot y + x \cdot 2y = x \cdot 3y = 3xy$; por (*) temos: $A = 3 \cdot x \cdot (50 - x) = 150x - 3x^2$

A é máxima para $x = x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-150}{2 \cdot (-3)} = 25$ (25 m)
Se $x = 25$, em (*), obtemos $y = 50 - 25 = 25$ (25 m)

b)
- $3x + 3y + \underbrace{3y}_{\text{muro}} = 150 \Rightarrow 3x + 6y = 150 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 2y = 50$ (**)
- $A = 3xy \xRightarrow{(**)} A = 3 \cdot x \cdot \left(\frac{50 - x}{2}\right) \Rightarrow A = -\frac{3x^2}{2} + 75x$

A é máxima para $x = x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-75}{2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = 25$; por (**) obtemos $y = \frac{50 - 25}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$
- Nesse caso, a área seria dada por $3 \cdot 25 \cdot \frac{25}{2} = 937{,}5$ (937,5 m²)

No caso do item *a*, a área seria $3 \cdot 25 \cdot 25 = 1\,875$ (1 875 m²)
Como $937{,}5 = \frac{1875}{2}$, a redução da área seria de 50%.

33.

- $2y + 2x = 20 \Leftrightarrow x + y = 10$
- $A = x \cdot y$
$A = x \cdot (10 - x)$

$A(x) = 10x - x^2$; a área é máxima se

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-2} = 5$.

Se $x = 5$, $y = 5$ e o retângulo de maior área é um quadrado de lado 5 cm e área igual a 25 cm^2.

34. $x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$

A soma dos quadrados é $x^2 + y^2 = x^2 + (x - 2)^2 = x^2 + x^2 - 4x + 4 = 2x^2 - 4x + 4$

Assim, $S(x) = 2x^2 - 4x + 4$ é mínima quando

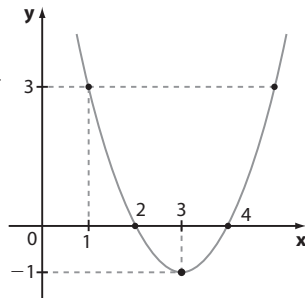
$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1$ (daí $y = -1$)

$S_{mín} = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$; observe que

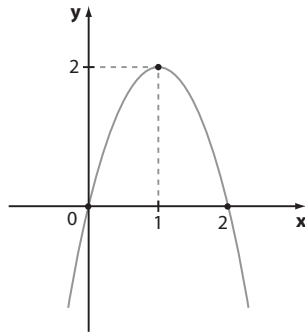
$1^2 + (-1)^2 = 2$.

35. a) $a > 0$; raízes: 2 e 4;

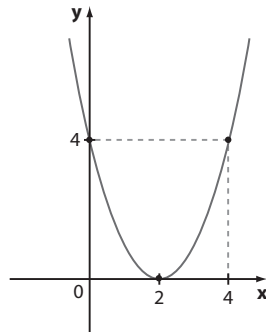
$V(3, -1)$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -1\}$

b) $a < 0$; raízes: 0 e 2;

$V(1, 2)$;

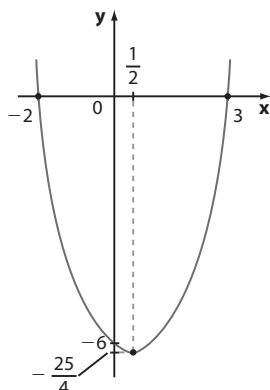
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 2\}$

c) $a > 0$; raiz: 2;

$V(2, 0)$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

d) $y = x^2 - x - 6$;

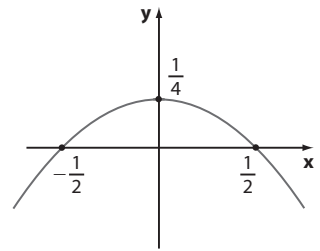
raízes: 3 e -2;

$V\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$;

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{25}{4}\right\}$

36. a) $a < 0$;

raízes: $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$;

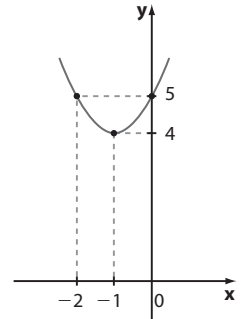
$V\left(0, \frac{1}{4}\right)$;

$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{4}\right\}$

b) $a > 0$;

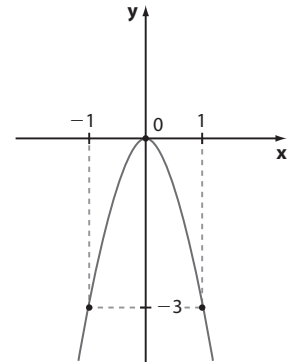
$\Delta = -16 < 0$

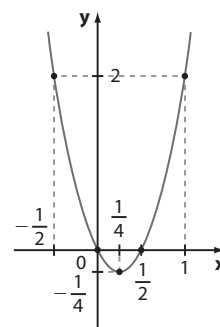
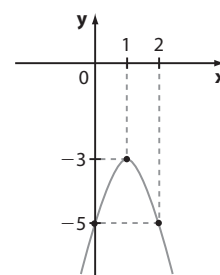
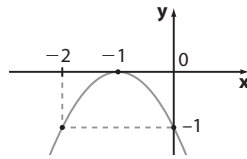
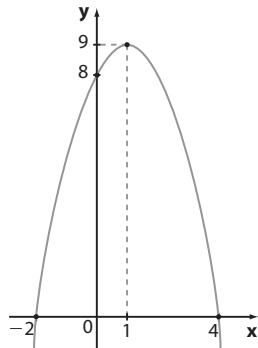
(não há raízes reais);

$V(-1, 4)$; $x = 0 \Rightarrow y = 5$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 4\}$

c) $a < 0$, raiz: 0;

$V(0, 0)$;

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0\}$

37. a) $a > 0$; raízes: 0 e $\frac{1}{2}$; $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$;

crescente para $x > \frac{1}{4}$ e decrescente para $x < \frac{1}{4}$.

b) $a < 0$; não tem raízes; $V(1, -3)$; crescente para $x < 1$ e decrescente para $x > 1$.

c) $a < 0$; raiz: -1; $V(-1, 0)$; crescente para $x < -1$ e decrescente para $x > -1$.

d) $a < 0$; raízes: -2 e 4; $V(1, 9)$;
f é crescente para $x < 1$;
f é decrescente para $x > 1$.

38. a) Planta **A**: com 2 dias de vida, ela terá $2 \cdot 2{,}5 = 5$ (5 cm);
Planta **B**: $y = \dfrac{20 \cdot 2 - 2^2}{6} = \dfrac{36}{6} = 6$ (6 cm).
A diferença pedida é 1 cm.

b) $y = 2{,}5x$

c) $\dfrac{20x - x^2}{6} = 2{,}5x \Rightarrow 20x - x^2 = 15x \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 0$ (data do nascimento) ou $x = 5$ (5º dia);
$y = 2{,}5 \cdot 5 = 12{,}5$ (12,5 cm)

d) Planta **A**: 2,5 cm/dia (A lei é $y = 2{,}5x$ e $a = 2{,}5$)
Planta **B**: 2,5 cm/dia, pois:
$x = 4 \Rightarrow y = \dfrac{20 \cdot 4 - 4^2}{6} = \dfrac{64}{6} = \dfrac{32}{3}$
$x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{20 - 1}{6} = \dfrac{19}{6}$
A taxa média é:
$$\dfrac{\dfrac{32}{3} - \dfrac{19}{6}}{4 - 1} = \dfrac{\dfrac{45}{6}}{3} = 2{,}5 \text{ (2,5 cm/dia)}$$

39. 1º modo:
Como a concavidade é voltada para baixo, então $a < 0$.
Como as raízes têm sinais contrários, seu produto é negativo, ou seja, $\dfrac{c}{a} < 0$ e, como $a < 0$, então $c > 0$.
A soma das raízes é positiva, pois o valor absoluto da raiz positiva é maior que o da negativa. Então, $-\dfrac{b}{a} > 0$ e, como $a < 0$, devemos ter $-b < 0$; daí $b > 0$.
2º modo: $a < 0$
Como a abscissa do vértice é positiva, temos $\dfrac{-b}{2a} > 0$; como $a < 0$, devemos ter $-b < 0 \Rightarrow b > 0$.
$x = 0 \Rightarrow y = c$; $(0, c)$ é o ponto de interseção com o eixo **y**. Do gráfico, temos que $c > 0$.

40. a) As raízes são -2 e 1 e a forma fatorada é $y = a(x + 2) \cdot (x - 1)$. Usando o ponto $(0, -4)$, determina-se $a = 2 \Rightarrow y = 2x^2 + 2x - 4$.

b) As raízes são $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{5}{2}$ e a forma fatorada é $y = a \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \dfrac{5}{2}\right)$. Usando o ponto $\left(\dfrac{3}{2}, -4\right)$, tem-se $a = 4 \Rightarrow y = 4x^2 - 12x + 5$.

41. a) $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$
$f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$
Como $(2, 1)$ pertence à parábola, temos:
$1 = a \cdot (2 - 1) \cdot (2 - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = a \cdot 1 \cdot (-1) \Rightarrow a = -1$
$f(x) = -1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) = -1 \cdot (x^2 - 4x + 3) \Rightarrow f(x) = -x^2 + 4x - 3$

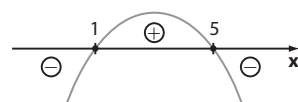
b) **g** é uma função afim. A reta correspondente passa por $(2, 0)$ e $\left(\dfrac{7}{2}, g\left(\dfrac{7}{2}\right)\right)$.
Mas $g\left(\dfrac{7}{2}\right) = f\left(\dfrac{7}{2}\right) = -\dfrac{49}{4} + \dfrac{28}{2} - 3 = -\dfrac{5}{4}$
Façamos $y = ax + b \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} 0 = a \cdot 2 + b \\ -\dfrac{5}{4} = a \cdot \dfrac{7}{2} + b \end{cases} \Rightarrow a = -\dfrac{5}{6}$ e $b = \dfrac{5}{3}$;
$g(x) = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{5}{3}$

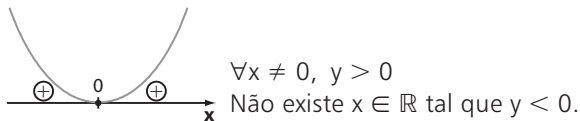
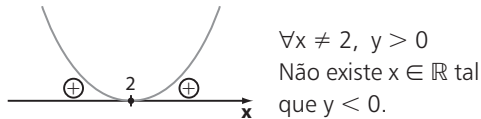
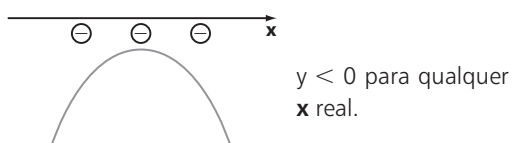
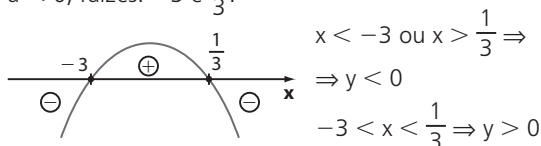
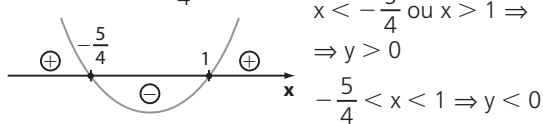
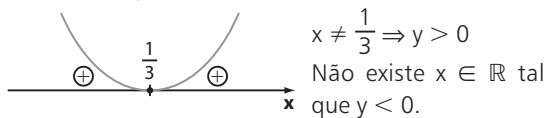
c) $g(0) = \dfrac{5}{3}$; a ordenada é $\dfrac{5}{3}$.

42. a) $y = a \cdot (x - 4) \cdot (x + 2)$
$9 = a \cdot (1 - 4) \cdot (1 + 2) \Rightarrow a = -1$;
$y = -1 \cdot (x - 4)(x + 2) = -x^2 + 2x + 8$

b) $y = a \cdot \left(x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - \sqrt{3}\right)$
Como $(0, 3)$ pertence à parábola:
$3 = a \cdot \left(0 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(0 - \sqrt{3}\right) \Rightarrow 3 = a \cdot 3 \Rightarrow a = 1$
$y = 1 \cdot \left(x - \sqrt{3}\right)^2 = x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$

c) Como não são fornecidas as raízes, usaremos $y = ax^2 + bx + c$
$\begin{cases} -4 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \\ 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ -1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \end{cases}$
$\begin{cases} a - b + c = -4 & (1) \\ a + b + c = 2 & (2) \\ 4a + 2b + c = -1 & (3) \end{cases}$
Subtraindo (2) de (1), temos:
$-2b = -6 \Rightarrow b = 3$
De (2) e (3), temos que:
$\begin{cases} a + 3 + c = 2 \\ 4a + 6 + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -1 \\ 4a + c = -7 \end{cases}$
Resolvendo, encontramos $a = -2$ e $c = 1$.
$y = -2x^2 + 3x + 1$

43. a) $a < 0$; raiz: 1
Se $x_v = 3$ e $x = 1$ é uma raiz, tem-se outra raiz para $x = 5$.

b) $a > 0$; raiz: 0

$\forall x \neq 0,\ y > 0$
Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

c) Se $x = 0$ e $x = 4$ têm imagens iguais, $x = 2$ é abscissa do vértice, que também é a raiz dupla; $a > 0$.

$\forall x \neq 2,\ y > 0$
Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

d) $a < 0$; não tem raízes.

$y < 0$ para qualquer **x** real.

44. a) $a < 0$; raízes: -3 e $\frac{1}{3}$.

$x < -3$ ou $x > \frac{1}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow y < 0$
$-3 < x < \frac{1}{3} \Rightarrow y > 0$

b) $a > 0$; raízes: $-\frac{5}{4}$ e 1.

$x < -\frac{5}{4}$ ou $x > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y > 0$
$-\frac{5}{4} < x < 1 \Rightarrow y < 0$

c) $a > 0$; raiz: $\frac{1}{3}$ (dupla).

$x \neq \frac{1}{3} \Rightarrow y > 0$
Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

d) $a < 0$; raízes: $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$.

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \Rightarrow y > 0$
$x < -\sqrt{2}$ ou $x > \sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow y < 0$

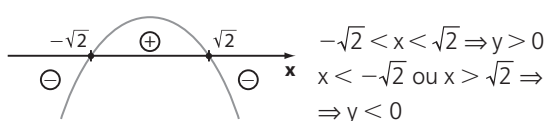
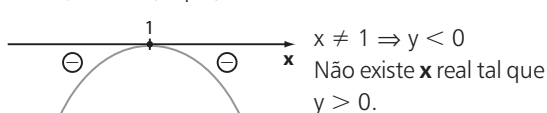
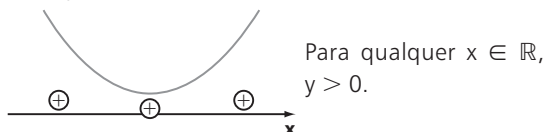
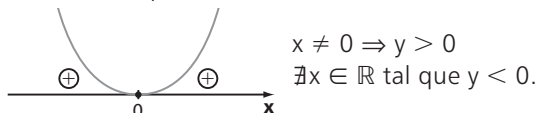
e) $a < 0$; raiz: 1 (dupla).

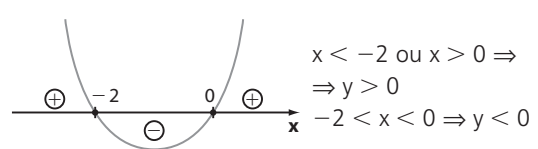
$x \neq 1 \Rightarrow y < 0$
Não existe **x** real tal que $y > 0$.

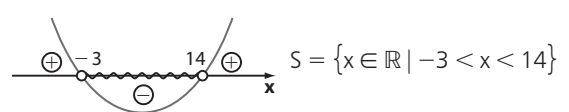
f) $a > 0$; não tem raízes.

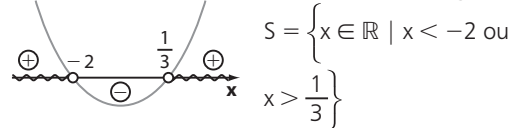
Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$.

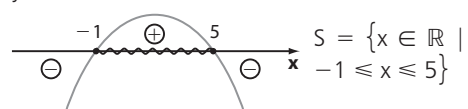
g) $a > 0$; raiz dupla: 0.

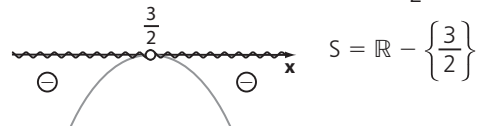
$x \neq 0 \Rightarrow y > 0$
$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$.

h) $a > 0$; raízes: -2 e 0.

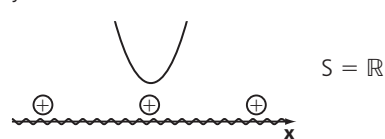
$x < -2$ ou $x > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y > 0$
$-2 < x < 0 \Rightarrow y < 0$

45. a) $y = x^2 - 11x - 42$ tem $a > 0$ e raízes -3 e 14.

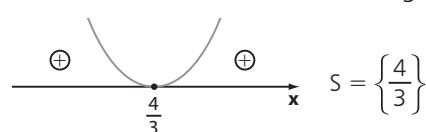
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 14\}$

b) $y = 3x^2 + 5x - 2$ tem $a > 0$ e raízes -2 e $\frac{1}{3}$.

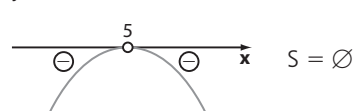
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{3}\right\}$

c) $y = -x^2 + 4x + 5$ tem $a < 0$ e raízes -1 e 5.

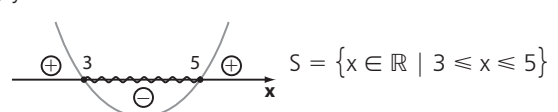
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 5\}$

d) $y = -4x^2 + 12x - 9$ tem $a < 0$ e raiz $\frac{3}{2}$.

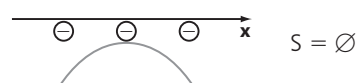
$S = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

e) $y = 3x^2 + x + 5$ tem $a > 0$ e não tem raízes reais.

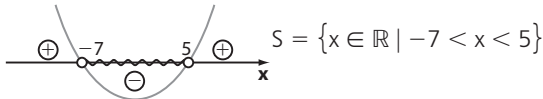
$S = \mathbb{R}$

f) $y = 9x^2 - 24x + 16$ tem $a > 0$ e raiz $\frac{4}{3}$.

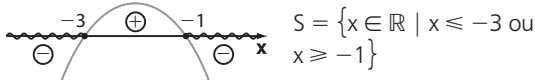
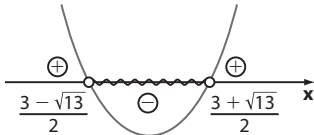
$S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

46. a) $y = -x^2 + 10x - 25$ tem $a < 0$ e raiz 5.

$S = \varnothing$

b) $y = x^2 - 8x + 15$ tem $a > 0$ e raízes 3 e 5.

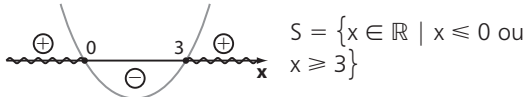
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$

c) $-x^2 - 2x - 15 > 0$ e $y = -x^2 - 2x - 15$ tem $a < 0$ e não tem raízes.

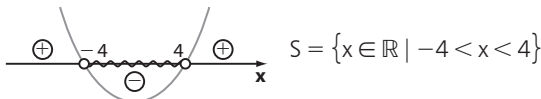
$S = \varnothing$

d) $x^2 + 2x - 35 < 0$ e $y = x^2 + 2x - 35$ tem $a > 0$ e raízes -7 e 5.

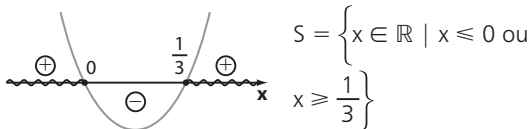
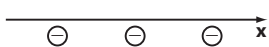
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 5\}$

e) $y = -x^2 - 4x - 3$ tem $a < 0$ e raízes -3 e -1.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3$ ou $x \geq -1\}$

f) $x^2 - 3x - 1 < 0$ e $y = x^2 - 3x - 1$ tem $a > 0$ e raízes $\dfrac{3 - \sqrt{13}}{2}$ e $\dfrac{3 + \sqrt{13}}{2}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$$

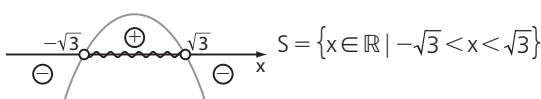
47. a) $x^2 - 3x \geq 0$ e $y = x^2 - 3x$ tem $a > 0$ e raízes 0 e 3.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0$ ou $x \geq 3\}$

b) $x^2 - 16 < 0$ e $y = x^2 - 16$ tem $a > 0$ e raízes -4 e 4.

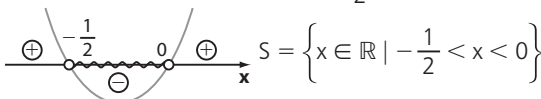
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 4\}$

c) $9x^2 - 3x \geq 0$ e $y = 9x^2 - 3x$ tem $a > 0$ e raízes 0 e $\dfrac{1}{3}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq \dfrac{1}{3}\right\}$

d) $-4x^2 - 9 < 0$ e $y = -4x^2 - 9$ tem $a < 0$ e não tem raízes.

$S = \mathbb{R}$

e) $3 - x^2 > 0$ e $y = 3 - x^2$ tem $a < 0$ e raízes $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$

f) $x^2 + 3x < 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 + x < 0$

$y = 2x^2 + x$ tem $a > 0$ e raízes $-\dfrac{1}{2}$ e 0.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{1}{2} < x < 0\right\}$

48. a) $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-90}{2 \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right)} = 60$

$L(60) = -\dfrac{3}{4} \cdot 60^2 + 90 \cdot 60 - 1500$

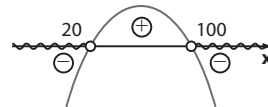
$L(60) = -2700 + 5400 - 1500 = 1200$

(1 200 milhares de reais)

O lucro mensal máximo é 1 200 000 reais.

b) $L < 0 \Rightarrow -\dfrac{3}{4}x^2 + 90x - 1500 < 0$

$\Delta = 8100 - 4 \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right) \cdot (-1500) = 3600$

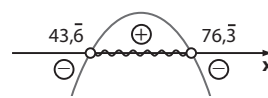
$x = \dfrac{-90 \pm 60}{2 \cdot (-0{,}75)}$ ⟨ 20 ; 100

Como $x > 0$, devemos ter $0 < x < 20$ ou $x > 100$.

c) $L > 1000 \Rightarrow -\dfrac{3}{4}x^2 + 90x - 1500 > 1000 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{3}{4}x^2 + 90x - 2500 > 0$

$\Delta = 8100 - 4 \cdot \left(-\dfrac{3}{4}\right) \cdot (-2500)$

$\Delta = 8100 - 7500 = 600$

$x = \dfrac{-90 \pm 24{,}5}{2 \cdot (-0{,}75)}$ ⟨ $43{,}\overline{6}$; $76{,}\overline{3}$

Devemos ter: $43{,}\overline{6} < x < 76{,}\overline{3}$. Como **x** é o número de milhares de peças, devemos ter o seguinte intervalo:

[43 667, 76 333]

O número de peças deve variar de 43 667 a 76 333.

49. a) Como $x_v = 1$ e uma das raízes de **f** é $x = 6$, por simetria, concluímos que a outra raiz de **f** é $1 - 5 = -4$.

b) Para **f**, usando a forma fatorada, temos:

$y = a \cdot (x - 6) \cdot (x + 4)$

Como (0, 4) pertence ao gráfico de **f**, temos:

$4 = a \cdot (0 - 6) \cdot (0 + 4) \Rightarrow -24a = 4$

$\Rightarrow a = -\dfrac{1}{6}$; a lei de **f** é:

$y = -\dfrac{1}{6} \cdot (x - 6) \cdot (x + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{6} \cdot (x^2 - 2x - 24) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{x}{3} + 4$

$$\begin{cases} x_v = 1 \\ y_v = -\dfrac{1}{6} \cdot 1^2 + \dfrac{1}{3} + 4 = \dfrac{25}{6} \end{cases}$$

$V\left(1, \dfrac{25}{6}\right)$

Para **g**, a forma fatorada é $y = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 4)$. (*)

f e **g** possuem, em comum, o ponto de abscissa $x = -1$.

Usando a lei de **f**, obtemos:

$y = -\dfrac{1}{6} \cdot (-1)^2 + \dfrac{(-1)}{3} + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3} + 4 = \dfrac{7}{2}$

Assim, $\left(-1, \dfrac{7}{2}\right)$ pertence ao gráfico de **g**; em (*) temos:

$\dfrac{7}{2} = a \cdot (-1 - 1) \cdot (-1 - 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{7}{2} = 10a \Rightarrow a = \dfrac{7}{20}$

e em (*) temos que:

$$y = \frac{7}{20} \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) = \frac{7}{20}(x^2 - 5x + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{7}{20}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{7}{5}$$

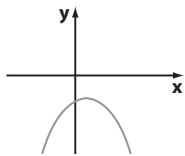
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{10}} = \frac{5}{2}$$

$$y_v = \frac{7}{20} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{2} + \frac{7}{5} = \frac{-63}{80}$$

$$V\left(\frac{5}{2}, -\frac{63}{80}\right)$$

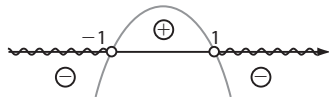
c) Do gráfico temos que $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$.

d) Do gráfico temos (lembre que a outra raiz de **f** é -4):
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 6\}$.

50. O gráfico de **f** deve ser:

Devemos ter:
(1) $a < 0$
(2) $\Delta < 0$

De (1) temos: $m < 0$ (*)

De (2) temos: $(-2)^2 - 4 \cdot m \cdot m < 0$

$4 - 4m^2 < 0$

Daí $m < -1$ ou $m > 1$ (**)

Da interseção de (*) e (**) temos: $m < -1$

Desafio

Se **f** tem grau menor que 3, escrevemos:
$f(x) = ax^2 + bx + c$
Temos:

- $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0; f(x) = ax^2 + bx$
- $f(10) = 10 \Rightarrow a \cdot 10^2 + 10 \cdot b = 10 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 100a + 10b = 10 \Rightarrow 10a + b = 1$ (1)
- $f(5) = 6 \Rightarrow a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 6 \Rightarrow 25a + 5b = 6$ (2)

De (1) temos: $b = 1 - 10a$;

Em (2) temos: $25a + 5 \cdot (1 - 10a) = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 25a + 5 - 50a = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow -25a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{25}$

Em (1) temos: $10 \cdot \left(-\frac{1}{25}\right) + b = 1 \Rightarrow b = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$

$y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

Alternativa *a*.

CAPÍTULO 6 Função definida por várias sentenças

Exercícios

1. **a)** -1 **b)** -1 **c)** -1 **d)** 1 **e)** 1

2. **a)** $1 \geqslant 0; f(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$

b) $-1 < 0; f(-1) = 4 \cdot (-1)^2 - (-1) + 5 =$
$= 4 + 1 + 5 = 10$

c) $3 \geqslant 0; f(3) = -2 \cdot 3 + 3 = -3$
$-3 < 0; f(-3) = 4 \cdot (-3)^2 - (-3) + 5 = 44$
$f(3) + f(-3) = -3 + 44 = 41$

3. **a)** $-3 < -2; f(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$
$-2 \leqslant 0 < 1; f(0) = 0 + 3 = 3$
$\rangle\ -6 + 3 = -3$

b) $\sqrt{3} > 1; f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 5 = -2$
$-2 \leqslant -1 < 1; f(-1) = -1 + 3 = 2$
$\rangle\ -2 - 2 = -4$

c) $-2 \leqslant -2 < 1; f(-2) = -2 + 3 = 1$
$2 \geqslant 1; f(2) = 2^2 - 5 = -1$
$\rangle\ 1 \cdot (-1) = -1$

4. **a)** Se $x < 1$, $f(x) = 0$ equivale a:
$-2x - 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} < 1$
Se $x \geqslant 1$, $f(x) = 0$ equivale a:
$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \geqslant 1$

b) Se $x < 1$, $f(x) = -3$ equivale a:
$-2x - 5 = -3 \Rightarrow x = -1 < 1$
Se $x \geqslant 1$, $f(x) = -3$ equivale a:
$2x - 3 = -3 \Rightarrow x = 0 < 1$
Logo, $x = 0$ não pode ser aceito.

5. Plano I: $y = \begin{cases} 80, \text{ se } x \leqslant 120 \\ 80 + (x - 120) \cdot 1{,}20, \text{ se } x > 120 \end{cases}$

Plano II: $y = 0{,}8 \cdot x$

- Se $x \leqslant 120$, façamos $0{,}8x = 80 \Rightarrow x = 100 \leqslant 120$
- Se $x > 120$, façamos:
  $80 + (x - 120) \cdot 1{,}2 = 0{,}8x \Rightarrow$
  $\Rightarrow 80 + 1{,}2x - 144 = 0{,}8x \Rightarrow$
  $\Rightarrow 0{,}4x = 64 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 160 > 120$

Assim, para 100 minutos ou 160 minutos é indiferente contratar qualquer um dos planos.

6. **a)** $100 \cdot 0{,}10 + 30 \cdot 0{,}07 = 10 + 2{,}10 = 12{,}10$
(12,10 reais)

b) $p(x) =$

$$= \begin{cases} 0{,}1x; \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ \underbrace{100 \cdot 0{,}1}_{10} + \underbrace{(x - 100) \cdot 0{,}07}_{0{,}07x - 7} = 3 + 0{,}07x; \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

c) Item *a*: $130 \cdot 0{,}07 = 9{,}10$ (9,10 reais)

Item *b*: $p(x) = \begin{cases} 0{,}1x; \text{ se } 0 < x \leqslant 100 \\ 0{,}07x; \text{ se } x > 100 \end{cases}$

7. **a)** 2 unidades: $2 \cdot 6{,}80 = 13{,}60$ (13,60 reais)
3 unidades: $3 \cdot 6{,}80 = 20{,}40$ (20,40 reais)
4 unidades: $4 \cdot (6{,}80 - 1{,}40) = 4 \cdot 5{,}40 = 21{,}60$ (21,60 reais)
5 unidades: $5 \cdot (6{,}80 - 1{,}40) = 5 \cdot 5{,}40 = 27{,}00$ (27,00 reais)

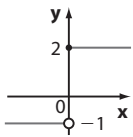
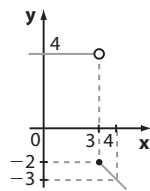
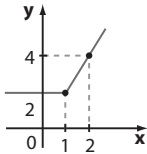
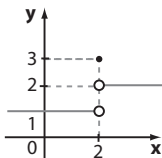
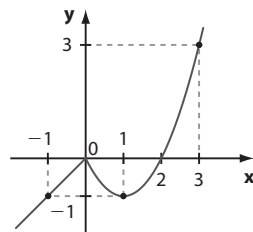
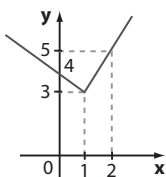
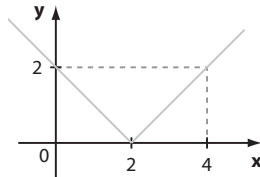
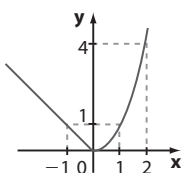
b) $y = \begin{cases} 6{,}80 \cdot x; \text{ se } x \leqslant 3 \\ 5{,}40 \cdot x; \text{ se } x > 3 \end{cases}$; com $x \in \mathbb{N}$

8. **a)** R_1: $28\ m^3 \to 20 \cdot 1{,}20 + 8 \cdot 1{,}80 = 24 + 14{,}40 =$
$= 38{,}40$ (38,40 reais)
R_2: $35\ m^3 \to 20 \cdot 1{,}20 + 15 \cdot 1{,}80 = 24 + 27 =$
$= 51$ (51 reais)

b)
- "Primeiros" 20 m³ custam, ao todo, $20 \cdot 1{,}20 = 24$ (24 reais)
- Os 30 m³ "seguintes" custam, ao todo, $30 \cdot 1{,}80 = 54$ (54 reais)
- Como $112{,}80 - 24 - 54 = 34{,}80$ (34,80 reais), o consumo na 3ª faixa foi de $\frac{34{,}80}{2{,}90} = 12$ (12 m³), totalizando: 20 m³ + 30 m³ + 12 m³ = 62 m³

c) v(x) =

$$= \begin{cases} 1{,}20 \cdot x; \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 1{,}20 \cdot 20 + (x - 20) \cdot 1{,}80 = 1{,}8x - 12; \text{ se } 21 \leqslant x \leqslant 50 \\ 1{,}20 \cdot 20 + 1{,}80 \cdot 30 + (x - 50) \cdot 2{,}90 = 2{,}9x - 67; \text{ se } x > 50 \end{cases}$$

9. a) $Im = \{-1, 2\}$

c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 4$ ou $y \leqslant -2\}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

10. a) $Im = \{1, 2, 3\}$

d) $Im = \mathbb{R}$

b) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

e) $Im = \mathbb{R}_+$

c) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

11. a) $y = \begin{cases} 3, \text{ se } x \geqslant -1 \\ -2, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 3x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

No item *b*, observe que a reta correspondente a $x \geqslant 0$ passa por (0, 0) e (1, 3) e sua lei é $y = 3x$ (função linear).

12. a) Se $x < 1$, a função é do 1º grau e a reta passa por (0, 4) e (−1, 6).

$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 4 = a \cdot 0 + b \\ 6 = a \cdot (-1) + b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 4$ e $a = -2 \Rightarrow y = -2x + 4$

Se $x \geqslant 1$, a função é do 1º grau e a reta passa por (1, 2) e (2, 3).

$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 2 = a \cdot 1 + b \\ 3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 1$ e $b = 1 \Rightarrow y = x + 1$

$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -2x + 4, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

(Pode-se também incluir x = 1 na 2ª condição.)

b) Se $x \leqslant 1$, $f(x) = 5$ equivale a $-2x + 4 = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \leqslant 1$

Se $x \geqslant 1$, $f(x) = 5$ equivale a $x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4 \geqslant 1$

$S = \left\{4, -\frac{1}{2}\right\}$

c) Geometricamente, é preciso determinar **k** de modo que o gráfico de **f** intersecte a reta horizontal que passa por (0, k), que é o gráfico da função constante y = k. Como $Im(f) = [2, +\infty[$, **k** deve ser, no mínimo, igual a 2, isto é, $k \geqslant 2$.

13. a) I: plano Beta; II: plano Alfa

b) Cliente **A**: 90 minutos → R$ 80,00

Cliente **B**: 120 minutos → $80 + 0{,}6 \cdot (140 - 100) = 104$ (R$ 104,00)

c) Plano Beta:

$y = \begin{cases} 90, \text{ se } x \leqslant 120 \\ 90 + 0{,}8 \cdot (x - 120) = 0{,}8x - 6, \text{ se } x > 120 \end{cases}$

Como y = 154, temos: $0{,}8x - 6 = 154 \Rightarrow x = 200$ (200 minutos)

Poderíamos também ter feito: $154 - 90 = 64$; $64 \div 0{,}8 = 80 \Rightarrow 80 + 120 = 200$ (200 minutos)

d) Plano Alfa:

$y = \begin{cases} 80, \text{ se } x \leqslant 100 \\ 80 + 0{,}6 \cdot (x - 100) = 0{,}6x + 20, \text{ se } x > 100 \end{cases}$

1º intervalo:

$0{,}6x + 20 < 90 \Rightarrow 0{,}6x < 70 \Rightarrow x < 116{,}\overline{6}$

Até 116 minutos.

2º intervalo:

$0{,}6x + 20 < 0{,}8x - 6 \Rightarrow 26 < 0{,}2x \Rightarrow x > 130$

De 131 minutos em diante.

14. a) 9 **b)** $\frac{5}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** 0 **e)** $\sqrt{2}$ **f)** 0,83 **g)** 8 **h)** 8 **i)** $\frac{2}{9}$

15. a) $|-13| = 13$

b) $|-6| = 6$

c) $|0{,}2| = 0{,}2$

d) $|-0{,}2| = 0{,}2$

e) $\left|-\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5}$

f) $\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

g) $-\sqrt{7}$

h) 8

i) 8

16. a) $\underbrace{|3 - \sqrt{5}|}_{\text{positivo}} = 3 - \sqrt{5}$

$\underbrace{|\sqrt{5} - 3|}_{\text{negativo}} = -\sqrt{5} + 3$

$A = (3 - \sqrt{5}) - (-\sqrt{5} + 3) = 0$

b) $\underbrace{|-\sqrt{2} - 1|}_{\text{negativo}} = \sqrt{2} + 1$

$\underbrace{|1 - \sqrt{2}|}_{\text{negativo}} = -1 + \sqrt{2}$

$B = \sqrt{2} + 1 + 2 \cdot (-1 + \sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 1$

c) $C = |\underbrace{\sqrt{10} - 3}_{\text{positivo}}| = \sqrt{10} - 3$

17. Se $x > 4$ temos: $|\underbrace{x - 4}_{\text{positivo}}| = x - 4$ e $|\underbrace{x}_{\text{positivo}}| = x$

a) $\dfrac{x - 4}{4 - x} = -1$

b) $3 + \dfrac{x - 4}{x - 4} = 3 + 1 = 4$

c) $\dfrac{x}{x} + \dfrac{x - 4}{x - 4} = 1 + 1 = 2$

d) $|4 - x| = \begin{cases} 4 - x;\ \text{se}\ 4 - x \geqslant 0,\ \text{isto é},\ x \leqslant 4 \\ -4 + x;\ \text{se}\ x > 4 \end{cases}$

Como, da hipótese, $x > 4$, temos que $|4 - x| = -4 + x$ e o quociente pedido vale 1.

18. I) Falsa; considerando, por exemplo, $x = -5$ e $y = 4$, temos: $|-5| + |4| = 9$ e $|-5 + 4| = |-1| = 1$

II) Falsa; considerando, por exemplo, $x = -5$ e $y = 4$, temos: $|-5| - |4| = 1$ e $|-5 - 4| = |-9| = 9$

III) Verdadeira.

Demonstração:

1º modo:

- Se $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$; $x \cdot y \geqslant 0$
  $|x| \cdot |y| = x \cdot y$
  $\underbrace{|x \cdot y|}_{\geqslant 0} = x \cdot y$
- Se $x < 0$ e $y < 0$; $x \cdot y > 0$
  $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot (-y) = x \cdot y = |x \cdot y|$
- Se $x \geqslant 0$ e $y < 0$; $x \cdot y \leqslant 0$
  $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y) = -x \cdot y$
  $\underbrace{|x \cdot y|}_{\leqslant 0} = -x \cdot y$
- Se $x < 0$ e $y \geqslant 0$; $x \cdot y \leqslant 0$
  $|x| \cdot |y| = (-x) \cdot y = -x \cdot y$
  $\underbrace{|x \cdot y|}_{\leqslant 0} = -x \cdot y$

2º modo:

$|x| \cdot |y| = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{(xy)^2} = |x \cdot y|$

IV) Falsa.

Tome $x = -2$

$|x|^3 = |-2|^3 = 2^3 = 8$ e $x^3 = (-2)^3 = -8$

19. a)

b)

c)

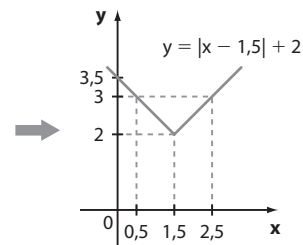
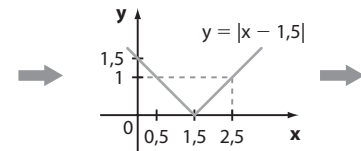
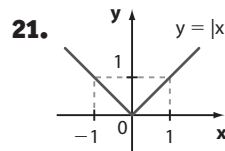
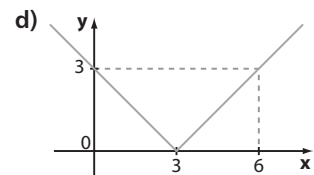
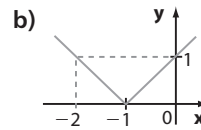
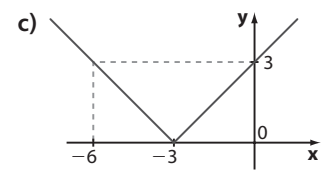
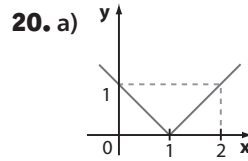
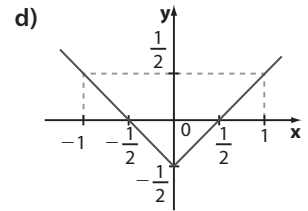
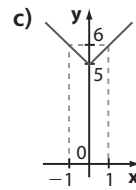
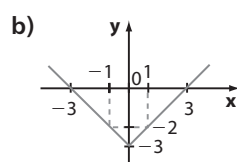
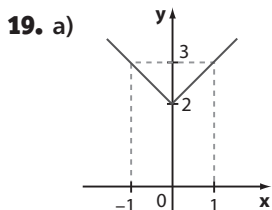
d)

20. a)

c)

b)

d)

21.

22. a) $f(0) = |-4| + 3 = 7$

$f(1) = |-2| + 3 = 5$

A soma pedida é 12.

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ |2x - 4| \geqslant 0$

$|2x - 4| + 3 \geqslant 0 + 3$, isto é, $y \geqslant 3$

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 3\}$

23. a) $S = \{-4, 4\}$

b) $S = \left\{-\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$

c) $S = \{0\}$

d) $S = \varnothing$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \{-3, 3\}$

24. a) $3x - 2 = 1$ ou $3x - 2 = -1$

$x = 1$ $\qquad x = \dfrac{1}{3}$

$S = \left\{1, \dfrac{1}{3}\right\}$

b) $x + 6 = 4$ ou $x + 6 = -4$

$x = -2$ $\qquad x = -10$

$S = \{-2, -10\}$

c) $x^2 - 2x - 5 = 3$ ou $x^2 - 2x - 5 = -3$

$x^2 - 2x - 8 = 0$ $\qquad x^2 - 2x - 2 = 0$

$x = -2$ ou $x = 4$ $\qquad x = 1 - \sqrt{3}$ ou $x = 1 + \sqrt{3}$

$S = \{-2, 4, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$

d) $x^2 - 4 = 5$ ou $x^2 - 4 = -5$
$x^2 = 9$ $\quad x^2 = -1$
$x = \pm 3$ $\quad x \notin \mathbb{R}$
$S = \{-3, 3\}$

e) $||2x - 1| - 3| = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow |2x - 1| - 3 = 2$ ou $|2x - 1| - 3 = -2$, isto é, $|2x - 1| = 5$ ou $|2x - 1| = 1$

- De $|2x - 1| = 5$, temos:
  $2x - 1 = 5$ ou $2x - 1 = -5 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 3$ ou $x = -2$
- De $|2x - 1| = 1$, temos:
  $2x - 1 = 1$ ou $2x - 1 = -1 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 1$ ou $x = 0$

$S = \{-2, 0, 1, 3\}$

25. a) Devemos ter $x \geq 0$ (*)
$-2x + 5 = x$ ou $-2x + 5 = -x$
$-3x = -5$ $\quad 5 = x$, satisfaz (*)
$x = \frac{5}{3}$, satisfaz (*)
$S = \left\{\frac{5}{3}, 5\right\}$

b) Devemos ter $x \geq -2$ (*)
$3x - 1 = x + 2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, satisfaz (*)
$3x - 1 = -x - 2 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$, satisfaz (*)
$S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$

c) Devemos ter $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$ (*)
$10 - 2x = 2x - 5 \Rightarrow -4x = -15 \Rightarrow x = \frac{15}{4}$, satisfaz (*)
$10 - 2x = -2x + 5 \Rightarrow 0 \cdot x = -5 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ que satisfaz; $S = \left\{\frac{15}{4}\right\}$

d) Devemos ter $x^2 \geq 0$, que é satisfeito para $\forall x \in \mathbb{R}$
$3x - 4 = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$
$3x - 4 = -x^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -4$;
$S = \{1, -4\}$

e) 1º modo: Devemos ter: $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$ (*)
$2x - 1 = 2x - 1 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ satisfaz
$2x - 1 = -2x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
$\left.\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} x \geq \frac{1}{2}$

2º modo: Uma solução alternativa às apresentadas nos itens anteriores é notar que, se $|2x - 1| = 2x - 1$, então, obrigatoriamente, $2x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq \frac{1}{2}$;
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$

f) 1º modo: Devemos ter: $3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$ (*)
$x - 3 = 3 - x \Rightarrow x = 3$
$x - 3 = -3 + x \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ serve
$\left.\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow} x \leq 3$

2º modo: $|x - 3| = 3 - x$ (oposto de $x - 3$), quando $x - 3 \leq 0$, isto é, $x \leq 3$; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$

g) Façamos $|x| = y \Rightarrow y^2 - 3y - 10 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 5$ ou $y = -2$
$|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$
$|x| = -2 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$
$\left.\right\} S = \{-5, 5\}$

26. Devemos ter: $p - 3 \geq 0 \Rightarrow p \geq 3$;
$\{p \in \mathbb{R} \mid p \geq 3\}$

27. a) Dia 3: $3 \cdot |18 - 6| + 40 = 76$ (76 dezenas, ou seja, 760 cupons)
Dia 10: $3 \cdot |18 - 20| + 40 = 46$ (46 dezenas, ou seja, 460 cupons)

b) 520 cupons $\Rightarrow n(t) = 52$ dezenas
Daí: $52 = 3 \cdot |18 - 2t| + 40$
$12 = 3 \cdot |18 - 2t|$
$4 = |18 - 2t| \Rightarrow 18 - 2t = 4$ ou $18 - 2t = -4$
$\Downarrow$ $t = 7$ (Dia 7) ou $\Downarrow$ $t = 11$ (Dia 11)

c) $n(t)$ é mínimo se $|18 - 2t| = 0 \Rightarrow t = 9$ (Dia 9).
$n(9) = 3 \cdot 0 + 40 = 40$ (40 dezenas, ou seja, 400 cupons)

28. a) Dupla **A**: $m = |4{,}175 - 4{,}189|\text{cm} = |-0{,}014|\text{cm} = 0{,}014\text{ cm} > 0{,}01\text{ cm}$
Dupla **B**: $m = |4{,}190 - 4{,}181|\text{cm} = |0{,}009|\text{cm} = 0{,}009\text{ cm} < 0{,}01\text{ cm}$ (Resultado aceitável)
Dupla **C**: $m = |4{,}179 - 4{,}185|\text{cm} = |-0{,}006|\text{cm} = 0{,}006\text{ cm} < 0{,}01\text{ cm}$ (Resultado aceitável)
Dupla **D**: $m = |4{,}177 - 4{,}188|\text{cm} = |-0{,}011|\text{cm} = 0{,}011\text{ cm} > 0{,}01\text{ cm}$
Duplas **B** e **C**.

b) Seja **x** o valor obtido na 2ª medição feita pela dupla **E**:
$|4{,}176 - x| = 0{,}012 \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} 4{,}176 - x = 0{,}012 \Rightarrow x = 4{,}164 \text{ (4,164 cm)} \\ \text{ou} \\ 4{,}176 - x = -0{,}012 \Rightarrow x = 4{,}188 \text{ (4,188 cm)} \end{cases}$

29. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \text{ ou } x > 6\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } x \geq \sqrt{2}\right\}$
e) Como $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$, a inequação $|x| > -2$ é satisfeita para todo $x \in \mathbb{R}$; $S = \mathbb{R}$.
f) $|x| \leq -2 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$, que satisfaz; $S = \varnothing$.
g) $|x| \leq 0$ só ocorre quando $|x| = 0$, isto é, $x = 0$; $S = \{0\}$.
h) $|x| \geq 0$ é sempre satisfeita, $\forall x \in \mathbb{R}$; $S = \mathbb{R}$.

30. a) $x + 3 < -7$ ou $x + 3 > 7$
$x < -10$ ou $x > 4$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -10 \text{ ou } x > 4\}$

b) $-3 \leq 2x - 1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$;
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$

c) $-x + 1 \leq -1$
$2 \leq x$, isto é, $x \geq 2$
ou
$-x + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 \geq x$, isto é, $x \leq 0$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$

d) $-12 < 5x - 3 < 12 \Rightarrow -9 < 5x < 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{9}{5} < x < 3$
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{9}{5} < x < 3\right\}$

31. a) $f(x) > 5 \Leftrightarrow 3 + \frac{|x - 6|}{2} > 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{|x - 6|}{2} > 2 \Rightarrow |x - 6| > 4 \Rightarrow$

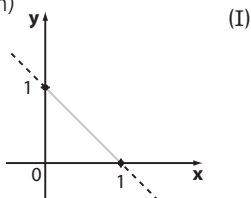
$\Rightarrow x - 6 < -4$ ou $x - 6 > 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x < 2$ ou $x > 10$
Assim, os meses são: janeiro ($x = 1$), novembro ($x = 11$) e dezembro ($x = 12$).

b) $f(x)$ é mínimo quando $|x - 6| = 0$, isto é, quando $x = 6$ (junho).
Nesse caso, a nota mínima é: $3 + \frac{0}{2} = 3$

32. a) Devemos ter:
$|x| - 2 \geqslant 0 \Rightarrow |x| \geqslant 2 \Rightarrow x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

b) Devemos ter:
$|x - 1| \geqslant 0$;
Para todo $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \geqslant 0$. Logo $D = \mathbb{R}$.

Desafio

1º Caso: $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$
$|x| = x$; $|y| = y \Rightarrow |x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x + y = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -x + 1$ (função afim)

(I)

x	y
0	0
1	0
0	1

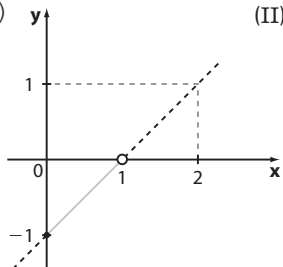
2º Caso: $x \geqslant 0$ e $y < 0$
$|x| = x$; $|y| = -y \Rightarrow |x| + |y| = 1 \Leftrightarrow x - y = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = x - 1$ (função afim)

(II)

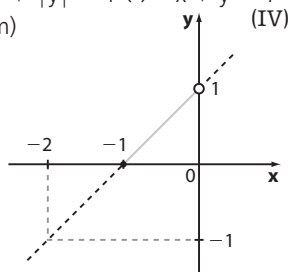
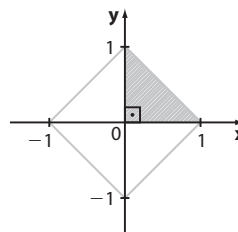
x	y
0	−1
1	0
2	1

3º Caso: $x < 0$ e $y < 0$
$|x| = -x$; $|y| = -y \Rightarrow |x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x - y = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = -x - 1$ (função afim)

(III)

x	y
−1	0
−2	1

4º Caso: $x < 0$ e $y \geqslant 0$
$|x| = -x$; $|y| = y \Rightarrow |x| + |y| = 1 \Leftrightarrow -x + y = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 1 + x$ (função afim)

(IV)

x	y
−1	0
−2	−1

Reunindo os segmentos de reta obtidos em (I), (II), (III) e (IV), obtemos um quadrado cuja diagonal mede 2 e o lado mede $\sqrt{2}$.

A área do triângulo hachurado é $\frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

A área do quadrado é igual a 2 unidades de área $\left(4 \cdot \frac{1}{2} = 2\right)$.

CAPÍTULO 7

Função exponencial

Exercícios

1. **a)** 125 **b)** −125 **c)** $\frac{1}{125}$ **d)** $-\frac{8}{27}$ **e)** 2 500 **f)** 1 **g)** $\frac{3}{2}$ **h)** 1 **i)** 32 **j)** −100 **k)** $\frac{1}{1000}$ **l)** −4

2. **a)** 0,04 **b)** 10 **c)** 3,4 **d)** 1 **e)** 400 **f)** 0,8 **g)** 1,728 **h)** 10,24 **i)** 0,216 **j)** 12,5 **k)** $-\frac{10}{3}$ **l)** 10 000

3. **a)** $A = \frac{9}{16} \cdot (-8) - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{10}{2} = -5$

b) $B = 2^2 + 3^1 = 4 + 3 = 7$

c) $C = -2 \cdot \frac{27}{8} + 1 - (-2) = -\frac{27}{4} + 3 = \frac{-15}{4}$

d) $D = \left[-\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right]^{-1} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} = -5$

e) $E = \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^1\right]^{-1} = \left[\frac{2}{3}\right]^{-1} = \frac{3}{2}$

f) $F = 6 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} + \frac{16}{9} = \frac{40}{9}$

4. **a)** $\frac{11^3 \cdot 11^8 \cdot 11}{11^6} = \frac{11^{12}}{11^6} = 11^6$

b) $\frac{2^{12} \cdot 2^7 \cdot 2^3}{2^{22}} = \frac{2^{22}}{2^{22}} = 2^0 = 1$

c) $\frac{10^{-2} \cdot 10^3}{(10^{-2})^{-1}} = \frac{10}{10^2} = 10^{-1}$

d) $\frac{10 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 10^2$

e) $\frac{2^9 \cdot 3^4}{3 \cdot 2^6} = 2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$

5. $A = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{2 - 3}{8} = -\frac{1}{8}$

$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot (-2)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(-8) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

$$C = \frac{-\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -1$$

$B < C < A$

6. **a)** $\frac{2^{100}}{2} = 2^{100-1} = 2^{99}$

b) $3 \cdot 3^{20} = 3^{1+20} = 3^{21}$

c) $\frac{4^{32}}{8} = \frac{(2^2)^{32}}{2^3} = \frac{2^{64}}{2^3} = 2^{61}$

d) $(5 \cdot 25^{10})^2 = [5 \cdot (5^2)^{10}]^2 = (5 \cdot 5^{20})^2 = (5^{21})^2 = 5^{42}$

7. $a = \frac{2^{48} + 2^{44} - 2^{46}}{2^6 \cdot 2^{18}} = \frac{2^{44} \cdot (2^4 + 1 - 2^2)}{2^{24}} = 13 \cdot 2^{20}$

Daí, $\frac{1}{26} a = \frac{1}{26} \cdot 13 \cdot 2^{20} = \frac{2^{20}}{2} = 2^{19}$

8. **a)** $\sqrt{13^2} = 13$

b) $\sqrt[3]{512} = 8$

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}$

d) $\sqrt{\frac{25}{100}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

f) 10, pois $10^5 = 100\,000$.

g) $\sqrt[3]{1 + 7} = \sqrt[3]{8} = 2$

9. **a)** $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

b) $\sqrt{54} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3^2} = 3 \cdot \sqrt{6}$

c) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^3} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{288} = \sqrt{2 \cdot 12^2} = 12 \cdot \sqrt{2}$

e) $\sqrt[4]{240} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3 \cdot 5} = 2 \cdot \sqrt[4]{15}$

f) $\sqrt[3]{10^{12}} = \sqrt[3]{(10^4)^3} = 10^4 = 10\,000$

10. **a)** $\sqrt{32} + \sqrt{50} = 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

b) $\sqrt{200} - 3\sqrt{72} + \sqrt{12} = 10\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 2\sqrt{3} =$
$= -8\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{1\,200} - 2\sqrt{48} + 3\sqrt{27} = 20\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 9\sqrt{3} =$
$= 21\sqrt{3}$

11. **a)** $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

d) $\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{9}}{3} = \sqrt[3]{9}$

e) $\frac{2}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} =$
$= 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)$

f) $\frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} + 3}{3^2 - (\sqrt{3})^2} =$
$= \frac{3 \cdot (\sqrt{3} + 1)}{6} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

g) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} =$
$= \frac{5 - 2\sqrt{10} + 2}{3} = \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$

12. **a)** $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{144} = 12$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 8} = \sqrt{48} = 4 \cdot \sqrt{3}$

c) $\sqrt{48} : \sqrt{2} = \sqrt{48 : 2} = \sqrt{24} = 2 \cdot \sqrt{6}$

d) $(\sqrt{2})^{16} = \sqrt{2^{16}} = \sqrt{(2^8)^2} = 2^8 = 256$

e) $(3 \cdot \sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18$

f) $\sqrt{\sqrt{2^8}} = \sqrt[4]{2^8} = \sqrt[4]{(2^2)^4} = 2^2 = 4$

g) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{7})^2 + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 =$
$= 9 + 2\sqrt{14}$

h) $(3 - \sqrt{2})^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 =$
$= 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$

i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}$

13. **a)** $\sqrt[3]{27} = 3$

b) $\sqrt{256} = 16$

c) $\sqrt[5]{32} = 2$

d) $\sqrt[3]{64} = 4$

e) $\sqrt{576} = 24$

f) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

g) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \frac{3}{10}$

h) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{81}\right)} = \frac{1}{3}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

14. **a)** $(2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

b) $\frac{1}{144^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{144}} = \frac{1}{12}$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

d) $\sqrt{16^5} = \sqrt{16^4 \cdot 16} = 16^2 \cdot \sqrt{16} = 1\,024$

e) $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

f) $\left(\frac{9}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{10}{3}$

g) $(2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$

h) $\sqrt{8^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

i) $0{,}001^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{1000}\right)^{-\frac{2}{3}} = (10^{-3})^{-\frac{2}{3}} = 10^2 = 100$

15. $a = 16 + 9 = 25$

$b = \frac{2 \cdot 3 - 4}{2^2} = \frac{6 - 4}{4} = \frac{1}{2}$ $\Bigg\}$ $a^b = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$

16. **a)** $ASC = \left(\frac{169 \cdot 75}{3\,600}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{169 \cdot 75}{3\,600}} =$
$= \frac{13 \cdot 5\sqrt{3}}{60} \simeq 1{,}84$ ($1{,}84$ m²)

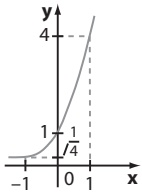
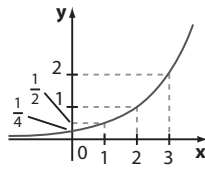
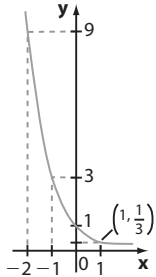
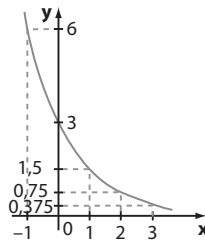
b) $2 = \left(\frac{h \cdot 80}{3\,600}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^2 = \left[\left(\frac{h \cdot 80}{3\,600}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 = \frac{h \cdot 80}{3\,600} \Rightarrow h = 180$ cm $= 1{,}80$ m

c) $ASC(Eli) = \sqrt{\frac{h \cdot 81}{3\,600}}$

$ASC(Rui) = \sqrt{\frac{1{,}21h \cdot 81}{3\,600}} = 1{,}1 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot 81}{3\,600}}$

Assim, $ASC(Rui) = 1{,}1 \cdot ASC(Eli)$

Como $1{,}1 = 1 + 0{,}1$, concluímos que $x\% = 10\%$

17. a) Im = $\mathbb{R}_+^*$

c) Im = $\mathbb{R}_+^*$

b) Im = $\mathbb{R}_+^*$

d) Im = $\mathbb{R}_+^*$

18. a) $f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow m \cdot 6^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow m \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow m = 3$

b) $f(x) = 3 \cdot 6^{-x}$; $f(-1) = 3 \cdot 6^1 = 18$

c) $f(0) = 3 \cdot 6^0 = 3$; P(0, 3) e a ordenada é 3.

19. a) $f(0) = 3 \Rightarrow a + b \cdot 2^0 = 3$

$f(1) = 5 \Rightarrow a + b \cdot 2^1 = 5$

$\begin{cases} a + b = 3 \\ a + 2b = 5 \end{cases} \Rightarrow b = 2 \text{ e } a = 1$

b) $f(x) = 1 + 2 \cdot 2^x$

$\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0 \Rightarrow 2 \cdot 2^x > 0 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 2^x > 0 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow \text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

c) $g(x) = mx + n$

- $g(-1) = f(-1) = 1 + 2 \cdot 2^{-1} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$
- $g(1) = 1$ (a linha horizontal tracejada corresponde a $y = 1$)

Daí: $\begin{cases} m \cdot (-1) + n = 2 \\ m \cdot 1 + n = 1 \end{cases} \Rightarrow n = \frac{3}{2} \text{ e } m = -\frac{1}{2}$

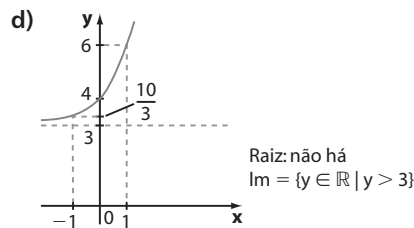
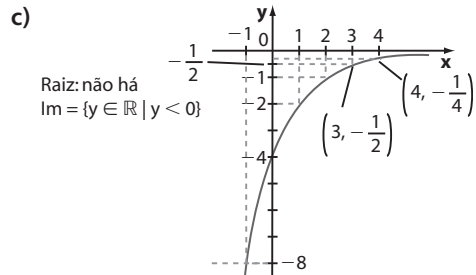
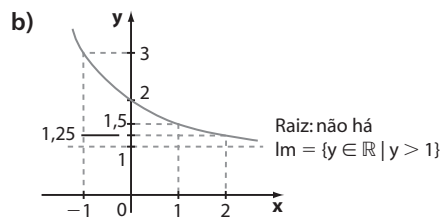
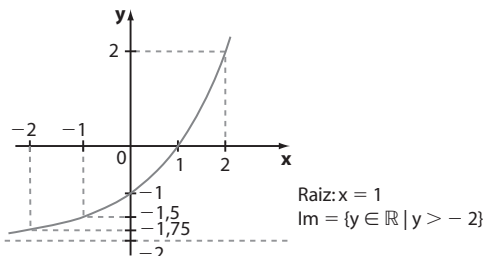
$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

d)
- **f** não tem raízes reais (gráfico não intersecta o eixo **x**)
- $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = 3$ é a raiz de **g**.

20. a)

b)

c)

d)

É possível determinar algebricamente o conjunto imagem das funções:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, 2^x > 0 \Rightarrow 2^x - 2 > 0 - 2$, isto é, $y > -2$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 > 0 + 1$,

isto é, $y > 1$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0 \Rightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0$, ou seja, $y < 0$

d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $3^x > 0 \Rightarrow 3^x + 3 > 0 + 3$, isto é, $y > 3$

21. a)

t (horas)	0	0,5	1	1,5	2	3	5
número de bactérias (milhares)	10	30	90	270	810	7 290	590 490

$\cdot 3$ $\cdot 3$ $\cdot 3$ $\cdot 3$ $\cdot 3^2$ $\cdot 3^4$

b) $t = 0 \Rightarrow n(0) = 10$

$t = 0{,}5 \Rightarrow n(0{,}5) = 3 \cdot 10 = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot 10$

$t = 1 \Rightarrow n(1) = 3^2 \cdot 10 = 3^{2 \cdot 1} \cdot 10$

$t = 1{,}5 \Rightarrow n(1{,}5) = 3^3 \cdot 10 = 3^{2 \cdot \frac{3}{2}} \cdot 10$

$t = 2 \Rightarrow n(2) = 3^4 \cdot 10 = 3^{2 \cdot 2} \cdot 10$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Logo, $n(t) = 3^{2t} \cdot 10$

22. a) Hoje: 2 000 reais

1 ano: $2\,000 + 0{,}06 \cdot 2\,000 = 2\,120$ (2 120 reais)

2 anos: $2\,120 + 0{,}06 \cdot 2\,120 = 2\,247{,}20$ (2 247,20 reais)

3 anos: $2\,247{,}20 + 0{,}06 \cdot 2\,247{,}20 \simeq 2\,382{,}03$ (2 382,03 reais)

4 anos: $2\,382{,}03 + 0{,}06 \cdot 2\,382{,}03 \simeq 2\,524{,}95$
(2 524,95 reais)
5 anos: $2\,524{,}95 + 0{,}06 \cdot 2\,524{,}95 \simeq 2\,676{,}45$
(2 676,45 reais)

b) Hoje: 2 000
1 ano: $1{,}06 \cdot 2\,000$
2 anos: $1{,}06 \cdot (1{,}06 \cdot 2\,000) = 1{,}06^2 \cdot 2\,000$
3 anos: $1{,}06 \cdot (1{,}06^2 \cdot 2\,000) = 1{,}06^3 \cdot 2\,000$
⋮
$S(x) = 2\,000 \cdot 1{,}06^x$

c) $S(10) = 2\,000 \cdot 1{,}06^{10} \simeq 2\,000 \cdot 1{,}8 =$
$= 3\,600$ (3 600 reais); o saldo não dobra.

23. a)
- Depois de 1 ano, ela valerá: $12\,000 - 0{,}1 \cdot 12\,000 \overset{*}{=}$ $\overset{*}{=} 0{,}9 \cdot 12\,000 = 10\,800$ (10 800 reais)
- Depois de 2 anos, ela valerá: $10\,800 - 0{,}1 \cdot 10\,800 =$ $= 0{,}9 \cdot 10\,800 \overset{*}{=} 0{,}9^2 \cdot 12\,000 \overset{**}{=} 9\,720$ (9 720 reais)
- Depois de 3 anos, ela valerá: $9\,720 - 0{,}1 \cdot 9\,720 =$ $= 0{,}9 \cdot 9\,720 \overset{**}{=} 0{,}9^3 \cdot 12\,000 \overset{***}{=} 8\,748$ (8 748 reais)
- Depois de 4 anos, ela valerá: $8\,748 - 0{,}1 \cdot 8\,748 =$ $= 0{,}9 \cdot 8\,748 \overset{***}{=} 0{,}9^4 \cdot 12\,000 = 7\,873{,}20$ (7 873,20 reais)

b) Depois de 7 anos, a moto valerá: $0{,}9^7 \cdot 12\,000 \simeq 5\,740$ (5 740 reais).

c) Pelo item *a*, é possível generalizar: $v(t) = 0{,}9^t \cdot 12\,000$

24. a) Falsa; daqui a 1 ano, a população de **B** será: $100\,000 + 20\,000 = 120\,000$; daqui a 2 anos, a população de **B** será:
$120\,000 + \underbrace{24\,000}_{0{,}2 \cdot 120\,000} = 144\,000$

b) Falsa; em três anos, o aumento da população de **A** será: $3 \cdot 25\,000 = 75\,000$; assim a população será 175 000.

c) Falsa; população de **A**: $4 \cdot 25\,000 + 100\,000 = 200\,000$; população de **B**: pelo item *a*, em dois anos a população será de 144 000;
em 3 anos: $144\,000 + 0{,}2 \cdot 144\,000 = 172\,800$;
em 4 anos: $172\,800 + 0{,}2 \cdot 172\,800 = 207\,360$.
Poderíamos também usar a lei $p(t) = 100\,000 \cdot 1{,}2^t$:
$p(4) = 100\,000 \cdot 1{,}2^4 = 100\,000 \cdot 2{,}0736 = 207\,360$

d) Falsa; a lei é $y = 100\,000 + 25\,000x$

e) Verdadeira; trata-se da função exponencial $p(t) = 100\,000 \cdot 1{,}2^t$

25. a) Para t = 0 temos:
$p(0) = 55 - 30 \cdot e^0 = 55 - 30 = 25$ (25 unidades)

b) $p(1) = 55 - 30 \cdot e^{-0{,}2} = 55 - \dfrac{30}{e^{0{,}2}} =$
$= 55 - \dfrac{30}{1{,}2} = 55 - 25 = 30$ (30 unidades);
$p(2) = 55 - 30\, e^{-0{,}2 \cdot 2} = 55 - 30 \cdot e^{-0{,}4} =$
$= 55 - \dfrac{30}{e^{0{,}4}} = 55 - \dfrac{30}{(e^{0{,}2})^2} = 55 - \dfrac{30}{1{,}2^2} =$
$= 55 - 20{,}8\overline{3} = 34{,}1\overline{6}$; como devemos ter um número inteiro, arredondamos para 34 unidades.
Assim, o acréscimo é de 4 unidades.

c) Quando **t** é arbitrariamente grande, $e^{-0{,}2t}$ tende a zero, de modo que p(t) tende a $55 - 30 \cdot 0 = 55$ (55 unidades).

26. a) $3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$; $S = \{4\}$

b) $2^x = 2^8 \Rightarrow x = 8$; $S = \{8\}$

c) $7^x = 7^1 \Rightarrow x = 1$; $S = \{1\}$

d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow x = 5$; $S = \{5\}$

e) $5^{x+2} = 5^3 \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$; $S = \{1\}$

f) $10^{3x} = 10^5 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$; $S = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}$

g) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = \left(\dfrac{1}{5}\right)^4 \Rightarrow x = 4$; $S = \{4\}$

h) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2 \Rightarrow 2^{-x} = 2^1 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$; $S = \{-1\}$

i) $0{,}1^x = 0{,}1^2 \Rightarrow x = 2$; $S = \{2\}$

j) $\forall x \in \mathbb{R}$, $3^x > 0$; assim a equação $3^x = -3$ não tem solução real; $S = \varnothing$

k) $S = \varnothing$; (análogo ao item *j*).

27. a) $8^x = 16 \Rightarrow 2^{3x} = 2^4 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$; $S = \left\{\dfrac{4}{3}\right\}$

b) $27^x = 9 \Rightarrow 3^{3x} = 3^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$; $S = \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

c) $4^x = 32 \Rightarrow 2^{2x} = 2^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$; $S = \left\{\dfrac{5}{2}\right\}$

d) $25^x = 625 \Rightarrow 25^x = 25^2 \Rightarrow x = 2$; $S = \{2\}$

e) $9^{x+1} = \sqrt[3]{3} \Rightarrow 3^{2x+2} = 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x + 2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = -\dfrac{5}{3} \Rightarrow x = -\dfrac{5}{6}$; $S = \left\{-\dfrac{5}{6}\right\}$

f) $4^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-1} \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$; $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

g) $0{,}2^{x+1} = \sqrt{125} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+1} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 5^{-x-1} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow -x - 1 = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = -\dfrac{5}{2}$; $S = \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

h) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x = \dfrac{1}{8} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2^2}\right)^x = \dfrac{1}{2^3} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$; $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

28.
- Nível atual: $t = 0 \Rightarrow n(0) = 7{,}6 \cdot 4^0 = 7{,}6$ (7,6 m)
- Devemos determinar **t** tal que $n(t) = \dfrac{7{,}6}{8}$:

$\dfrac{\cancel{7{,}6}^{\,1}}{8} = \cancel{7{,}6} \cdot 4^{-0{,}2t} \Rightarrow 2^{-3} = (2^2)^{-0{,}2t} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{-3} = 2^{-0{,}4t} \Rightarrow -0{,}4t = -3$
$\Rightarrow t = 7{,}5$ (7,5 meses)

29. a) $v(0) = 250\,000 \cdot (1{,}05)^0 = 250\,000$ (250 000 reais)

b) $v(1) = 250\,000 \cdot 1{,}05^1 = 262\,500$ (262 500 reais)
A valorização é 12 500 reais ($262\,500 - 250\,000 = 12\,500$)

c) $v(6) = 250\,000 \cdot (1{,}05)^6 = 250\,000 \cdot (1{,}05)^3 \cdot (1{,}05)^3 =$
$= 250\,000 \cdot 1{,}15^2 = 330\,625$ (330 625 reais)

d) Devemos determinar **t** tal que $v(t) = 1\,525\,000$.
$1\,525\,000 = 250\,000 \cdot (1{,}05)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow 1{,}05^t = 6{,}1 \overset{\text{tabela}}{\Longrightarrow} t = 37$ (37 anos)

30. a)
- $N(0) = 3\,000 \Rightarrow a \cdot 2^0 = 3\,000 \Rightarrow a = 3\,000$
- $N(2) = 24\,000 \Rightarrow a \cdot 2^{2b} = 24\,000 \overset{a\,=\,3000}{\Longrightarrow}$
$\overset{a\,=\,3000}{\Longrightarrow} 3\,000 \cdot 2^{2b} = 24\,000 \Rightarrow 2^{2b} = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{2b} = 2^3 \Rightarrow b = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

b) $N(t) = 3000 \cdot 2^{1,5t}$

$16 \text{ horas} = \frac{16}{24} \text{ dia} = \frac{2}{3} \text{ dia}$

$N\left(\frac{2}{3}\right) = 3000 \cdot 2^{1,5 \cdot \frac{2}{3}} = 3000 \cdot 2 = 6000$ (6000 pessoas)

c) $N(4) = 3000 \cdot 2^{1,5 \cdot 4} = 3000 \cdot 2^6 = 192000$ (192000 pessoas)

d) Devemos determinar **t** correspondente a $N(t) = 3000000$.

$3000000 = 3000 \cdot 2^{1,5t} \Rightarrow 1000 = 2^{1,5t} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{10} = 2^{1,5t} \Rightarrow t = 6,666... = 7$ (7 dias)

31. a) $10^{x+x+2} = 10^3 \Rightarrow 10^{2x+2} = 10^3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $2^{4x+1} \cdot (2^3)^{-x+3} = 2^{-4} \Rightarrow (4x+1) + (-3x+9) = -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 10 = -4 \Rightarrow x = -14; S = \{-14\}$

c) $5^{-3x} : (5^2)^{2+x} = 5 \Rightarrow 5^{-3x} : 5^{4+2x} = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^{-3x-(4+2x)} = 5 \Rightarrow 5^{-5x-4} = 5^1 \Rightarrow -5x - 4 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -1; S = \{-1\}$

d) $(3^{-2})^{x^2-1} \cdot (3^3)^{1-x} = 3^{2x+7} \Rightarrow 3^{-2x^2+2} \cdot 3^{3-3x} = 3^{2x+7} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{-2x^2-3x+5} = 3^{2x+7} \Rightarrow -2x^2 - 3x + 5 = 2x + 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = -2$;
$S = \left\{-\frac{1}{2}, -2\right\}$

32. a) $2^x \cdot 2^2 - 3 \cdot \frac{2^x}{2^1} = 20 \Rightarrow 2^x \cdot \left(2^2 - \frac{3}{2}\right) = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^x \cdot \frac{5}{2} = 20 \Rightarrow 2^x = \frac{40}{5} \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3; S = \{3\}$

b) $5^x \cdot 5^3 - 5^x \cdot 5^2 - 11 \cdot 5^x = 89 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^x \cdot (5^3 - 5^2 - 11) = 89 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^x \cdot 89 = 89 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0; S = \{0\}$

c) $4^x \cdot 4^1 + 4^x \cdot 4^2 - \frac{4^x}{4^1} - \frac{4^x}{4^2} = 315 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4^x \cdot \left(4 + 16 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right) = 315 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4^x \cdot \left(\frac{320 - 4 - 1}{16}\right) = 315 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4^x \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{315}}}{16} = \overset{1}{\cancel{315}} \Rightarrow 4^x = 16 \Rightarrow x = 2; S = \{2\}$

d) $(5^x)^2 - 23 \cdot 5^x = 50$

Fazendo $5^x = y$, segue a equação:
$y^2 - 23y - 50 = 0 \Rightarrow y = 25$ ou $y = -2$
$y = 25 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$
$y = -2 \Rightarrow 5^x = -2$, não ocorre, pois $\forall x \in \mathbb{R}, 5^x > 0$;
$S = \{2\}$

33. a) $\begin{cases} (2^{-1})^{x+2y} = 2^3 \\ 3^{-1} = 3^{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-x-2y} = 2^3 \\ 3^{-1} = 3^{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}$

$S = \{(1, -2)\}$

b) $\begin{cases} (7^{\frac{1}{2}})^x = (7^2)^{y-2x} \\ 2^{y-x} = 2^{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7^{\frac{x}{2}} = 7^{2y-4x} \\ 2^{y-x} = 2^{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 4y \\ y - x = 10 \end{cases}$

$S = \{(8, 18)\}$

34. a) Apartamento **A**: $v_A(0) = 2^{0+1} + 120 = 122$ (122 milhares ou 122 mil reais)

Apartamento **B**: $v_B(0) = 6 \cdot 2^{-2} + 248 = 1,5 + 248 = 249,5$ (249,5 milhares ou 249,5 mil reais)

b) Para $t = 4$

A: $v_A = 2^{t+1} + 120 = 2^5 + 120 = 152$ (152 mil reais)

B: $v_B = 6 \cdot 2^{t-2} + 248 = 6 \cdot 2^2 + 248 = 272$ (272 mil reais)

O apartamento **B** valerá mais.

c) $v_A(t) = v_B(t) \Rightarrow 2^{t+1} + 120 = 6 \cdot 2^{t-2} + 248 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^t \cdot 2 + 120 = 6 \cdot \frac{2^t}{2^2} + 248 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot 2^t - \frac{3}{2} \cdot 2^t = 128 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^t = 128 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^t = 256 \Rightarrow t = 8$ (8 anos)

35. a) $t = 0 \Rightarrow n(t) = 10000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10000 = 15000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{0+k} \Rightarrow \frac{10000}{15000} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \Rightarrow k = -1$

b) $n(t) = 15000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{t-1}$

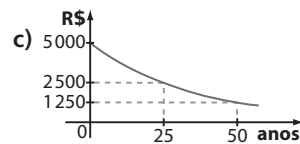
$n(3) = 15000 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 15000 \cdot \frac{9}{4} = 33750$

(33750 habitantes)

36. a) $t = 0 \Rightarrow v(0) = 5000 \cdot 4^0 = 5000$ (5000 reais)

b) $v(t) = 2500 \Rightarrow 2500 = 5000 \cdot 4^{-0,02t} \Rightarrow \frac{1}{2} = 4^{-0,02t} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{-1} = 2^{-0,04t} \Rightarrow 0,04t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{0,04} = 25$

(25 anos)

c)

Desafio

a) Do enunciado podemos escrever:

- $T_A = -18$ °C
- $T(t) = 0$ °C $\Leftrightarrow t = 90$ min
- $T(t) = -16$ °C $\Leftrightarrow t = 270$ min

$T(t) = -18 + \alpha \cdot 3^{\beta t}$ (*)

$\begin{cases} 0 = -18 + \alpha \cdot 3^{90\beta} \Rightarrow 18 = \alpha \cdot 3^{90\beta} & (1) \\ -16 = -18 + \alpha \cdot 3^{270\beta} \Rightarrow 2 = \alpha \cdot 3^{270\beta} & (2) \end{cases}$

Dividindo, membro a membro, (1) por (2) obtemos:

$\frac{\alpha \cdot 3^{90\beta}}{\alpha \cdot 3^{270\beta}} = \frac{18}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{-180\beta} = 9 \Rightarrow 3^{-180\beta} = 3^2 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{90}$

Substituindo em (1) obtemos $18 = \alpha \cdot 3^{90 \cdot \left(-\frac{1}{90}\right)} \Rightarrow$
$\Rightarrow 18 = \alpha \cdot 3^{-1} \Rightarrow \alpha = 54$

b) Devemos determinar **t** para o qual $T(t) = T_A + \left(\frac{2}{3}\right)^{\circ}$.

Em (*):

$T_A + \frac{2}{3} = -18 + \alpha \cdot 3^{\beta t}$

$\cancel{-18} + \frac{2}{3} = \cancel{-18} + 54 \cdot 3^{-\frac{1}{90}t} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^{-4} = 3^{-\frac{1}{90}t} \Rightarrow -\frac{1}{90}t = -4 \Rightarrow t = 360$ (360 minutos)

CAPÍTULO 8

Função logarítmica

Exercícios

1. **a)** 4 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 3 **e)** 5 **f)** 2 **g)** 5 **h)** 3

2. **a)** -2 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{7}{2}$ **e)** $\frac{1}{4}$ **f)** -2 **g)** $-\frac{3}{2}$ **h)** $-\frac{2}{3}$ **i)** -2 **j)** -1

3. $A = \log_{25} \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$, pois $25^{-\frac{1}{2}} = (5^2)^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

$B = \log_7 \frac{1}{49} = -2$, pois $7^{-2} = \frac{1}{49}$

$C = \log_{0,25} \sqrt{8} \Rightarrow 0,25^C = \sqrt{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^C = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2^{-2C} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$

$D = \log 0,1 = -1$, pois $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$

Assim: $B < D < C < A$.

4. **a)** $1 + 0 - 1 = 0$
b) $-1 + (-1) = -2$
c) $3 + 2 + 1 + 0 = 6$
d) $2 + 3 = 5$
e) $\log_8 (\log_3 9) = \log_8 2 = \frac{1}{3}$
f) $\log_9 3 + \log_4 4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

5. $\log a = 2 \Rightarrow 10^2 = 100 = a$;
$\log b = -1 \Rightarrow 10^{-1} = b \Rightarrow b = \frac{1}{10}$

a) $\log_b a = \log_{\frac{1}{10}} 100 = -2$, pois $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100$

b) $\log_a b = \log_{100} \frac{1}{10} = -\frac{1}{2}$, pois

$100^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{100^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$

c) $\log_a b^2 = \log_{100} \frac{1}{10} = -1$

d) $\log (a \cdot b) = \log \left(100 \cdot \frac{1}{10}\right) = \log 10 = 1$

e) $\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log \frac{100}{\frac{1}{10}} = \log 1\,000 = 3$

f) $\log_{\sqrt{b}} a = \log_{\sqrt{\frac{1}{10}}} 100 = x \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{10}}\right)^x = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(10^{-\frac{1}{2}}\right)^x = 10^2 \Rightarrow x = -4$

6. **a)** $x = 16$

b) $4x - 1 = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c) $x^2 = x \Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = 1$

d) A condição de existência da base é: $0 < x$ e $x \neq 1$ (*); para os logaritmandos devemos ter:

$2x - 3 > 0$ e $-4x + 8 > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2$ (**)

Fazendo (*) ∩ (**), segue $\frac{3}{2} < x < 2$

Supondo $\frac{3}{2} < x < 2$, temos que:

$2x - 3 = -4x + 8 \Rightarrow 6x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{6}$, que satisfaz a condição de existência.

7. **a)** $3^4 = x \Rightarrow x = 81$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = x \Rightarrow x = 2^2 = 4$

c) $x^1 = 2 \Rightarrow x = 2$

d) $x^{-1} = 0,25 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$

e) $x^0 = 1$ é verdadeiro desde que a base do logaritmo satisfaça a condição: $x > 0$ e $x \neq 1$.

f) $3^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = 5$

8. **a)** $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

b) $\log_5 \sqrt[7]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7}$

c) $\log_5 5^{12} = 12$

d) $\log_5 625^{-\frac{1}{9}} = \log_5 (5^4)^{-\frac{1}{9}} = \log_5 5^{-\frac{4}{9}} = -\frac{4}{9}$

e) $\log_5 0,2 = \log_5 \frac{1}{5} = -1$

9. Devemos ter $\Delta = 0$, isto é:
$4^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log_2 m = 0 \Rightarrow 16 = 4 \log_2 m \Rightarrow \log_2 m = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 2^4 = 16$
Se $m = 16$, a equação é: $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -2$ é a raiz dupla.

10. **a)** $4^3 \cdot 4^{\log_4 2} = 64 \cdot 2 = 128$

b) $\frac{5^1}{5^{\log_5 4}} = \frac{5}{4}$

c) $8^{\log_2 7} = (2^3)^{\log_2 7} = (2^{\log_2 7})^3 = 7^3 = 343$

d) $(3^4)^{\log_3 2} = (3^{\log_3 2})^4 = 2^4 = 16$

e) $5^{\log_{25} 7} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 7} = (25^{\log_{25} 7})^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

11. **a)** $\ell n\, e = \log_e e = 1$

b) $\ell n\, 1 = \log_e 1 = 0$

c) $\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1$

d) 8

e) $\ell n \left(\frac{1}{e}\right) = \log_e \left(\frac{1}{e}\right) = -1$

f) $e^{\ell n\, 3} = e^{\log_e 3} = 3$

g) $10^{\log 8} = 10^{\log_{10} 8} = 8$

h) $e^{2 \ell n\, 5} = (e^{\ell n\, 5})^2 = 5^2 = 25$

i) $e^2 \cdot e^{\ell n\, 2} = e^2 \cdot 2 = 2e^2$

j) $(-3) + (-2) + (-1) + 0 = -6$

12. **a)** $\log_b x + \log_b y = -2 + 3 = 1$

b) $\log_b x - \log_b y = -2 - 3 = -5$

c) $\log_b x^3 + \log_b y^2 = 3 \cdot \log_b x + 2 \cdot \log_b y =$
$= 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (3) = -6 + 6 = 0$

d) $\log_b y^2 - \log_b \sqrt{x} = 2 \cdot \log_b y - \frac{1}{2} \cdot \log_b x =$

$= 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (-2) = 6 + 1 = 7$

e) $\log_b \left(x \cdot \sqrt{y}\right) - \log_b b = \log_b x + \frac{1}{2} \log_b y - 1 =$

$= -2 + \frac{1}{2} \cdot 3 - 1 = -2 + \frac{3}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

f) $\log_b \left(\sqrt{x} \cdot y^3\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_b \left(\sqrt{x} \cdot y^3\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\log_b x^{\frac{1}{2}} + \log_b y^3\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \log_b x + 3 \log_b y\right) =$

$= \frac{1}{4} \cdot (-2) + \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{8}{2} = 4$

13. **a)** $\log_5 (5a) - \log_5 (bc) =$
$= (\log_5 5 + \log_5 a) - (\log_5 b + \log_5 c) =$
$= 1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$

b) $\log b^2 - \log (10a) = 2 \log b - (\log 10 + \log a) =$
$= 2 \log b - 1 - \log a$

c) $\log_3 (ab^2) - \log_3 c = \log_3 a + 2 \log_3 b - \log_3 c$

d) $\log_2 (8a) - \log_2 (b^3 \cdot c^2) =$
$= (\log_2 8 + \log_2 a) - (3 \log_2 b + 2 \log_2 c) =$
$= 3 + \log_2 a - 3 \log_2 b - 2 \log_2 c$

e) $\log_2 \sqrt{8a^2b^3} = \log_2 \sqrt{8} + \log_2 \sqrt{a^2} + \log_2 \sqrt{b^3} =$
$= \log_2 2^{\frac{3}{2}} + \log_2 a + \log_2 b^{\frac{3}{2}} =$
$= \frac{3}{2} \cdot \log_2 2 + \log_2 a + \frac{3}{2} \cdot \log_2 b =$
$= \frac{3}{2} + \log_2 a + \frac{3}{2} \log_2 b$

14. **a)** $\log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$

b) $\log \left(\frac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = b - a$

c) $\log \left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - a$

d) $\log (2 \cdot 3 \cdot 5) = \log 2 + \log 3 + \log 5 =$
$= a + b + (1 - a) = b + 1$

e) $\log 2^{-2} = -2 \cdot \log 2 = -2a$

f) $\log (2^3 \cdot 3^2) = 3 \log 2 + 2 \log 3 = 3a + 2b$

g) $\log \left(\frac{3}{10}\right) = \log 3 - \log 10 = b - 1$

h) $\log 1{,}8^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log \left(\frac{18}{10}\right) = \frac{1}{3} \log 18 - \frac{1}{3} \log 10 =$
$= \frac{1}{3} \cdot \log (2 \cdot 3^2) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot (\log 2 + 2 \log 3) - \frac{1}{3} =$
$= \frac{1}{3}(a + 2b) - \frac{1}{3}$

i) $\log 0{,}024 = \log \left(\frac{24}{1000}\right) = \log 24 - \log 1000 =$
$= \log (2^3 \cdot 3) - 3 = 3 \log 2 + \log 3 - 3 =$
$= 3a + b - 3$

j) $\log \left(\frac{3}{4}\right) = \log 3 - 2 \log 2 = b - 2a$

k) $\log 20\,000 = \log (2 \cdot 10\,000) = \log 2 + \log 10\,000 =$
$= a + 4$

15. **a)** $\log a + \log b + \log c = \log (a \cdot b \cdot c)$;
a expressão é abc.

b) $\log_2 a^3 + \log_2 c^2 - \log_2 b = \log_2 (a^3 \cdot c^2) - \log_2 b =$
$= \log_2 \left(\frac{a^3 \cdot c^2}{b}\right)$; a expressão é $\frac{a^3 \cdot c^2}{b}$.

c) $\log_3 \left(\frac{a}{b}\right) - 2 = \log_3 \left(\frac{a}{b}\right) - \log_3 9 =$
$= \log_3 \left(\frac{\frac{a}{b}}{9}\right) = \log_3 \left(\frac{a}{9b}\right)$; a expressão é $\frac{a}{9b}$.

d) $\log a^{\frac{1}{2}} - \log b = \log \sqrt{a} - \log b = \log \left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)$;
a expressão é $\frac{\sqrt{a}}{b}$.

16. **a)** $\log_{15} (3 \cdot 5) = \log_{15} 15 = 1$

b) $\log_3 \left(\frac{72}{12}\right) - \log_3 2 = \log_3 6 - \log_3 2 =$
$= \log_3 \left(\frac{6}{2}\right) = \log_3 3 = 1$

c) $\underbrace{\log_{15} 8^{\frac{1}{3}} + \log_{15} 2^2 + \log_{15} 5} - \log_{15} 9\,000 =$
$= \log_{15} \left(8^{\frac{1}{3}} \cdot 2^2 \cdot 5\right) - \log_{15} 9\,000 =$
$= \log_{15} 40 - \log_{15} 9\,000 = \log_{15} \left(\frac{40}{9\,000}\right) =$
$= \log_{15} \left(\frac{1}{225}\right) = -2$

17. **a)** $\log x = \log (5 \cdot 4 \cdot 3) \Rightarrow x = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) $\log x^2 = \log (3 \cdot 4) \Rightarrow x^2 = 12 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x = \sqrt{12}$

c) $\log x^{-1} = \log \left(\frac{1}{3} \cdot 9\right) \Rightarrow \log (x^{-1}) = \log 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^{-1} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

d) $\log_3 x^{\frac{1}{2}} = \log_3 10^2 - \log_3 4 \Rightarrow \log_3 \sqrt{x} = \log_3 \left(\frac{10^2}{4}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{10^2}{4} \Rightarrow \sqrt{x} = 25 \Rightarrow x = 625$

18. **a)** $\log (3 \cdot 10^3) = \log 3 + \log 10^3 = 0{,}48 + 3 = 3{,}48$

b) $\log 0{,}002 = \log \left(\frac{2}{1\,000}\right) = \log 2 - \log 1\,000 = 0{,}3 - 3 =$
$= -2{,}7$

c) $\log \sqrt{3} = \log 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}48 = 0{,}24$

d) $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = 1{,}3$

e) $\log \left(\frac{6}{100}\right) = \log 6 - \log 100 = \log 2 + \log 3 - 2 =$
$= -1{,}22$

f) $\log (2^4 \cdot 3) = 4 \cdot \log 2 + \log 3 = 1{,}68$

g) $\log 125 = 3 \cdot \log 5 = 3 \cdot \log \left(\frac{10}{2}\right) = 3 \cdot (1 - 0{,}3) = 2{,}1$

19. **a)** $\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = 1 + \log_2 5 = 1 + 2{,}32 = 3{,}32$

b) $\log_2 500 = \log_2 (5 \cdot 10^2) = \log_2 5 + 2 \log_2 10 =$
$= 2{,}32 + 2 \cdot 3{,}32 = 8{,}96$

c) $\log_2 1\,600 = \log_2 (16 \cdot 100) = \log_2 16 + \log_2 100 =$
$= 4 + 2 \log_2 10 = 4 + 2 \cdot 3{,}32 = 10{,}64$

d) $\log_2 0{,}2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \log_2 \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot \log_2 5 =$
$= -\frac{1}{3} \cdot 2{,}32 = -0{,}77\overline{3}$

e) $\log_2 \left(\frac{64}{125}\right) = \log_2 2^6 - \log_2 5^3 =$
$= 6 \cdot 1 - 3 \cdot 2{,}32 = -0{,}96$

20. **a)** Falsa; $\log 20 + \log 6 = \log (20 \cdot 6) = \log 120 \neq \log 26$

b) Verdadeira; $\log 5 + \log 8 + \log 2{,}5 =$
$= \log (5 \cdot 8 \cdot 2{,}5) = \log 100 = 2$

c) Verdadeira; $\log_2 4^{18} = 18 \cdot \log_2 4 = 18 \cdot 2 = 36$

d) Falsa; $\log_3 \sqrt[8]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8} < 0{,}25$

e) Verdadeira; $\log_5 \left(\frac{35}{7}\right) = \log_5 5 = 1$

f) Verdadeira; $\log_3 \left[\left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)\right] = \log_3 \left(\sqrt{2^2} - 1^2\right) =$
$= \log_3 1 = 0$

21. **a)** $t = 9 \Rightarrow S = -18 \cdot \log (9 + 1) + 86 \Rightarrow$
$\Rightarrow S = -18 \cdot \overbrace{\log 10}^{=1} + 86 \Rightarrow S = -18 + 86 = 68$
$\therefore S = 68\%$

b) $50 = -18 \cdot \log(t+1) + 86 \Rightarrow$
$\Rightarrow -36 = -18 \cdot \log(t+1) \Rightarrow \log(t+1) = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^2 = t + 1 \Rightarrow t = 99$ (99 minutos)

22. a) A condição de existência é:

$x + 3 > 0$ e $x^2 + 45 > 0$
$\Downarrow \quad \Downarrow$
$x > -3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ satisfaz $\Rightarrow x > -3$

Temos:
$\log_7 (x+3)^2 = \log_7 (x^2 + 45) \Rightarrow (x+3)^2 = x^2 + 45 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 45 \Rightarrow 6x = 36 \Rightarrow x = 6 > -3;$
$S = \{6\}$

b) A condição de existência é:

$$\begin{cases} 4x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4} \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ x > 0 \Rightarrow x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{4}$$

Temos:
$\log(4x-1) - \log(x+2) = \log x \Rightarrow$
$\Rightarrow \log\left(\frac{4x-1}{x+2}\right) = \log x \Rightarrow \frac{4x-1}{x+2} = x \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$
Como $1 > \frac{1}{4}$, temos $S = \{1\}$

c) A condição de existência é $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Temos:
$3\log_5 2 + \log_5 (x-1) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_5 2^3 + \log_5 (x-1) = 0 \Rightarrow \log_5 [2^3 \cdot (x-1)] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^0 = 8x - 8 \Rightarrow 8x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{8} > 1;$
$S = \left\{\frac{9}{8}\right\}$

d) A condição de existência é:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

Temos:
$2 \cdot \log x = \log(2x-3) + \log(x+2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log x^2 = \log[(2x-3)\cdot(x+2)] \Rightarrow$
$\Rightarrow \log(x^2) = \log(2x^2 + x - 6) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 2x^2 + x - 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -3$ (não serve) ou $x = 2$ $\left(\text{serve, pois } 2 > \frac{3}{2}\right)$
$S = \{2\}$

e) A condição de existência é $x > 0$. Temos:
$\log x + 2\log x + 3\log x = -6 \Rightarrow 6\log x = -6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10} > 0;\ S = \left\{\frac{1}{10}\right\}$

23. a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ \log_4 (x \cdot y) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 4^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - y \ (1) \\ x \cdot y = 16 \ (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2) $\Rightarrow (10 - y) \cdot y = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 8 \\ y = 8 \Rightarrow x = 2 \end{cases};\ S = \{(8, 2), (2, 8)\}$$

b) $\begin{cases} (2^2)^{x-y} = 2^3 \\ \log_2\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x-2y} = 2^3 \\ \frac{x}{y} = 2^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ x = 4y \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ e } x = 2$$

$S = \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

24. a) $\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5}$

b) $\log 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 10}$

c) $\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \frac{2}{\log_2 3}$

d) $\ell n\, 3 = \log_e 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 e}$

25. a) $\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \frac{0,3}{0,48} = 0,625$

b) $\log_5 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5} = \frac{\log 3}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{\log 3}{1 - \log 2} =$

$= \frac{0,48}{1 - 0,30} = \frac{0,48}{0,70} \simeq 0,686$

c) $\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10}\left(\frac{10}{2}\right)}{\log_{10} 2} =$

$= \frac{\log 10 - \log 2}{\log 2} = \frac{1 - 0,3}{0,3} = \frac{7}{3} = 2,\overline{3}$

d) $\log_3 100 = \frac{\log 100}{\log 3} = \frac{2}{0,48} = 4,1\overline{6}$

e) $\log_4 18 = \frac{\log 18}{\log 4} = \frac{2\log 3 + \log 2}{2\log 2} = 2,1$

f) $\log_{36} 0,5 = \frac{\log 2^{-1}}{\log 6^2} = \frac{-1 \cdot 0,3}{2 \cdot (0,3 + 0,48)} \simeq -0,1923$

26. a) $\frac{1}{2}$

b) $\log_{x^3} y^2 = \frac{\log_y y^2}{\log_y x^3} = \frac{2}{3 \cdot \log_y x} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}$

c) $\log_{\left(\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\log_y\left(\frac{1}{y}\right)}{\log_y\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{-1}{\log_y x^{-1}} = \frac{-1}{-1 \cdot \log_y x} =$

$= \frac{1}{\log_y x} = \frac{1}{2}$

d) $\log_{y^2} x = \frac{\log_y x}{\log_y y^2} = \frac{2}{2} = 1$

27. a) $\log_5 12 = \frac{1}{\log_{12} 5} = \frac{1}{a}$

b) $\log_{25} 12 = \frac{\log_{12} 12}{\log_{12} 25} = \frac{1}{\log_{12} 5^2} = \frac{1}{2 \cdot \log_{12} 5} =$

$= \frac{1}{2 \cdot a} = \frac{1}{2a}$

c) $\log_5 60 = \frac{\log_{12} 60}{\log_{12} 5} = \frac{\log_{12}(12 \cdot 5)}{a} = \frac{1 + \log_{12} 5}{a} =$

$= \frac{1 + a}{a}$

d) $\log_{125} 144 = \frac{\log_{12} 144}{\log_{12} 125} = \frac{2}{\log_{12} 5^3} = \frac{2}{3 \cdot \log_{12} 5} = \frac{2}{3a}$

28. a) $\log_7 3 = \frac{1}{\log_3 7};\ \log_{11} 5 = \frac{1}{\log_5 11};$
assim o produto vale 1.

b) $z = \frac{\log_2 2}{\cancel{\log_2 3}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 3}}{\cancel{\log_2 4}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 4}}{\cancel{\log_2 5}} \cdot \frac{\cancel{\log_2 5}}{\log_2 6} = \frac{1}{\log_2 6} =$

$= \log_6 2$

c) $w = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 \sqrt{2}}{\log_3 25} =$

$= \cancel{\log_3 5} \cdot \frac{3}{2 \cdot \cancel{\log_3 2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \cancel{\log_3 2}}{2 \cdot \cancel{\log_3 5}} = \frac{\frac{3}{2}}{4} = \frac{3}{8}$

d) Observe que:

$\log_5 4 \cdot \log_4 7 \cdot \log_7 11 = \log_5 11$; daí, $t = 5^{\log_5 11} = 11$

29. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

b) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

c) Devemos ter: $x^2 - 9 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

(sinais: $\oplus$ para $x < -3$, $\ominus$ entre -3 e 3, $\oplus$ para $x > 3$)

d) Devemos ter $x^2 + 3 > 0$; como para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x^2 \geqslant 0$, segue que $x^2 + 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $D = \mathbb{R}$.

e) A função **g** está definida se:

$$\begin{cases} -3x + 4 > 0 \\ 0 < x - 1 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ 1 < x \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < \frac{4}{3}$$

Logo: $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{4}{3}\right\}$

30. a) Verdadeira. $f(100) = \log 100 = 2$

b) Verdadeira. $f(x^2) = \log x^2 = 2 \cdot \log x = 2 \cdot f(x)$

c) Falsa. $f(10x) = \log (10x) = \log 10 + \log x = 1 + \log x =$
$= 1 + f(x)$

d) Verdadeira. $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right) + \log x = \log\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) =$
$= \log 1 = 0$

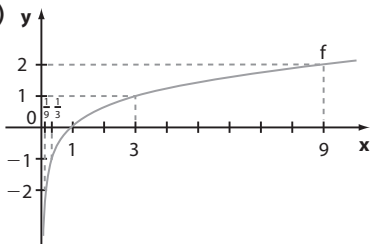
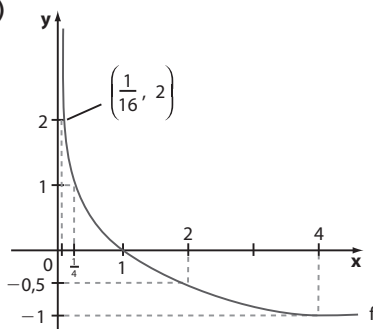
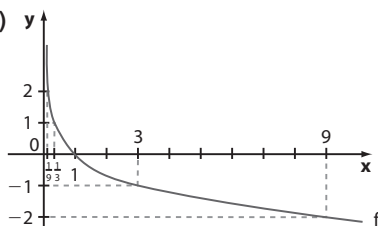
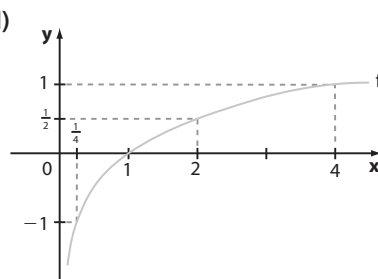
e) Verdadeira. Quando **x** varia de 1 a 10, a taxa média é:

$\frac{f(10) - f(1)}{10 - 1} = \frac{\log 10 - \log 1}{9} = \frac{1 - 0}{9} = \frac{1}{9}$

Quando **x** varia de 10 a 100, a taxa média é:

$\frac{f(100) - f(10)}{100 - 10} = \frac{\log 100 - \log 10}{100 - 10} = \frac{2 - 1}{90} = \frac{1}{90}$

Como $\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{90}} = 10$, a proposição é verdadeira.

31. a)

b)

c)

d)

32. a) Devemos ter $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$D =]-1, +\infty[$

b) $\begin{cases} x = 0 \text{ e } y = 3 \\ x = 1 \text{ e } y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = a + \log_b (0 + 1) \\ 4 = a + \log_b (1 + 1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3 = a + \log_b 1 & \Rightarrow a = 3 \\ 4 = a + \log_b 2 & \Rightarrow 4 - 3 = \log_b 2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$

33. a) $x = 2$, $y = 0$ (2 é raiz de **f**)

$0 = \log_2 (2 + k) \Rightarrow 2^0 = 2 + k \Rightarrow k = -1$;

$y = \log_2 (x - 1)$

b) É preciso determinar a abscissa do ponto **A**:

$y = -1 \Rightarrow -1 = \log_2 (x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-1} = x - 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$

É preciso determinar a ordenada de **B** (e **C**):

$x = 3 \Rightarrow y = \log_2 (3 - 1) = 1$

Assim, $AD = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

$AB = 1 + 1 = 2$; e a área do retângulo ABCD é:

$\left(\frac{3}{2} \cdot 2\right)$ u.a. $= 3$ u.a.

c) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

$f(1001) = \log_2 1\,000 = \frac{\log_{10} 1\,000}{\log_{10} 2} = \frac{3}{0{,}3} = 10$

34. a) $3 > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{4}} 3 < \log_{\frac{1}{4}} 1$; isto é, $\log_{\frac{1}{4}} 3 < 0$

b) $2 > 1 \Rightarrow \log_5 2 > \log_5 1 = 0$; assim, $\log_5 2 > 0$

c) $0{,}2 < 1 \Rightarrow \log 0{,}2 < \log 1 = 0$; assim, $\log 0{,}2 < 0$

d) $\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$; assim, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} > 0$

e) $7 > 1 \Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} 7 < \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0$; assim, $\log_{\frac{2}{3}} 7 < 0$

f) $2 > 1 \Rightarrow \log_e 2 > \log_e 1$, isto é, $\ell n\ 2 > \ell n\ 1 = 0$; assim, $\ell n\ 2 > 0$

São positivos os itens *b*, *d* e *f*.

35. a) $t = 0 \Rightarrow f(0) = 400 + 50 \cdot \log_4 2$

$f(0) = 400 + 50 \cdot \frac{1}{2} = 425$ (425 funcionários)

b) $f(2) = 400 + 50 \cdot \log_4 4 = 450$

$f(6) = 400 + 50 \cdot \log_4 8$

$f(6) = 400 + 50 \cdot \frac{3}{2} = 475$

A diferença $f(6) - f(2)$ é igual a $475 - 450 = 25$ (25 funcionários).

c) Devemos calcular a razão $\frac{f(14) - f(6)}{14 - 6}$.

$f(14) = 400 + 50 \cdot \log_4 16 = 500$

$f(6) = 400 + 50 \cdot \log_4 8 = 475$

Daí, a razão é: $\frac{500 - 475}{14 - 6} = 3{,}125$

(3,125 funcionários/ano)

36.
- Abscissa de **A**: $2 = \ell n\ x \Rightarrow \log_e x = 2 \Rightarrow e^2 = x \overset{\text{tabela}}{\Longrightarrow} x = 7{,}4$
- Ordenada de **B**: $y = \ell n\ 12{,}2 \Rightarrow \log_e 12{,}2 = y \Rightarrow e^y = 12{,}2 \overset{\text{tabela}}{\Longrightarrow} y = 2{,}5$
- Abscissa de **C**: $3 = \ell n\ x \Rightarrow \log_e x = 3 \overset{\text{tabela}}{\Longrightarrow} x = e^3 = 20{,}1$

A base $\overline{AC}$ do triângulo ABC mede

$x_C - x_A = 20{,}1 - 7{,}4 = 12{,}7$

A altura relativa à base $\overline{AC}$ mede $y_B = 2{,}5$

A área do $\triangle ABC$ é: $\frac{12{,}7 \cdot 2{,}5}{2} = \frac{127}{8} \left(\frac{127}{8} \text{ u.a.}\right)$

37. a)
- $f(27) = \log_9 27 = \frac{3}{2}$
- A raiz de **f** é: $\log_9 x = 0 \Rightarrow x = 1$

g é uma função afim cuja reta passa por $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $(1, 0) \Rightarrow g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

b) Do gráfico, vemos que $f(x) > g(x)$ se $x > 1$.

c) $f(3) = \log_9 3 = \frac{1}{2}$

$g(3) = -\frac{3}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} = -3$

A diferença pedida é $\frac{1}{2} - (-3) = \frac{7}{2}$.

38. a) Como a função $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ é decrescente, temos que $4 < 5 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} 4 > \log_{\frac{1}{3}} 5$; assim, o maior número é $\log_{\frac{1}{3}} 4$.

b) Como a função $y = \log_2 x$ é crescente, temos que $\pi^2 > 9 \Leftrightarrow \log_2 \pi^2 > \log_2 9$; assim, o maior número é $\log_2 \pi^2$.

c) Como a função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ é decrescente, temos que $\sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2} > \log_{\frac{1}{2}} 2$; assim, o maior número é $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$.

39. a) $x = \log_3 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 3} = \frac{1}{0{,}48} = 2{,}08\overline{3}$; $S = \{2{,}08\overline{3}\}$

b) $4^x = 3 \Rightarrow \log 4^x = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 4} = \frac{\log 3}{2 \cdot \log 2} = \frac{0{,}48}{0{,}6} = 0{,}8$; $S = \{0{,}8\}$

c) $2^x = 27 \Rightarrow \log 2^x = \log 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\log 27}{\log 2}$ (ou, ainda, $x = \log_2 27$)

$x = \frac{\log 3^3}{\log 2} = \frac{3 \cdot 0{,}48}{0{,}3} = 4{,}8$; $S = \{4{,}8\}$

d) $10^x = 6 \Rightarrow x = \log_{10} 6 = \log (3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}48 + 0{,}3 = 0{,}78$; $S = \{0{,}78\}$

e) $2^x = 5 \Rightarrow \log_2 5 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{\log\left(\frac{10}{2}\right)}{\log 2} = \frac{1 - \log 2}{\log 2} = \frac{1 - 0{,}3}{0{,}3} = \frac{0{,}7}{0{,}3} = 2{,}\overline{3}$; $S = \{2{,}\overline{3}\}$

f) $3^x = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0{,}3}{0{,}48} = 0{,}625$; $S = \{0{,}625\}$

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \log\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \log \frac{1}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1) \cdot \log \frac{1}{2} = \log 3^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + 1) \cdot \log 2^{-1} = -2 \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -(x + 1) \cdot \log 2 = -2 \cdot \log 3 \Rightarrow x + 1 = \frac{2 \log 3}{\log 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1 + \frac{2 \log 3}{\log 2} = -1 + \frac{2 \cdot 0{,}48}{0{,}3} = -1 + 3{,}2 = 2{,}2$; $S = \{2{,}2\}$

h) $2^x = 3 \Rightarrow \log_2 3 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0{,}48}{0{,}3} = 1{,}6$; $S = \{1{,}6\}$

40. Devemos determinar **x** tal que $y = 90$:

$90 = 40 \cdot 1{,}2^x \Rightarrow \frac{9}{4} = 1{,}2^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\left(\frac{9}{4}\right) = \log 1{,}2^x \Rightarrow x = \frac{\log\left(\frac{9}{4}\right)}{\log 1{,}2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\log 9 - \log 4}{\log 12 - \log 10} = \frac{2 \log 3 - 2 \log 2}{\log 3 + \log 2^2 - 1} = \frac{2 \log 3 - 2 \log 2}{\log 3 + 2 \log 2 - 1} = \frac{2 \cdot 0{,}48 - 2 \cdot 0{,}3}{0{,}48 + 2 \cdot 0{,}3 - 1} = \frac{0{,}36}{0{,}08} \Rightarrow x = 4{,}5$ (4,5 anos)

41. a) $v(3) = 2\,000 \cdot 1{,}06^3 = 2\,000 \cdot 1{,}2 = 2\,400$ (2 400 reais)

$v(6) = 2\,000 \cdot 1{,}06^6 = 2\,000 \cdot (1{,}06^3)^2 = 2\,000 \cdot 1{,}2^2 = 2\,880$ (2 880 reais)

b) $v(n) = 4\,000 \Rightarrow 4\,000 = 2\,000 \cdot 1{,}06^n \Rightarrow 2 = 1{,}06^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{1{,}06} 2 = n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = \frac{0{,}3}{0{,}025} = 12$ (12 anos)

$v(n) = 6\,500 \Rightarrow 6\,500 = 2\,000 \cdot 1{,}06^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}06^n = \frac{13}{4} \Rightarrow \log 1{,}06^n = \log\left(\frac{13}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot \log 1{,}06 = \log 13 - \log 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \dfrac{\log 13 - 2 \cdot \log 2}{\log 1{,}06} = \dfrac{1{,}14 - 2 \cdot 0{,}3}{0{,}025} =$

$= \dfrac{0{,}54}{0{,}025} = 21{,}6$ (21,6 anos); o número inteiro mínimo de anos pedido é 22.

42. **a)** $t = 0 \Rightarrow v = 600\,000 \cdot 0{,}9^0 = 600\,000$ (600 000 reais)

b) $v(1) = 600\,000 \cdot 0{,}9^1 = 540\,000$ (540 000 reais)

A perda em reais é dada por $v(0) - v(1) =$
$= 600\,000 - 540\,000 = 60\,000$ (60 000 reais)

c) 1º modo: Analisando a lei, podemos perceber que o valor do imóvel em uma década é 90% do valor desse imóvel na década anterior; assim a desvalorização percentual é de 10%, por década.

2º modo:

$v(t + 1) = 600\,000 \cdot 0{,}9^{t+1} = 600\,000 \cdot 0{,}9^t \cdot 0{,}9^1$

$v(t) - v(t + 1) = 600\,000 \cdot 0{,}9^t - 600\,000 \cdot 0{,}9^t \cdot 0{,}9^1 =$

$= 600\,000 \cdot 0{,}9^t \cdot (1 - 0{,}9) = 600\,000 \cdot 0{,}9^t \cdot 0{,}1$

$\dfrac{v(t) - v(t+1)}{v(t)} = \dfrac{600\,000 \cdot 0{,}9^t \cdot 0{,}1}{600\,000 \cdot 0{,}9^t} = 0{,}1 = 10\%$

d) $450\,000 = 600\,000 \cdot 0{,}9^t \Rightarrow \dfrac{3}{4} = 0{,}9^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \log \dfrac{3}{4} = t \cdot \log 0{,}9 \Rightarrow \log\left(\dfrac{3}{4}\right) = t \cdot \log\left(\dfrac{9}{10}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{\log\left(\dfrac{3}{4}\right)}{\log\left(\dfrac{9}{10}\right)} = \dfrac{\log 3 - 2\log 2}{2 \cdot \log 3 - \log 10} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{0{,}48 - 2 \cdot 0{,}30}{2 \cdot 0{,}48 - 1} = \dfrac{-0{,}12}{-0{,}04} = 3$ (3 décadas, ou seja, 30 anos)

43. **a)** Temos:

$v(0) = 3\,000$ (valor de aquisição) $\Rightarrow p \cdot q^0 = 30\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 30\,000$ *

$v(3) = 21\,870 \overset{*}{\Rightarrow} 21\,870 = 30\,000 \cdot q^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow q^3 = \dfrac{729}{1\,000} \Rightarrow q^3 = \left(\dfrac{9}{10}\right)^3 \Rightarrow q = \dfrac{9}{10} = 0{,}9$

b) A lei é: $v(x) = 30\,000 \cdot 0{,}9^x$; devemos determinar **x** para o qual $v(x) = 10\,000$:

$10\,000 = 30\,000 \cdot 0{,}9^x \Rightarrow \dfrac{1}{3} = 0{,}9^x \Rightarrow \log_{0{,}9} \dfrac{1}{3} = x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{\log\left(\dfrac{1}{3}\right)}{\log\left(\dfrac{9}{10}\right)} = \dfrac{-\log 3}{2\log 3 - 1} = \dfrac{-0{,}4771}{-0{,}0458} \simeq$

$\simeq 10{,}4$ (10,4 anos, ou seja, 10 anos e 5 meses)

44. **a)** $8\,000 = 5\,000 \cdot e^{0{,}02t} \Rightarrow 1{,}6 = e^{0{,}02t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell n\, 1{,}6 = \ell n\, e^{0{,}02t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell n\, 1{,}6 = 0{,}02 \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{\ell n\, 1{,}6}{0{,}02} = \dfrac{\ell n\left(\dfrac{16}{10}\right)}{0{,}02} =$

$= \dfrac{\ell n\, 16 - \ell n\, 10}{0{,}02} = \dfrac{\ell n\, 2^4 - \ell n\,(2 \cdot 5)}{0{,}02} =$

$= \dfrac{4\,\ell n\, 2 - \ell n\, 2 - \ell n\, 5}{0{,}02} = \dfrac{3\,\ell n\, 2 - \ell n\, 5}{0{,}02} =$

$= \dfrac{2{,}07 - 1{,}6}{0{,}02} = \dfrac{0{,}47}{0{,}02} = 23{,}5$ (23,5 anos)

Logo, são necessários 24 anos.

b) $10\,000 = 5\,000 \cdot e^{0{,}02t} \Rightarrow 2 = e^{0{,}02t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell n\, 2 = \ell n\, e^{0{,}02t} \Rightarrow \ell n\, 2 = 0{,}02 \cdot t \Rightarrow \dfrac{0{,}69}{0{,}02} = t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 34{,}5$ (34,5 anos)

Logo, são necessários 35 anos.

45. **a)** $\dfrac{\cancel{P_0}}{2} = \cancel{P_0} \cdot 2^{-b \cdot 29} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = 2^{-29b} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-29b} \Rightarrow b = \dfrac{1}{29}$

b) Devemos determinar **t** tal que $P(t) = \dfrac{P_0}{5}$:

$\dfrac{P_0}{5} = P_0 \cdot 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow \dfrac{1}{5} = 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow \log_2 \dfrac{1}{5} = \log_2 2^{-\frac{1}{29} \cdot t} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\log_2 5 = -\dfrac{1}{29} \cdot t \Rightarrow -(\log_2 10 - 1) = -\dfrac{t}{29} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 3{,}32 = -\dfrac{t}{29} \Rightarrow t = 67{,}28$ (67,28 anos)

46. Seja **y** o número de ratos no município daqui a **x** anos.

Temos:

- daqui a 1 ano: $400\,000 + 0{,}1 \cdot 400\,000 = 1{,}1 \cdot 400\,000$
- daqui a 2 anos: $1{,}1 \cdot 400\,000 + 0{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 400\,000 = 1{,}1^2 \cdot 400\,000$
- daqui a 3 anos: $1{,}1^2 \cdot 400\,000 + 0{,}1 \cdot 1{,}1^2 \cdot 400\,000 = 1{,}1^3 \cdot 400\,000$

$\vdots$

- daqui a **x** anos: $y = 1{,}1^x \cdot 400\,000$

Devemos determinar **x** para o qual $y = 1\,600\,000$:

$1\,600\,000 = 1{,}1^x \cdot 400\,000 \Rightarrow 1{,}1^x = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 1{,}1^x = \log 4 \Rightarrow x = \dfrac{\log 4}{\log 1{,}1} =$

$= \dfrac{2 \cdot \log 2}{\log 11 - \log 10} = \dfrac{2 \cdot 0{,}30}{1{,}04 - 1} = 15$ (15 meses)

47. $t = 30$ anos $\Leftrightarrow M(t) = \dfrac{A}{2}$

$\dfrac{\cancel{A}}{2} = \cancel{A} \cdot (2{,}7)^{30k} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = 2{,}7^{30k} \Rightarrow \log_{2{,}7} \dfrac{1}{2} = 30k \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \dfrac{1}{30} \cdot \log_{2{,}7} \dfrac{1}{2}$

Devemos determinar **t** para o qual $M(t) = \dfrac{A}{10}$.

$\dfrac{\cancel{A}}{10} = \cancel{A} \cdot (2{,}7)^{t \cdot k} \Rightarrow \dfrac{1}{10} = 2{,}7^{t \cdot k} \Rightarrow 10^{-1} = 2{,}7^{t \cdot \left(\frac{1}{30} \cdot \log_{2{,}7} \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{-1} = \left(2{,}7^{\log_{2{,}7} \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{30} \cdot t} \Rightarrow 10^{-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 10^{-1} = \log\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow -1 = \dfrac{t}{30} \cdot \log\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 = \dfrac{t}{30} \cdot (-\log 2) \Rightarrow t = \dfrac{30}{\log 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \dfrac{30}{0{,}3} = 100$ (100 anos)

Alternativa *e*.

Desafio

$N = 20$ bilhões $= 20 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^{10}$

1ª vez: $N_1 = \log N = \log (2 \cdot 10^{10}) = \log 2 + 10 > 10$

2ª vez: $N_2 = \log N_1$; como $N_1 > 10$ (e menor que 11), $\log N_1 > 1$, isto é, $N_2 > 1$

Desafio

x: número de cédulas de R$ 20,00
y: número de cédulas de R$ 50,00
z: número de cédulas de R$ 100,00

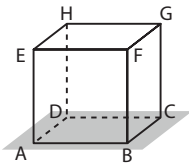
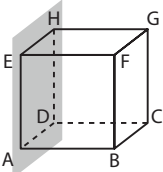
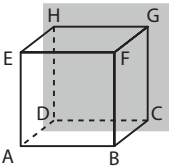
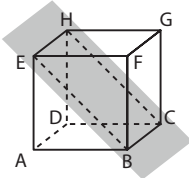
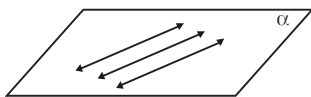
$$\begin{cases} x + \quad y + \quad z = \quad 96 \\ 20x + 50y + 100z = 5\,200 \\ y = \dfrac{x+z}{2}, \text{ pois } (x, y, z) \text{ é P.A.} \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + \quad y + \quad z = \quad 96 \\ 20x + 50y + 100z = 5\,200 \\ x - \quad 2y + \quad z = \quad 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + \quad z = \quad 96 \\ \quad 30y + 80z = 3\,280 \\ -3y \qquad = -96 \end{cases}$$

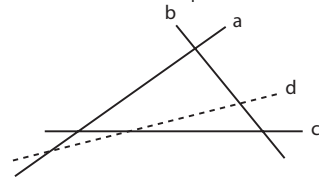
De: $-3y = -96$, temos $y = 32$
Na 2ª equação: $30 \cdot 32 + 80z = 3\,280 \Rightarrow z = 29$
Na 1ª equação: $x = 96 - 32 - 29 = 35$
A P.A. é (35, 32, 29); sua razão é -3.

CAPÍTULO 7 Geometria Espacial de Posição

Exercícios

1. **a)**

b)

c)

d)

2. Um único plano, se as três forem coplanares. (Veja figura abaixo.)

Se não houver um único plano que as contenha, duas a duas elas determinam um único plano. No total, são três planos: imagine que as retas sejam $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_3$. Temos: $\alpha = (r_1, r_2)$, $\beta = (r_1, r_3)$ e $\gamma = (r_2, r_3)$

3. Se os 4 pontos estão em um mesmo plano, determinam um único plano.
Se os 4 pontos não estão em um mesmo plano, agrupando-os de 3 em 3 obtemos 4 planos distintos.
Se os 4 pontos estão em uma mesma reta, existem infinitos planos que os contêm; assim, nenhum deles fica determinado (de maneira única).

4. Sejam **a**, **b**, **c** e **d** as retas. As retas **a**, **b** e **c**, sendo duas a duas concorrentes, são as retas suportes dos lados de um triângulo; portanto, são coplanares. A reta **d**, sendo concorrente com as três anteriores, estará também contida nesse plano.
Logo, é determinado um único plano.

5. Três pontos (representados pelos pés das mesas) não colineares determinam um único plano (o plano do chão), mas quatro pontos podem determinar mais de um plano, "provocando", desse modo, o balanço da mesa.

6. **a)** **V**
b) **V**
c) **V**
d) **V**
e) **F**

7. **a)** α e β; α e γ; α e δ.
b) β e γ (paralelos coincidentes).
β e δ; γ e δ (paralelos distintos).

8. **a)** **F** (A reta pode estar contida no plano.)
b) **V**
c) **V**
d) **F**
e) **V**

9. **a)** Paralelos.
b) Secantes.
c) Secantes.
d) Secantes.
e) Paralelos coincidentes.

10. Vamos apresentar, para cada item, duas respostas possíveis.
a) plano $\underbrace{(CDE)}_{\text{plano do assento}}$ e plano $\underbrace{(GHI)}_{\text{solo}}$; plano (ABC) e plano (EFG).
b) plano $\underbrace{(ABC)}_{\text{plano do encosto}}$ e plano $\underbrace{(CDE)}_{\text{plano do assento}}$. A interseção é $\overleftrightarrow{CD}$;
plano (CDE) e plano (EFG). A interseção é $\overleftrightarrow{EF}$.

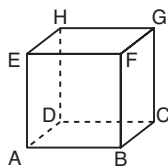
c) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{EG}$ e $\overline{FJ}$.
d) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. O plano determinado por elas é $\underbrace{(ABC)}_{\text{plano do encosto}}$.
$\overline{EF}$ e $\overline{CF}$. O plano determinado por elas é $\underbrace{(CDE)}_{\text{plano do assento}}$.
e) $\overline{AD}$ é secante ao plano (CDE)
O traço de $\overline{AD}$ no plano é o ponto **D**.
$\overline{EG}$ é secante ao plano (GHI)
O traço de $\overline{EG}$ no plano é o ponto **G**.
f) $\overline{AB}$ é paralela ao plano $\underbrace{(CDE)}_{\text{assento}}$.
$\overline{ED}$ é paralela ao plano $\underbrace{(GHI)}_{\text{solo}}$.

11. **a) V**
b) V
c) V
d) F; são secantes.
e) F; a reta é secante ao plano.

12. **a) V**
b) V
c) F, pois, se forem reversas, não haverá plano que as contenha.
d) V
e) F; podem ser reversas.
f) V
g) V
h) V

13. **a)** Concorrentes.
b) Reversas.
c) Paralelas distintas.
d) Secantes.
e) Paralelas.
f) Reversas.

14. **a) V**
b) V
c) F
d) V
e) F
f) V
g) V

15. **a) V**
b) F, pois elas podem ser ortogonais.
c) V
d) F; no cubo ABCDEFGH, as retas $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ são perpendiculares à reta $\overline{EF}$, porém as retas $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ são paralelas entre si.

e) F; no cubo do item anterior, $\overline{AE}$ é perpendicular a $\overline{AD}$; $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{AD}$ e as retas $\overline{AE}$ e $\overline{CD}$ são reversas ortogonais.

16. **a) F**; são paralelas distintas.
b) V
c) V, pois são paralelas distintas.
d) F; são reversas.
e) V

17. **a)** $\overline{AE}$ e $\overline{AB}$ são concorrentes e estão contidas no plano (ABE); $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ são concorrentes e estão contidas no plano (ABC) etc.
b) $\overline{AB}$ // $\overline{EF}$, pois $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ estão contidas no plano (ABE); $\overline{EF}$ // $\overline{GH}$, pois $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ estão contidas no plano (EFG) etc.
c) $\overline{AB} \perp \overline{FG}$, $\overline{DC}$ // $\overline{AB}$ e $\overline{DC} \perp \overline{FG}$.
$\overline{EF} \perp \overline{CG}$, $\overline{AB}$ // $\overline{EF}$ e $\overline{AB} \perp \overline{CG}$ etc.
d) $\overline{AE}$ // plano (BCG), $\overline{AD}$ // plano (BCG), mas $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ são concorrentes; $\overline{AB}$ // plano (EFG), $\overline{BC}$ // plano (EFG), mas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são concorrentes etc.

18. **a) V**
b) V
c) F; a reta pode estar contida no plano.
d) V
e) F; uma reta perpendicular à reta dada pode ser paralela ao plano.
f) V

19. **a)** $\overline{AM}$ é perpendicular aos planos (ABC) e (MNP).
b) $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$, $\overline{DQ}$, $\overline{ER}$ e $\overline{FS}$
c) O plano (CDQ) é paralelo ao plano (AMS).
d) Planos: (MNP), (ABC), (ABM), (CDQ), (AMS) e (EDQ).

20. **a)** A reta **r**.
b) A reta **s**.
c) A reta **t**.
d) 90°

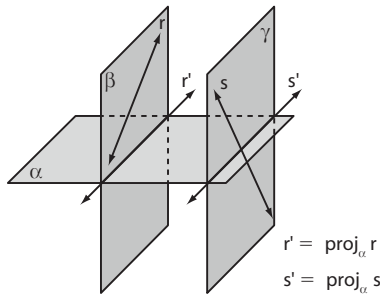
21. **a)** Sim; o traço de $\overline{FG}$ no plano (ABE) é o ponto **F**. Os planos (BFG) e (EFG) contêm $\overline{FG}$, e $\overline{FG}$ é perpendicular ao plano (ABE). Assim, pela definição, os planos (BFG) e (ABE) são perpendiculares, bem como os planos (EFG) e (ABE) também são perpendiculares.
b) Sim; observe, por exemplo, que o plano (ABC) contém a reta $\overline{BC}$, que é perpendicular ao plano (CDG).
O traço de um no outro é a reta $\overline{CD}$.
c) Sim; o plano (BDF) contém a reta $\overline{DH}$, que é perpendicular ao plano (ABC). Logo, os planos são perpendiculares.
O traço é a reta $\overline{BD}$.

22. **a) F**; os planos podem ser oblíquos.
b) V
c) F; uma reta de um plano pode ser paralela ao outro plano.
d) F; são infinitos planos.

e) **F**; os planos podem ser paralelos.
f) **F**; os planos podem ser perpendiculares.
g) **V**

23. a) Planos: (ABC), (EFG), (CDI), (EFK).
b) Sim; reta $\overleftrightarrow{EF}$; oblíquos.
c) Secantes.

24. a) **V**
b) **F**; a projeção pode ser um ponto.
c) **F**; a projeção pode ser um ponto.
d) **V**
e) **F**; se um deles for perpendicular ao plano, sua projeção é um ponto.
f) **V**
g) **F**

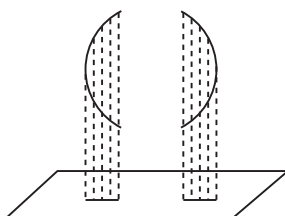
25. a) **F**; elas podem estar em planos paralelos e ser reversas.

b) **V**
c) **V**
d) **F**; os "lados" de um ângulo são semirretas.
e) **V**

26. a) 3 cm
b) 7 cm
c) 2 cm
d) 7 cm
e) 3 cm
f) 3 cm
g) 7 cm

Desafio

No movimento de subida e descida, as extremidades **A** e **B** realizam trajetórias de arcos de circunferência.
O centro de cada uma dessas circunferências é o pivô-ponto central da gangorra. Ao projetarmos essas trajetórias ortogonalmente sobre o plano do chão, obtemos dois segmentos de reta, como é mostrado a seguir:

Alternativa *b*.

CAPÍTULO 8 Poliedros

Exercícios

1. a) $a = 2{,}5\text{ cm} = \frac{5}{2}\text{ cm}$

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$

$A_t = 6 \cdot a^2 = 6 \cdot (2{,}5)^2 \Rightarrow A_t = 37{,}5\text{ cm}^2$

$V = a^3 = (2{,}5\text{ cm})^3 = 15{,}625\text{ cm}^3$

b) $a = b = 2\text{ cm};\ c = 2{,}5\text{ cm}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2{,}5^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{57}}{2}\text{ cm}$

$\left.\begin{array}{l} A_b = a \cdot b \Rightarrow A_b = (2\text{ cm}) \cdot (2\text{ cm}) = 4\text{ cm}^2 \\ A_\ell = 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot (2\text{ cm}) \cdot (2{,}5)\text{ cm} = 20\text{ cm}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 8\text{ cm}^2 + 20\text{ cm}^2 = 28\text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot c \Rightarrow V = (4\text{ cm}^2) \cdot (2{,}5\text{ cm}) = 10\text{ cm}^3$

c) $a = 3\text{ cm};\ b = 1{,}5\text{ cm};\ c = 2\text{ cm}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow d = \sqrt{3^2 + 1{,}5^2 + 2^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{61}}{2}\text{ cm}$

$A_b = a \cdot b \Rightarrow A_b = (3\text{ cm}) \cdot (1{,}5\text{ cm}) = 4{,}5\text{ cm}^2$

$A_\ell = 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 2 \cdot (3\text{ cm}) \cdot (2\text{ cm}) + 2 \cdot (1{,}5\text{ cm}) \cdot (2\text{ cm}) =$
$= 18\text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 2 \cdot 4{,}5\text{ cm}^2 + 18\text{ cm}^2 = 27\text{ cm}^2$

$V = a \cdot b \cdot c = A_b \cdot c \Rightarrow V = (4{,}5\text{ cm}^2) \cdot (2\text{ cm}) = 9\text{ cm}^3$

2. $a = 4\text{ dm};\ b = 7\text{ dm};\ d = 3\sqrt{10}\text{ dm}$

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow \left(3\sqrt{10}\right)^2 = 4^2 + 7^2 + c^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 5\text{ dm}$

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V = (4\text{ dm}) \cdot (7\text{ dm}) \cdot (5\text{ dm}) = 140\text{ dm}^3$

3. $12 \cdot a = 48\text{ cm} \Rightarrow a = 4\text{ cm}$

$d = a\sqrt{3} \Rightarrow d = 4\sqrt{3}\text{ cm}$

$A_t = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot (4\text{ cm})^2 = 96\text{ cm}^2$

$V = a^3 \Rightarrow V = (4\text{ cm})^3 = 64\text{ cm}^3$

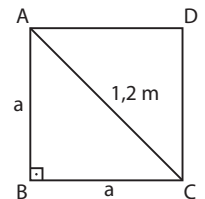
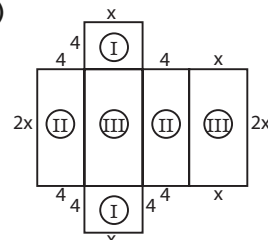
4. $\triangle ABC$ retângulo

$a^2 + a^2 = (1{,}2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{72}{100} \Rightarrow a = 0{,}6\sqrt{2}\text{ m}$

$A_t = 6 \cdot a^2 \Rightarrow A_t = 6 \cdot \frac{72}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 4{,}32\text{ m}^2$

$V = a^3 \Rightarrow V = \left(0{,}6\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow V = 0{,}432\sqrt{2}\text{ m}^3$

5. a)

$A_t = 364\text{ cm}^2 \Rightarrow 2 \cdot A_I + 2 \cdot A_{II} + 2 \cdot A_{III} = 364\text{ cm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \cdot 4x + 2 \cdot 4 \cdot 2x + 2 \cdot x \cdot 2x = 364 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 6x - 91 = 0 \Rightarrow x = 7\text{ cm}$

b) $x = 4\text{ cm}$
$V = x \cdot 2x \cdot 4 \Rightarrow V = (4\text{ cm}) \cdot (8\text{ cm}) \cdot (4\text{ cm}) = 128\text{ cm}^3$

c) $x = 6\text{ cm}$
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + x^2 + (2x)^2 = 5x^2 + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow d^2 = 5 \cdot 6^2 + 16 \Rightarrow d = 14\text{ cm}$

6. $\begin{cases} \textbf{a}, \textbf{b}, \textbf{c}\text{: medidas das dimensões do paralelepípedo (em cm)} \\ \text{Volume do paralelepípedo: } V = 192\text{ cm}^3 \end{cases}$

$V = a \cdot b \cdot c \Rightarrow abc = 192\text{ cm}^3$ (*)
Considerando $a \cdot b = 32\text{ cm}^2$ e $a \cdot c = 24\text{ cm}^2$, temos, de (*):

$$\left.\begin{matrix} 32 \cdot c = 192\text{ cm} \Rightarrow c = 6\text{ cm} \\ 24 \cdot b = 192\text{ cm} \Rightarrow b = 8\text{ cm} \end{matrix}\right\} \Rightarrow b \cdot c = 48\text{ cm}^2$$

A_t: área total do paralelepípedo
$A_t = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 64\text{ cm}^2 + 48\text{ cm}^2 + 96\text{ cm}^2 = 208\text{ cm}^2$

7. **V_p**: volume do paralelepípedo
$V_p = (20\text{ cm}) \cdot (30\text{ cm}) \cdot (45\text{ cm}) = 27\,000\text{ cm}^3$
V_c: volume do cubo de x cm de aresta $\Rightarrow V_c = x^3\text{ cm}^3$

a) Como $V_c = V_p$, temos $x^3 = 27\,000\text{ cm}^3 \Rightarrow x = 30\text{ cm}$

b) $d = x\sqrt{3} \Rightarrow d = 30\sqrt{3}\text{ cm}$

c) Área total do paralelepípedo:
$A_{Tp} = 2 \cdot 20 \cdot 30 + 2 \cdot 20 \cdot 45 + 2 \cdot 30 \cdot 45 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{Tp} = 5\,700\text{ cm}^2$
Área total do cubo:
$A_{Tc} = 6 \cdot 30^2 \Rightarrow A_{Tc} = 5\,400\text{ cm}^2$
Assim, $\dfrac{A_{Tp}}{A_{Tc}} = \dfrac{5\,700\text{ cm}^2}{5\,400\text{ cm}^2} = \dfrac{19}{18}$

8. **a)**
$$\left.\begin{matrix} A_t = 6a^2 \\ A'_t = 6 \cdot (2a)^2 = 4 \cdot (6a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'_t = 4 \cdot A_t$$
$$\left.\begin{matrix} V = a^3 \\ V' = (2a)^3 = 8a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V' = 8 \cdot V$$

b)
$$\left.\begin{matrix} A_t = 6 \cdot a^2 \\ A'_t = 6\left(\dfrac{1}{3}a\right)^2 = \dfrac{1}{9} \cdot (6a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'_t = \dfrac{1}{9} \cdot A_t$$
$$\left.\begin{matrix} V = a^3 \\ V' = \left(\dfrac{1}{3}a\right)^3 = \dfrac{1}{27} \cdot a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V' = \dfrac{1}{27} \cdot V$$

c)
$$\left.\begin{matrix} A_t = 6a^2 \\ A'_t = 6\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(6a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'_t = \dfrac{1}{4} A_t$$
$$\left.\begin{matrix} V = a^3 \\ V' = \left(\dfrac{a}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8} \cdot a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V' = \dfrac{1}{8} \cdot V$$

d)
$$\left.\begin{matrix} A_t = 6a^2 \\ A'_t = 6(ka)^2 = k^2 \cdot (6a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'_t = k^2 \cdot A_t$$
$$\left.\begin{matrix} V = a^3 \\ V' = (ka)^3 = k^3 \cdot a^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V' = k^3 \cdot V$$

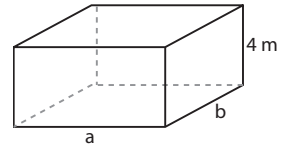
9. Reservatório original: $\begin{cases} \text{medida da aresta da base: } x\text{ dm} \\ \text{medida da altura: } h_1 = 8\text{ dm} \\ \text{volume: } V_1 = 8x^2\text{ dm}^3 \end{cases}$

Novo reservatório:
$$\begin{cases} \text{medida da aresta da base: } (x + 0{,}2x)\text{ dm} = 1{,}2x\text{ dm} \\ \text{medida da altura: } h_2 = (8 + 0{,}2 \cdot 8)\text{ dm} = 9{,}6\text{ dm} \\ V_2 = (1{,}2x)^2 \cdot 9{,}6\text{ dm}^3 = 13{,}824\,x^2\text{ dm}^3 \end{cases}$$
Como 1 L = 1 dm³ e $V_2 = 3\,110{,}4$ L, então $V_2 = 3\,110{,}4\text{ dm}^3$
Logo: $13{,}824x^2 = 3\,110{,}4 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x = 15$

10. $h = 4$ m; $2a + 2b = 40\text{ m} \Rightarrow a + b = 20$ m

$$\left.\begin{matrix} V = A_b \cdot h = a \cdot b \cdot 4 \\ V = 384\,000\text{ L} = 384\text{ m}^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$
$\Rightarrow 4ab = 384 \Rightarrow ab = 96$

4 m
b
a

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ ab = 96 \end{cases} \Rightarrow a = 12\text{ m e } b = 8\text{ m}$$

11. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{15}{6} \Rightarrow x = 5\text{ m e } y = 10\text{ m}$

a) $A_t = 2 \cdot (5 \cdot 10) + 2 \cdot (5 \cdot 15) + 2 \cdot (10 \cdot 15) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 550\text{ m}^2$

b) $V_1 = (2\text{ m}) \cdot (4\text{ m}) \cdot (6\text{ m}) = 48\text{ m}^3$
$V_2 = (5\text{ m}) \cdot (10\text{ m}) \cdot (15\text{ m}) = 750\text{ m}^3$
Porcentagem de acréscimo:
$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{750 - 48}{48} = 14{,}625 = 1\,462{,}5\%$$

12. Considerando a P.A. $(x - 3, x, x + 3)$, as medidas das arestas do paralelepípedo são: $a = (x - 3)$ cm, $b = x$ cm e $c = (x + 3)$ cm.
$A_t = 846\text{ cm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x \cdot (x - 3) + 2 \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) + 2x \cdot (x + 3) = 846 \underset{x>0}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow x = 12\text{ cm}$
Assim, obtemos: $a = 9$ cm, $b = 12$ cm e $c = 15$ cm

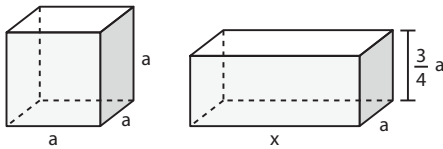
a) Medida da diagonal:
$d = \sqrt{9^2 + 12^2 + 15^2} \Rightarrow d = 15\sqrt{2}\text{ cm}$

b) Volume:
$V = (9 \cdot 12 \cdot 15)\text{ cm}^3 \Rightarrow V = 1\,620\text{ cm}^3$

13. 1 bloco $\begin{cases} \text{medidas das arestas das bases:} \\ a = 12\text{ cm e } b = 21\text{ cm} \\ \text{altura: } h = \dfrac{1}{11}(2a + 2b) \Rightarrow \\ \Rightarrow h = \dfrac{24 + 42}{11} \Rightarrow h = 6\text{ cm} \end{cases}$

V: volume de 1 bloco
$V = a \cdot b \cdot h \Rightarrow V = 12 \cdot 21 \cdot 6 \Rightarrow V = 1\,512\text{ cm}^3$
V_1: volume de 1 cubinho de 3 cm de aresta
$V_1 = (3\text{ cm})^3 = 27\text{ cm}^3$
n: número de cubinhos de 1 bloco $\Rightarrow n = \dfrac{V}{V_1} = \dfrac{1\,512}{27} = 56$
C: custo dos 20 blocos $\Rightarrow C = 20 \cdot 15$ reais $= 300$ reais
P: preço de venda dos $(20 \cdot 56)$ cubinhos $=$
$= 1\,120$ cubinhos
$P = 1\,120 \cdot 0{,}80$ reais $= 896$ reais
L: lucro obtido $\Rightarrow L = P - C = 896 - 300 \Rightarrow L =$ R$ 596,00

14. **a**: medida da aresta do cubo.

x, **a** e $\frac{3}{4}$a: medidas das arestas do paralelepípedo.

$\begin{cases} \mathbf{V_1}\text{: volume do cubo} \Rightarrow V_1 = a^3 \\ \mathbf{V_2}\text{: volume do paralelepípedo} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_2 = x \cdot a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3}{4} \cdot xa^2 \end{cases}$

$V_1 = V_2 \Rightarrow a^3 = \frac{3}{4} \cdot xa^2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}a$ (1)

$\begin{cases} \mathbf{A_1}\text{: área total do cubo} \Rightarrow A_1 = 6a^2 \\ \mathbf{A_2}\text{: área total do paralelepípedo} \Rightarrow \\ \Rightarrow A_2 = 2(x \cdot a) + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}a \cdot a\right) + 2 \cdot \left(x \cdot \frac{3}{4}a\right) \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow A_2 = \frac{8}{3}a^2 + \frac{3}{2}a^2 + 2a^2 \Rightarrow A_2 = \frac{37}{6}a^2$

(1)

Logo: $A_2 - A_1 = \frac{37}{6}a^2 - 6a^2 = \frac{a^2}{6}$

Alternativa *a*.

15. Dimensões das paredes internas do vaso:

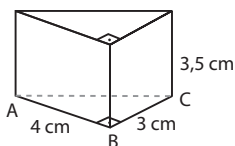
Base: a = 11 cm − 1 cm = 10 cm;
b = 12 cm − 1 cm = 11 cm

Altura: h = 24 cm − 0,5 cm = 23,5 cm

a) $V = a \cdot b \cdot h = (10\text{ cm}) \cdot (11\text{ cm}) \cdot (23,5\text{ cm}) =$
$= 2\,585\text{ cm}^3 = 2,585\text{ L}$

b) **V'**: volume do vidro

$V' = (12\text{ cm}) \cdot (11\text{ cm}) \cdot (24\text{ cm}) - V \Rightarrow$
$\Rightarrow V' = 3\,168\text{ cm}^3 - 2\,585\text{ cm}^3 = 583\text{ cm}^3$

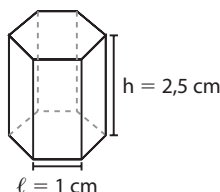
16. **a)** Prisma reto triangular

$\triangle ABC$ retângulo $\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow AC = 5\text{ cm}$

$A_\ell = 4 \cdot 3,5 + 3 \cdot 3,5 + 5 \cdot 3,5 \Rightarrow A_\ell = 42\text{ cm}^2$

$A_b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow A_b = 6\text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 2 \cdot 6 + 42 \Rightarrow A_t = 54\text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 6 \cdot 3,5 \Rightarrow V = 21\text{ cm}^3$

b) Prisma regular hexagonal

$A_\ell = 6 \cdot (1 \cdot 2,5) \Rightarrow A_\ell = 15\text{ cm}^2$

A_b é a área do hexágono regular de lado ℓ de medida igual a 1 cm.

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$

$A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b \Rightarrow A_t = 15 + 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 3(5 + \sqrt{3})\text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2,5 \Rightarrow V = \frac{15\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^3$

c) Prisma oblíquo de base quadrada

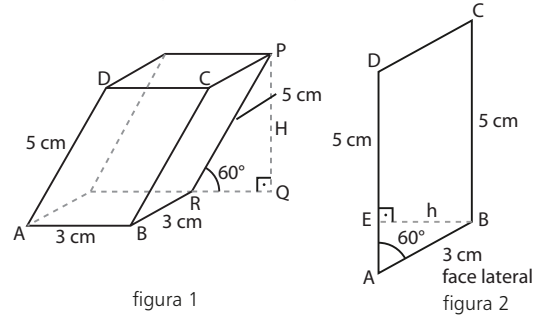



Figura 2:

$\triangle AEB$ retângulo $\Rightarrow \text{sen } 60° = \frac{h}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$

$A_\ell = 4 \cdot (AD \cdot h) \Rightarrow A_\ell = 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_\ell = 30\sqrt{3}\text{ cm}^2$

Figura 1:

$A_b = 3 \cdot 3 \Rightarrow A_b = 9\text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = (18 + 30\sqrt{3})\text{ cm}^2 =$
$= 6(3 + 5\sqrt{3})\text{ cm}^2$

Figura 1:

$\triangle PQR$ retângulo $\Rightarrow \text{sen } 60° = \frac{H}{5} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow H = \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{ cm}$

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 9 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{45\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^3$

17. $3\ell = 12\text{ dm} \Rightarrow \ell = 4\text{ dm}$

$\triangle AMC$ retângulo:

$h^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}\text{ dm}$

H: altura do prisma

$H = 2h \Rightarrow H = 4\sqrt{3}\text{ dm}$

$A_b = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot h \Rightarrow A_b = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow A_b = 4\sqrt{3}\text{ dm}^2$

$A_\ell = 3 \cdot (\ell \cdot H) \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = 48\sqrt{3}\text{ dm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 8\sqrt{3} + 48\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 56\sqrt{3}\text{ dm}^2$

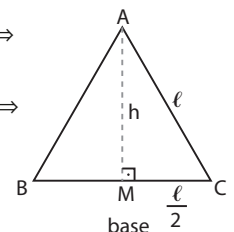
$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = (4\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3}) \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 48\text{ dm}^3$

18. **a)**

figura 1

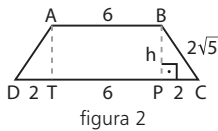



figura 2

Na figura 2 (base do prisma):

$\triangle$BPC retângulo:

$h^2 + 4 = 20 \Rightarrow h = 4$ cm

$A_b = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h \Rightarrow A_b = \frac{1}{2}(6 + 10) \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b = 32$ cm^2

Logo: $V = A_b \cdot H \Rightarrow V = (32 \text{ cm}^2) \cdot (12 \text{ cm}) = 384 \text{ cm}^3$

b) $A_\ell = 2 \cdot A_{②} + A_{③} + A_{④} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 12 + 10 \cdot 12 + 6 \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 48(4 + \sqrt{5})$ cm^2

Logo: $\frac{A_b}{A_\ell} = \frac{32}{48(4 + \sqrt{5})} \Rightarrow \frac{A_b}{A_\ell} = \frac{8 - 2\sqrt{5}}{33}$

19. $H = 8$ cm

$\overline{BD}$: diagonal do quadrado ABCD

$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 6\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 6$ cm

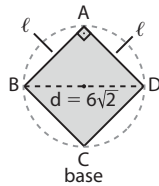
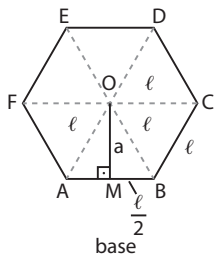
$A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = (6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2$

$A_\ell = 4 \cdot \ell \cdot H \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 4 \cdot (6 \text{ cm}) \cdot (8 \text{ cm}) = 192 \text{ cm}^2$

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 72 \text{ cm}^2 + 192 \text{ cm}^2 = 264 \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 36 \cdot 8 \Rightarrow V = 288 \text{ cm}^3$

20. $H = 20$ dm; $a = 6\sqrt{3}$ dm

$\triangle$AOB equilátero $\Rightarrow$ **M** ponto médio de $\overline{AB}$

$MB = \frac{\ell}{2}$

$\triangle$OMB retângulo:

$\ell^2 = a^2 + \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow \frac{3\ell^2}{4} = (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow \ell = 12$ dm

$A_b = 6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot a\right) \Rightarrow A_b = 3 \cdot 12 \cdot 6\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b = 216\sqrt{3}$ dm^2

$A_\ell = 6 \cdot \ell \cdot H \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot 12 \cdot 20 \Rightarrow A_\ell = 1\,440$ dm^2

$A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 432\sqrt{3} \text{ dm}^2 + 1\,440 \text{ dm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 144(10 + 3\sqrt{3})$ dm^2

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = (216\sqrt{3}) \cdot 20 \Rightarrow V = 4\,320\sqrt{3}$ dm^3

21. $H = 4$ cm (medida da altura do porta-joias)

$x = 3$ cm (medida da aresta da base do porta-joias)

$A_\ell = 7 \cdot (x \cdot H) \Rightarrow A_\ell = 7 \cdot (3 \text{ cm}) \cdot (4 \text{ cm}) = 84 \text{ cm}^2$

Logo, a quantia adicional é $84 \cdot$ R\$ 0,15 = R\$ 12,60.

22. $V = 192\sqrt{3}$ m^3; $A_\ell = 192$ m^2

ℓ: medida da aresta da base

H: medida da altura do prisma

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \ell^2$

$A_\ell = 6 \cdot \ell \cdot H = 192 \Rightarrow \ell \cdot H = 32$ m^2 (*)

$V = A_b \cdot H = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \ell^2 \cdot H = 192\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 \cdot H = 128 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell(\ell H) = 128 \overset{*}{\Rightarrow} \ell \cdot 32 = 128 \Rightarrow \ell = 4$ m

Assim: $\ell \cdot H = 32 \text{ m}^2 \Rightarrow (4 \text{ m}) \cdot H = 32 \text{ m}^2 \Rightarrow H = 8$ m

23. ℓ: medida da aresta da base ($\triangle$ equilátero)

h: medida da altura da base

H: medida da altura do prisma

$2p = 12 \text{ dm} \Rightarrow 3\ell = 12 \text{ dm} \Rightarrow \ell = 4$ dm

$A_b = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 4\sqrt{3}$ dm^2

$H = \frac{5}{2} \cdot h \Rightarrow H = \frac{5}{2} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{4} \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow H = 5\sqrt{3}$ dm

$A_\ell = 3 \cdot \ell \cdot H \Rightarrow A_\ell = 3 \cdot 4 \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow A_\ell = 60\sqrt{3}$ dm^2

a) $A_t = 2 \cdot A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = (8\sqrt{3} + 60\sqrt{3}) \text{ dm}^2 = 68\sqrt{3} \text{ dm}^2$

b) $V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow V = 60$ dm^3

24. Base: é um hexágono regular de lado de medida igual a ℓ cm.

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

$H = 18$ cm

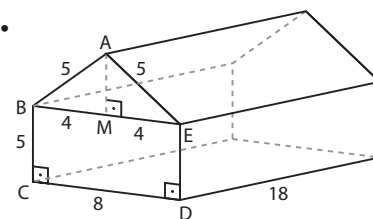
$A_\ell = 6(\ell \cdot H) \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot 18\ell = 108\ell$

$\frac{A_b}{A_\ell} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2}\right) \cdot 3 = 108\ell \Rightarrow \ell = 8\sqrt{3}$ cm

Assim: $A_\ell = 108 \cdot 8\sqrt{3} \text{ cm}^2 = 864\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{3 \cdot (8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 5\,184\sqrt{3}$ cm^3

25.

$\triangle$ABE isósceles $\Rightarrow$ **M** é ponto médio de $\overline{BE} \Rightarrow ME = 4$ m

$\triangle$AME retângulo $\Rightarrow AM^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow h = AM = 3$ m

Assim: $A_{ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AM \Rightarrow A_{ABE} = \frac{1}{2}(8 \text{ m}) \cdot (3 \text{ m}) =$

$= 12$ m^2

$A_{BCDE} = CD \cdot BC \Rightarrow A_{BCDE} = (8 \text{ m}) \cdot (5 \text{ m}) = 40 \text{ m}^2$

$A_b = A_{ABE} + A_{BCDE} = 52$ m^2

$H = 18$ m

Logo: $V = A_b \cdot H \Rightarrow V = 52 \cdot 18 \Rightarrow V = 936$ m^3

26. a) 5 faces: 1 base + 4 faces laterais $\Rightarrow$ pirâmide quadrangular

b) 10 faces: 1 base + 9 faces laterais $\Rightarrow$ pirâmide eneagonal

c) 6 arestas: 3 da base + 3 laterais $\Rightarrow$ pirâmide triangular

d) 16 arestas: 8 da base + 8 laterais $\Rightarrow$ pirâmide octogonal

27. Base: polígono convexo de 11 lados.
Temos:
- 11 vértices do polígono da base + 1 vértice da pirâmide = 12 vértices
- 11 arestas da base + 11 arestas laterais = 22 arestas
- 11 faces laterais + 1 base = 12 faces

28. a) n = número de lados do polígono da base = número de faces laterais

S_1: soma dos ângulos do polígono da base

$S_1 = (n - 2) \cdot 180°$

S_2: soma dos ângulos dos triângulos das faces laterais

$S_2 = n \cdot 180°$

$S_1 + S_2 = 20 \cdot 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow (n - 2) \cdot 180° + n \cdot 180° = 20 \cdot 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 6$

Logo, a pirâmide é hexagonal.

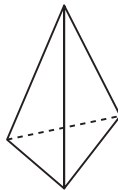
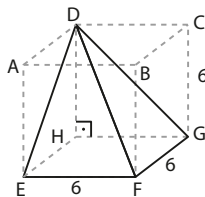
b) Da mesma forma que o item anterior, temos:

$S_1 + S_2 = 56 \cdot 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow (n - 2) \cdot 180° + n \cdot 180° = 56 \cdot 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 15$

Logo, a pirâmide é pentadecagonal.

29. A planificação dada corresponde a uma pirâmide de base triangular. São 4 vértices (o da pirâmide e os 3 da base), 6 arestas e 4 faces.

30. a) Vértice **D** e base EFGH.

$A_b = (6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2$

$DH = h = 6 \text{ cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} (36 \text{ cm}^2) \cdot (6 \text{ cm}) \Rightarrow$

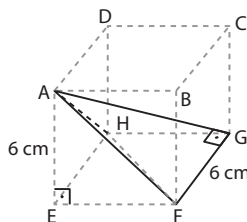
$\Rightarrow V = 72 \text{ cm}^3$

b) Vértice **A** e base FGH.

$\triangle$FGH retângulo isósceles

$A_{FGH} = \frac{1}{2} \cdot FG \cdot GH \Rightarrow A_{FGH} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{FGH} = 18 \text{ cm}^2$

$AE = h = 6 \text{ cm}$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{FGH} \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 \Rightarrow V = 36 \text{ cm}^3$

31. H = 6 cm; ℓ: medida da aresta da base

$2p = 4\ell = 8 \text{ cm} \Rightarrow \ell = 2 \text{ cm}$

$A_b = \ell^2 \Rightarrow A_b = (2 \text{ cm})^2 \Rightarrow A_b = 4 \text{ cm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} (4 \text{ cm}^2) \cdot (6 \text{ cm}) = 8 \text{ cm}^3$

32. Base é um losango, em que d = 6 m e D = 10 m.

$$\left.\begin{array}{l} H = 12 \text{ m} \\ A_b = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow A_b = \frac{1}{2} \cdot (10 \text{ m}) \cdot (6 \text{ m}) = 30 \text{ m}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (30 \text{ m}^2) \cdot (12 \text{ m}) = 120 \text{ m}^3$

33. Base do tetraedro é um triângulo equilátero de lado de medida igual a ℓ cm.

$2p = 12 \text{ cm} \Rightarrow 3\ell = 12 \text{ cm} \Rightarrow \ell = 4 \text{ cm}$

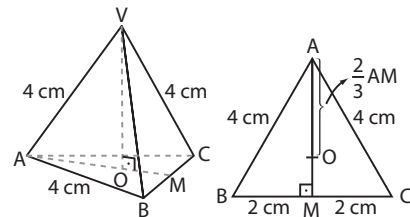



figura 1 figura 2

a) Como todas as faces do tetraedro são triângulos equiláteros congruentes, temos:

$A_t = \cancel{4} \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{\cancel{4}}\right) \Rightarrow A_t = (4 \text{ cm})^2 \cdot \sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b) H = VO = ?

Figura 1: $\triangle$VOA retângulo

$VO^2 + AO^2 = (4 \text{ cm})^2 = 16 \text{ cm}^2$ (1)

Figura 2: $\triangle$ABC equilátero

$AO = \frac{2}{3} \cdot AM \Rightarrow AO = \frac{2}{3}\left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\ell\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos:

$H^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow H = \frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}$

c) $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left(4\sqrt{3} \text{ cm}\right) \cdot \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} \text{ cm}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \frac{16\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$

34. Base é um hexágono regular de 4 cm de lado.

$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = 6 \cdot \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Figura 1:

$\triangle$VBC isósceles de altura $VM = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

$\triangle$VOM retângulo $\Rightarrow h^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = (4\sqrt{6})^2 - OM^2$ (*)

$\overline{OM}$: altura do triângulo equilátero OBC

$OM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM = \frac{4\sqrt{3}}{2} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$ (**)

Substituindo (**) em (*), temos:

$h^2 = 96 - 12 \Rightarrow h = 2\sqrt{21} \text{ cm}$

Logo: $V = \frac{1}{3}\left(24\sqrt{3}\right) \cdot \left(2\sqrt{21}\right) \Rightarrow V = 48\sqrt{7}\ \text{cm}^3$

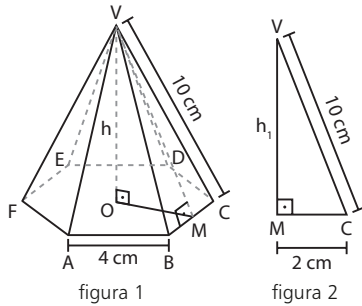



figura 1 figura 2

Figura 2:

$\triangle VMC$ retângulo $\Rightarrow VM^2 + 4 = 100 \Rightarrow VM = 4\sqrt{6}$ cm

$A_{VBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot VM \Rightarrow A_{VBC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{VBC} = 8\sqrt{6}\ \text{cm}^2$

Logo:

$A_\ell = 6 \cdot A_{VBC} \Rightarrow A_\ell = 48\sqrt{6}\ \text{cm}^2$

$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = \left(24\sqrt{3} + 48\sqrt{6}\right)\ \text{cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 24\sqrt{3}\left(1 + 2\sqrt{2}\right)\ \text{cm}^2$

35. $H = 8$ m; $a = 2\sqrt{3}$ m

a: medida da altura do triângulo equilátero de lado de medida ℓ cm

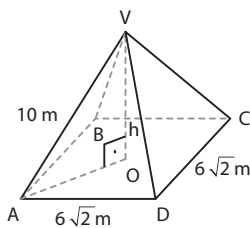
$a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,\text{m} \Rightarrow \ell = 4$ m

$\mathbf{A_1}$: área do triângulo equilátero de lado de medida $\ell = 4$ m

$A_1 = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_1 = 4\sqrt{3}\ \text{m}^2$

$A_b = 6 \cdot A_1 \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}\ \text{m}^2$

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 8 \Rightarrow V = 64\sqrt{3}\ \text{m}^3$

36. Na figura, temos:

$AO = \frac{AC}{2} = \frac{AD\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = 6$ cm

$\triangle VOA$ retângulo $\Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h = 8$ cm

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 192\ \text{cm}^3$

37. ℓ: medida da aresta da base

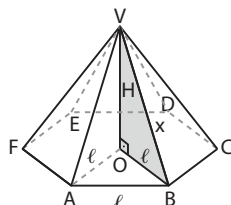
$6\ell = 24$ cm $\Rightarrow \ell = 4$ cm

x: medida da aresta lateral

$6x = 30$ cm $\Rightarrow x = 5$ cm

$\triangle AOB$ equilátero

$A_{AOB} = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{AOB} = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{AOB} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

$A_b = 6 \cdot A_{AOB} \Rightarrow A_b = 24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

$\triangle VOB$ retângulo $\Rightarrow H^2 + \ell^2 = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H^2 = 25\ \text{cm}^2 - 16\ \text{cm}^2 \Rightarrow H = 3$ cm

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(24\sqrt{3}\right) \cdot 3 \Rightarrow V = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

38. $\ell = 6$ cm

$A_b = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_b = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

H: medida da altura do tetraedro

$H = \frac{\ell\sqrt{6}}{3} \Rightarrow H = \frac{6\sqrt{6}}{3} \Rightarrow H = 2\sqrt{6}$ cm

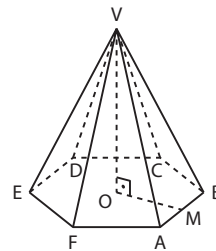
$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(9\sqrt{3}\right) \cdot \left(2\sqrt{6}\right) \xRightarrow[\sqrt{2} \simeq 1,4]{}$

$\Rightarrow V = 25,2\ \text{cm}^3$

volume (cm^3)		massa (g)
1	———	2,6
25,2	———	x

$\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 25,2 \cdot 2,6$ g $= 65,52$ g

39. $\begin{cases} \ell\text{: medida do lado da base da pirâmide} \\ VO\text{: medida da altura da pirâmide; } VO = \ell \end{cases}$

M: ponto médio de $\overline{AB}$

VM: medida da altura do triângulo isósceles VAB; VM = h

OM: medida da altura do triângulo equilátero AOB

$OM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$\triangle VOM$ retângulo $\Rightarrow VO^2 + OM^2 = VM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell^2 + \frac{3\ell^2}{4} = h^2 \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{7}}{2}$

Assim, temos:

$$\begin{cases} A_{lateral} = 6 \cdot A_{VAB} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{7}}{2}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{7}}{2} & (1) \\ A_{base} = 6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

Como $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot VO \Rightarrow V = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^3$, temos:

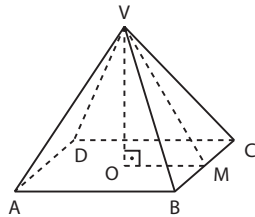
$\frac{1}{3} \cdot \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \ell = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^3 \Rightarrow \ell = 2$ cm

Substituindo $\ell = 2$ cm em (1) e (2), obtêm-se:

$A_\ell = 6\sqrt{7}\ \text{cm}^2$ e $A_b = 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \Rightarrow A_t = \left(6\sqrt{7} + 6\sqrt{3}\right) =$

$= 6\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)\ \text{cm}^2$

Alternativa *b*.

40. $\begin{cases} \text{VO: medida da altura da pirâmide; } VO = h \\ \text{OM: medida do apótema da base; } OM = 6 \text{ cm} \\ \text{VM: medida do apótema da pirâmide; } VM = 6\sqrt{2} \text{ cm} \end{cases}$ *

$\triangle VOM$ retângulo $\Rightarrow VO^2 = VM^2 - OM^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = (6\sqrt{2} \text{ cm})^2 - (6 \text{ cm})^2 = 36 \text{ cm}^2 \Rightarrow h = 6 \text{ cm}$

$OM = \frac{1}{2} \cdot AB \Rightarrow AB = 2 \cdot OM \Rightarrow AB = 2 \cdot (6 \text{ cm}) = 12 \text{ cm}$

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (12 \text{ cm})^2 \cdot (6 \text{ cm}) \Rightarrow$

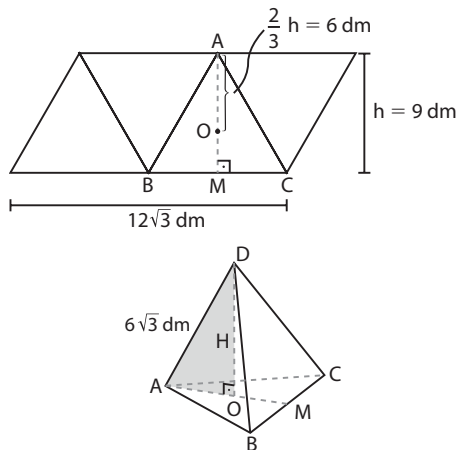
$\Rightarrow V = 288 \text{ cm}^3$

41. $\begin{cases} \mathbf{A_1} \text{ e } \mathbf{V_1}\text{: respectivas áreas da base e volume do prisma cuja altura mede } \mathbf{h_1} \\ \mathbf{A_2} \text{ e } \mathbf{V_2}\text{: respectivas áreas da base e volume da pirâmide cuja altura mede } \mathbf{h_2} \end{cases}$

Como $A_1 = A_2$ e $V_1 = 5 \cdot V_2$, temos:

$A_1 \cdot h_1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h_2\right) \Rightarrow h_2 = \frac{3}{5} h_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_2 = 0{,}60h_1 = 60\%h_1$

42.

A área total do tetraedro é igual à área do paralelogramo que representa a planificação de sua superfície, ou seja:

$A_t = (12\sqrt{3} \text{ dm}) \cdot (9 \text{ dm}) = 108\sqrt{3} \text{ dm}^2$

H = OD: medida da altura do tetraedro

$AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ dm}$

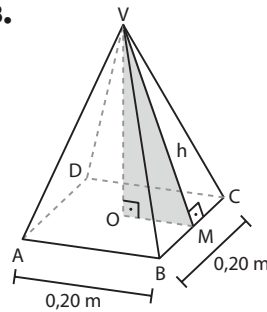
$\triangle AOD$ retângulo $\Rightarrow AO^2 + OD^2 = AD^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow H^2 = (6\sqrt{3})^2 - 6^2 \Rightarrow H = 6\sqrt{2} \text{ dm}$

$A_b = \frac{1}{4} \cdot A_t \Rightarrow A_b = \frac{1}{4} \cdot 108\sqrt{3} \text{ dm}^2 = 27\sqrt{3} \text{ dm}^2$

$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot (6\sqrt{2}) \cdot (27\sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 54\sqrt{6} \text{ dm}^3$

43.

$\mathbf{A_1}$: área da face VBC

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}20 \cdot h = 0{,}10h$

$A_\ell = 0{,}28 \text{ m}^2 \Rightarrow 4 \cdot A_1 = 0{,}28 \text{ m}^2 \Rightarrow 0{,}40h = 0{,}28 \text{ m}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 0{,}7 \text{ m}$

$OM = \frac{AB}{2} = \frac{0{,}20}{2} \text{ m} \Rightarrow OM = 0{,}10 \text{ m}$

$\triangle VOM$ retângulo

$VO^2 = h^2 - OM^2 \Rightarrow VO^2 = 0{,}49 \text{ m}^2 - 0{,}01 \text{ m}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow VO = 0{,}4\sqrt{3} \text{ m}$

ABCD quadrado $\Rightarrow A_b = (0{,}20 \text{ m})^2 = 0{,}04 \text{ m}^2$

$\mathbf{V_1}$: volume da pirâmide VABCD

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot VO \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot (0{,}04 \text{ m}^2) \cdot (0{,}4\sqrt{3} \text{ m}) =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{375} \text{ m}^3$

Logo, o volume do granito é: $V = 4 \cdot V_1 = \frac{8\sqrt{3}}{375} \text{ m}^3$

44. $H = 2 \text{ m}$; $A_\ell = 15 \text{ m}^2$

x: medida da aresta da base

h: medida da altura da face lateral

$A_\ell = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot xh\right) = 2xh \Rightarrow$

$\Rightarrow 2xh = 15 \Rightarrow h = \frac{15}{2x}$ *

$\triangle VOM$ retângulo

$h^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + H^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{225}{4x^2} = \frac{x^2}{4} + 4 \Rightarrow$

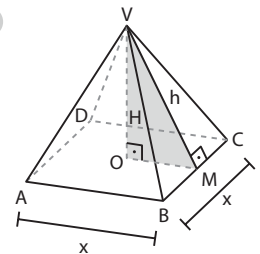
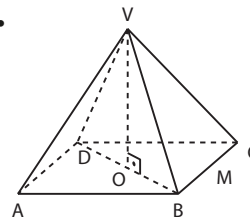
$\Rightarrow x^4 + 16x^2 - 225 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 \text{ m}$

$A_b = x^2 \Rightarrow A_b = 9 \text{ m}^2$

Logo: $V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \left(\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2\right) \text{ m}^3 = 6 \text{ m}^3$

45.

V
D
C
O
M
A
B

$\begin{cases} \ell\text{: medida da aresta da pirâmide} \\ BD = \ell\sqrt{2} \Rightarrow OB = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \\ VD = VB = \ell \end{cases}$

$BD + VB + VD = 6 + 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell\sqrt{2} + \ell + \ell = 3(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell(2 + \sqrt{2}) = 3(2 + \sqrt{2}) \Rightarrow \ell = 3$

Assim: $OB = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e $VB = 3$

a) VO: medida da altura da pirâmide; $VO = h$
$\triangle VOB$ retângulo $\Rightarrow VO^2 + OB^2 = VB^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 = 9 - \dfrac{9 \cdot 2}{4} \Rightarrow h = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow V = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$
$A_b = 3^2 = 9$
$\triangle VBC$ equilátero
$A_{VBC} = \dfrac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{VBC} = \dfrac{3^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{VBC} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$
$A_\ell = 4 \cdot A_{VBC} \Rightarrow A_\ell = 9\sqrt{3}$
Logo: $A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 9 + 9\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 9(1 + \sqrt{3})$

46. $\ell = 6$ m; $x = 3\sqrt{5}$ m

$OC = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OC = 3\sqrt{2}$ m

$\triangle VOC$ retângulo
$(3\sqrt{5})^2 = H^2 + (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow H = 3\sqrt{3}$ m

a) $A_b = (6\text{ m})^2 = 36\text{ m}^2$
$\triangle VMC$ retângulo $\Rightarrow g^2 = (3\sqrt{5})^2 - 3^2 \Rightarrow g = 6$ m
$A_\ell = 4 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\right)\text{m}^2 = 72\text{ m}^2$
$A_t = A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = 108\text{ m}^2$

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot H \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{3}\text{ m}^3 = 36\sqrt{3}\text{ m}^3$

c) $\left.\begin{array}{l}\alpha = med(V\hat{M}O)\\ \triangle VOM \text{ retângulo}\end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{OM}{g} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha = 60°$

47. $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{12} = \dfrac{4}{20} \Rightarrow x = 1$ cm e $y = 2{,}4$ cm

48. Como $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3}$, então os cilindros 1 e 2 não são semelhantes.

49. **x**, **y** e **z**: dimensões da nova caixa, em decímetros
$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} = k$ (razão de semelhança linear)
$\left.\begin{array}{l}\mathbf{V_1}\text{: volume da caixa original}\\ \mathbf{V_2}\text{: volume da nova caixa}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_1} = k^3 \xrightarrow[V_2 = 8V_1]{}$
$\Rightarrow k^3 = 8 \Rightarrow k = 2$
Assim: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{7} = 2 \Rightarrow x = 4$ dm, $y = 10$ dm e $z = 14$ dm
Logo: $A_t = 2xy + 2xz + 2yz \Rightarrow A_t = 472\text{ dm}^2$

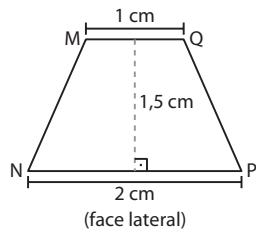
50. $V_I = \dfrac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 20 \Rightarrow V_\ell = 960\text{ cm}^3$
I e II: pirâmides semelhantes $\Rightarrow \dfrac{V_I}{V_{II}} = \dfrac{960}{120} = k^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow k = 2$ (razão de semelhança linear)
$\dfrac{20}{h} = \dfrac{12}{\ell} = k = 2 \Rightarrow h = 10$ cm e $\ell = 6$ cm

51. $\left.\begin{array}{l}\ell_1 = 10\text{ cm};\ V_1 = 80\sqrt{3}\text{ cm}^3\\ \ell_2 = 5\text{ cm};\ V_2 = ?\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\ell_1}{\ell_2} = k = 2$
$\dfrac{V_1}{V_2} = k^3 = 8 \Rightarrow V_1 = 8 \cdot V_2 \Rightarrow 80\sqrt{3} = 8 \cdot V_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_2 = 10\sqrt{3}\text{ cm}^3$

52. $\begin{cases}\ell = 6\text{ dm (medida da aresta da base de } \mathbf{P_1})\\ h_1 = 12\text{ dm (medida da altura de } \mathbf{P_1})\\ h_2 = 4\text{ dm (medida da altura de } \mathbf{P_2})\end{cases}$

Temos: $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{1}{9}$ e $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{1}{27}$

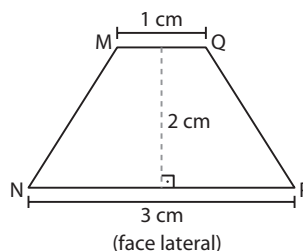
a) Cálculo de $\mathbf{A_1}$, ou seja, da área da base de $\mathbf{P_1}$.
$A_1 = 6 \cdot \left(\dfrac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_1 = \dfrac{6 \cdot 36 \cdot \sqrt{3}}{4}\text{ dm}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1 = 54\sqrt{3}\text{ dm}^2$
Assim: $\dfrac{A_2}{54\sqrt{3}} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow A_2 = 6\sqrt{3}\text{ dm}^2$

b) Cálculo de $\mathbf{V_1}$, ou seja, do volume de $\mathbf{P_1}$.
$V_1 = \dfrac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h_1 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot 54\sqrt{3} \cdot 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow V_1 = 216\sqrt{3}\text{ dm}^3$
Logo: $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{1}{27} \Rightarrow V_2 = \dfrac{216\sqrt{3}}{27} \Rightarrow V_2 = 8\sqrt{3}\text{ dm}^3$

53. $\left.\begin{array}{l}h_2 = 45\text{ cm}\\ h_1 = 15\text{ cm}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{h_2}{h_1} = k \Rightarrow \dfrac{45}{15} = k \Rightarrow k = 3$

a) $\left.\begin{array}{l}\ell_2 = 60\text{ cm}\\ \ell_1 = ?\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\ell_2}{\ell_1} = k \Rightarrow \dfrac{60}{\ell_1} = 3 \Rightarrow \ell_1 = 20$ cm

b) $\dfrac{A_2}{A_1} = k^2 \Rightarrow \dfrac{A_2}{A_1} = 9$

54. a) Tronco quadrangular regular

$A_B = (2\text{ cm})^2 = 4\text{ cm}^2$
$A_b = (1\text{ cm})^2 = 1\text{ cm}^2$
$A_\ell = 4 \cdot A_{MNPQ} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = 4 \cdot \left[\dfrac{1}{2} \cdot (2 + 1) \cdot 1{,}5\right] \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = 9\text{ cm}^2$
Logo: $A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow$
$\Rightarrow A_t = 14\text{ cm}^2$

b) Tronco hexagonal regular

$\ell_B = 3$ cm (medida da aresta da base **B**)
$A_B = 6 \cdot \left(\dfrac{\ell_B^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow A_B = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$

$\ell_b = 1$ cm (medida da aresta da base **b**)
$A_b = 6 \cdot \left(\dfrac{\ell_b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_b = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$

$A_\ell = 6 \cdot A_{MNPQ} \Rightarrow A_\ell = 6 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (3 + 1) \cdot 2\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 24 \text{ cm}^2$

Logo: $A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = \left(15\sqrt{3} + 24\right) \text{ cm}^2 =$

$= 3\left(5\sqrt{3} + 8\right) \text{ cm}^2$

55. **V**: vértice da pirâmide que originou o tronco

x: distância entre **V** e a base menor do tronco, em centímetros

Comparando as duas pirâmides semelhantes, temos:

$\frac{12}{24} = \frac{x}{x + 27} \Rightarrow x + 27 = 2x \Rightarrow x = 27 \text{ cm}$

$\mathbf{V_1}$: volume da pirâmide maior

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot 24^2 \cdot (27 + x) \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 576 \cdot 54 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = 10\,368 \text{ cm}^3$

$\mathbf{V_2}$: volume da pirâmide menor

$V_2 = \frac{1}{3}\, 12^2 x \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 27 \Rightarrow V_2 = 1\,296 \text{ cm}^3$

Logo: $V_{tronco} = V_1 - V_2 \Rightarrow V_{tronco} = (10\,368 - 1\,296) \text{ cm}^3 =$

$= 9\,072 \text{ cm}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} = 9{,}072 \text{ L}$

56. a) **B** e **b**: triângulos equiláteros

$$\begin{cases} A_B = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2 \\ A_b = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{cases}$$

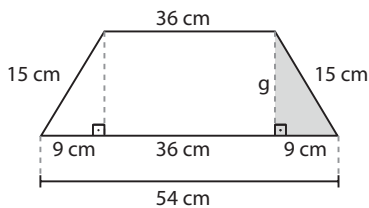
$A_t = A_B + A_b + A_\ell \Rightarrow A_t = \left(36\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 180\right) \text{ cm}^2 =$

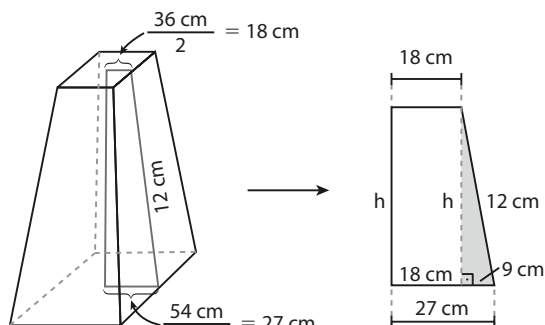
$= \left(52\sqrt{3} + 180\right) \text{ cm}^2$

b) **a**: medida do apótema do tronco

$A_\ell = 180 \text{ cm}^2 \Rightarrow 3\left[\frac{1}{2} \cdot (8 + 12) \cdot a\right] = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 6 \text{ cm}$

57. a) Inicialmente, devemos encontrar a altura do trapézio (apótema do tronco) de uma face lateral:

$15^2 = 9^2 + g^2 \Rightarrow g = 12 \text{ cm}$

Vamos determinar agora a altura do tronco do cone:

$h^2 + 9^2 = 12^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{7} \text{ cm}$

Seja **V** o vértice da pirâmide que originou o tronco; a distância de **V** à base menor do tronco é **x**. Comparando as duas pirâmides semelhantes temos:

$\frac{54}{36} = \frac{3\sqrt{7} + x}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{7} + x}{x} \Rightarrow 3x = 6\sqrt{7} + 2x \Rightarrow x = 6\sqrt{7} \text{ cm}$

$V_1 = V_{\text{pirâmide maior}} = \frac{1}{3} \cdot 54^2 \cdot (h + x) \Rightarrow$

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot 54^2 \cdot 9\sqrt{7} \Rightarrow V_1 = 8\,748\sqrt{7} \text{ cm}^3$

$V_2 = V_{\text{pirâmide menor}} = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot x \Rightarrow V_2 = \frac{1}{3} \cdot 36^2 \cdot 6\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_2 = 2\,592\sqrt{7} \text{ cm}^3$

$V_{tronco} = V_1 - V_2 \Rightarrow V_{tronco} = 8\,748\sqrt{7} - 2\,592\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{tronco} \Rightarrow 6\,156\sqrt{7} \text{ cm}^3 \simeq 6\,156 \cdot 2{,}65 \text{ cm}^3 \simeq$

$\simeq 16\,313{,}4 \text{ cm}^3$; como $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$, temos:

$V_{tronco} \simeq 0{,}016 \text{ m}^3$;

$V_{prisma} = 1\,296 \cdot 20 \text{ cm}^3 \simeq 0{,}026 \text{ m}^3$

$V_{suporte} = (0{,}026 + 0{,}016) \text{ m}^3 = 0{,}042 \text{ m}^3$

b) $\mathbf{A_1}$: área do prisma a ser impermeabilizada

$A_1 = 36^2 + 4 \cdot 36 \cdot 20 \Rightarrow A_1 = 4\,176 \text{ cm}^2$

$\mathbf{A_2}$: área do tronco a ser impermeabilizada

$A_2 = 54^2 + 4 \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} \cdot (36 + 54) \cdot 12\right]}_{\text{área do trapézio}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = 5\,076 \text{ cm}^2$

A: área total a ser impermeabilizada:

$A = A_1 + A_2 = 9\,252 \text{ cm}^2$

área	quantidade de impermeabilizante
1000 cm^2	400 mL
$9\,252 \text{ cm}^2$	x

$\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{9\,252 \cdot 400}{1000} \text{ mL} = 3\,700{,}8 \text{ mL} \simeq 3{,}70 \text{ L}$

C: custo aproximado da pintura

$C = 3{,}70 \cdot \text{R\$ } 28{,}00 = \text{R\$ } 103{,}60$

58. $\ell_B = 5 \text{ dm}$; $\ell_b = 3 \text{ dm}$; $a = 10 \text{ dm}$

$A_\ell = 5 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (5 + 3) \cdot 10\right] \Rightarrow A_\ell = 200 \text{ dm}^2$

59. Seja **V** o vértice da pirâmide que originou o tronco; consideremos que a distância de **V** à base menor do tronco seja **x**. Usando a semelhança entre as duas pirâmides, temos:

$\frac{12}{6} = \frac{4 + x}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 4 + x \Rightarrow$

$x = 4 \text{ dm}$

$V_{\text{pirâmide maior}} = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 8 \Rightarrow V_{\text{pirâmide maior}} = 384 \text{ dm}^3$

$V_{\text{pirâmide menor}} = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 \Rightarrow V_{\text{pirâmide menor}} = 48 \text{ dm}^3$

$V_{tronco} = 384 \text{ dm}^3 - 48 \text{ dm}^3 = 336 \text{ dm}^3$

60. a) São poliedros convexos: I, II, IV, VI.
São poliedros não convexos: III e V.

b)

Poliedro	V	A	F
I	8	12	6
II	10	15	7
III	16	24	10
IV	7	15	10
V	16	24	10
VI	12	30	20

c) Todos satisfazem a relação de Euler, isto é, são eulerianos.

61. $A = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30$

$V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 20$

62. $A = \dfrac{12 \cdot 5 + 20 \cdot 6}{2} = 90$

$V - 90 + 32 = 2 \Rightarrow V = 60$

63. $A = \dfrac{6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{2} = 24$

$V - 24 + 13 = 2 \Rightarrow V = 13$

64. $V - A + F = 2 \Rightarrow 10 - 20 + F = 2 \Rightarrow F = 12$

12 faces $\begin{cases} \mathbf{x} \text{ triângulos} \\ \mathbf{y} \text{ quadrangulares} \end{cases}$

Sabemos que $A = \dfrac{x \cdot 3 + y \cdot 4}{2} \Rightarrow 20 = \dfrac{3x + 4y}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + 4y = 40$; como $x + y = 12$, segue que

$\begin{cases} 3x + 4y = 40 \\ x + \ \ y = 12 \end{cases}$, resolvido fornece $x = 8$ e $y = 4$.

São 8 faces triangulares e 4 faces quadrangulares.

65. a) Sim, pois é convexo. Observe que $V = 4$, $F = 4$ e $A = 6$.

b) Sim. Todas as faces são triangulares; em cada vértice concorrem 3 arestas e é euleriano.

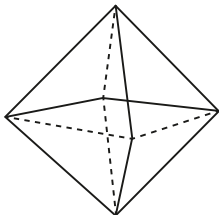
c) Não; a base é um triângulo retângulo, que não é um polígono regular.

66. a) Sim; $V = 7$, $F = 7$ e $A = 12$.

b) Não; uma face é hexagonal e as demais triangulares. Além disso, no vértice da pirâmide concorrem 6 arestas e em cada vértice da base concorrem 3 arestas.

c) Não; não é poliedro de Platão.

67. a) Octaedro regular; ele possui 8 faces triangulares (cada face é um triângulo equilátero).

Como $A = \dfrac{3 \cdot 8}{2} = 12$, temos $V - 12 + 8 = 2 \Rightarrow V = 6$

b) Sim; é poliedro de Platão e todas as faces são triângulos equiláteros congruentes.

Desafio

a) O poliedro obtido possui:

- 8 faces triangulares "geradas" nos vértices do cubo original;
- 6 faces octogonais (contidas nas faces do cubo original). Assim, ao todo são 14 faces.

b) Sejam:

$\mathbf{V_p}$: volume do poliedro

$\mathbf{V_c}$: volume do cubo original

$\mathbf{V_{pir}}$: volume de cada pirâmide retirada

$V_p = \dfrac{5}{6} \cdot V_c \Rightarrow \underbrace{8 \cdot V_{pir}}_{\text{Soma dos volumes das 8 pirâmides retiradas}} = \dfrac{1}{6} \cdot V_c$ (*)

O volume de cada pirâmide pode ser obtido por:

1º modo: A aresta (**a**) da base da pirâmide regular triangular pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

$a^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow a^2 = 2x^2 \Rightarrow a = x\sqrt{2}$

A área da base é: $\dfrac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{(x\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{2x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$
$= \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$

A altura da pirâmide é: $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ (dado)

$V_{pir} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \dfrac{x^3}{6}$

2º modo: Considerando a base um triângulo retângulo isósceles, temos:

$A_b = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot x = \dfrac{x^2}{2}$

$H = x$ (distância do vértice ao plano de base)

$V_{pir} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2}{2} \cdot x = \dfrac{x^3}{6}$

Daí: em (*):

$8 \cdot \dfrac{x^3}{6} = \dfrac{1}{6} \cdot a^3 \Rightarrow 8x^3 = a^3 \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$

CAPÍTULO 9 Corpos redondos

1. a) $A_\ell = 2\pi \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow A_\ell = 4\pi \text{ cm}^2$
$A_t = A_\ell + 2\pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_t = 6\pi \text{ cm}^2$
$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 \Rightarrow V = 2\pi \text{ cm}^3$

b) $A_\ell = 2\pi \cdot 1 \cdot 2{,}5 \Rightarrow A_\ell = 5\pi \text{ cm}^2$
$A_t = A_\ell + 2\pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_t = 7\pi \text{ cm}^2$
$V = \pi \cdot 1^2 \cdot 2{,}5 \Rightarrow V = 2{,}5\pi \text{ cm}^3$

c) $A_\ell = \dfrac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 8 \cdot 15 + \underbrace{15 \cdot 16}_{\text{A seção meridiana}} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_\ell = 120 \cdot (\pi + 2) \text{ mm}^2$
$A_t = A_\ell + \pi \cdot 8^2 \Rightarrow A_t = 8 \cdot (23\pi + 30) \text{ mm}^2$
$V = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 8^2 \cdot 15 \Rightarrow V = 480\pi \text{ mm}^3$

2. $r = 4$ cm
$h = 22$ cm
$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 22 \Rightarrow V = 352 \cdot \pi \text{ cm}^3$

Como $352 \cdot \pi > 1\,000$ (considerando $\pi \simeq 3{,}1$ obtemos $1091{,}2$ cm^3 e considerando $\pi \simeq 3{,}14$ obtemos $1105{,}28$ cm^3), é possível armazenar mais que um litro (ou $1\,000$ cm^3) de óleo.

3. $A_\ell = 250\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow 2\pi \cdot 10 \cdot h = 250\pi \Rightarrow h = \dfrac{25}{2}$ cm

$V = \pi \cdot 10^2 \cdot \dfrac{25}{2} \Rightarrow V = 1\,250\pi \text{ cm}^3$

4. $d = 8 \text{ m} \Rightarrow r = 4 \text{ m}$

$h = 14$ m

$V = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{22}{7} \cdot 4^2 \cdot 14 \Rightarrow V = 704 \text{ m}^3 = 704\,000$ L

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ minuto} \quad — \quad 160 \text{ L} \\ \mathbf{x} \quad — \quad 704\,000 \text{ L} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 4\,400 \text{ minutos} =$$

$= 73\dfrac{1}{3}$ h $= \underbrace{3 \text{ dias}}_{72 \text{ h}} + 1 \text{ hora} + \underbrace{20 \text{ minutos}}_{\frac{1}{3} \text{ h}}$

Assim, o número inteiro mínimo de dias é 4.

5. Do sistema: $\begin{cases} 4r + 2h = 28 \\ 2\pi rh = 48\pi \end{cases}$ tem-se $\begin{cases} h = 14 - 2r & (1) \\ r = \dfrac{24}{h} & (2) \end{cases}$

Substituindo-se (2) em (1), tem-se: $h^2 - 14h + 48 = 0$, de soluções $h = 6$ cm ou $h = 8$ cm.

Se $h = 6$ cm, então $r = 4$ cm e $V = \pi\,(4 \text{ cm})^2 \cdot (6 \text{ cm}) =$ $= 96\pi \text{ cm}^3$.

Se $h = 8$ cm, então $r = 3$ cm e $V = \pi\,(3 \text{ cm})^2 \cdot (8 \text{ cm}) =$ $= 72\pi \text{ cm}^3$.

6. $A_\ell = \dfrac{6\pi}{5}$ m^2; $r = 80$ cm $= 0{,}8$ m

a) $A_\ell = 2\pi \cdot r \cdot h = \dfrac{6\pi}{5} \Rightarrow r \cdot h = \dfrac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}8 \cdot h = \dfrac{3}{5} \Rightarrow h = 0{,}75 \text{ m} = 75$ cm

b) $V = \pi \cdot (0{,}8 \text{ m})^2 \cdot (0{,}75 \text{ m}) = (3{,}14 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}75) \text{ m}^3 =$ $= 1{,}5072 \text{ m}^3 = 1\,507{,}2$ L

7. $V = 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 20 \Rightarrow V = 1\,570 \text{ cm}^3$

Como a massa de 1 cm^3 de mercúrio é 13,6 g, então $1\,570$ cm^3 têm massa $1\,570 \cdot 13{,}6 \text{ g} = 21\,352$ g de mercúrio, ou 21,352 kg.

8. a) $A_\ell = 30\pi \Rightarrow 2\pi r \cdot h = 30\pi \Rightarrow r \cdot h = 15$ (1)

$V = 45\pi \Rightarrow \pi r^2 \cdot h = 45\pi \Rightarrow r^2 \cdot h = 45$ (2)

(1) em (2) $\Rightarrow r \cdot r \cdot h = 45 \Rightarrow 15 \cdot r = 45 \Rightarrow r = 3$

Substituindo o valor de **r** em (1), temos $h = 5$ m

b) $A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b$

$A_t = 30\pi + 2 \cdot \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_t = 48\pi \text{ m}^2$

9. $A_t = ?$ e $V = 250\pi \text{ cm}^3$

$V = A_b \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot 2r \Rightarrow 250\pi = \pi \cdot 2r^3 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow$

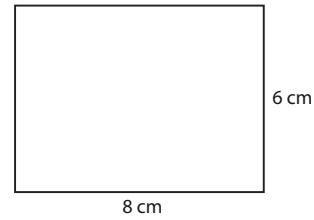
$\Rightarrow r = 5$ cm

$A_\ell = 2\pi r \cdot h = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2 \Rightarrow A_\ell = 4\pi \cdot 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = 100\pi \text{ cm}^2$

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = 25\pi \text{ cm}^2$

$A_t = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_t = 100\pi + 2 \cdot 25\pi \Rightarrow A_t = 150\pi \text{ cm}^2$

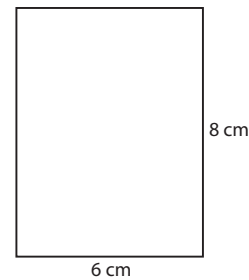
10. 1º caso

$8 = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{4}{\pi}$ cm

$A_\ell = (8 \text{ cm}) \cdot (6 \text{ cm}) = 48 \text{ cm}^2$

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot \left(\dfrac{4}{\pi}\right)^2 = \dfrac{16}{\pi} \Rightarrow A_b \simeq 5{,}16 \text{ cm}^2$

$A_t = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_t = 48 + 2 \cdot 5{,}16 \Rightarrow A_t = 58{,}32 \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 5{,}16 \cdot 6 \Rightarrow V = 30{,}96 \text{ cm}^3$

2º caso

$6 = 2\pi r \Rightarrow r = \dfrac{3}{\pi}$ cm

$A_\ell = (6 \text{ cm}) \cdot (8 \text{ cm}) = 48 \text{ cm}^2$

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi \cdot \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^2 = \dfrac{9}{\pi} \Rightarrow A_b \simeq 2{,}90 \text{ cm}^2$

$A_t = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_t = 48 + 2 \cdot 2{,}90 \Rightarrow A_t = 53{,}80 \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = 2{,}90 \cdot 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 23{,}20 \text{ cm}^3$

11. $d = 24 \text{ dm} = 2{,}4 \text{ m} \Rightarrow r = 1{,}2$ m

$h = 140 \text{ dm} = 14$ m

$V = \pi \cdot (1{,}2 \text{ m})^2 \cdot (14 \text{ m}) = \left(\dfrac{22}{7} \cdot 1{,}44 \cdot 14\right) \text{m}^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 63{,}36 \text{ m}^3$

12. a) $\mathbf{A_1}$: área total do cubo

$A_1 = 6 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow A_t = 600 \text{ cm}^2$

Note que $h = 2r = 10$

$\mathbf{A_2}$: área total do cilindro (cilindro equilátero: $h = 2r$)

$A_\ell = 2\pi r \cdot h = \pi h^2 \Rightarrow A_\ell = \pi(10)^2 \Rightarrow A_\ell = 100\pi \text{ cm}^2$

$A_b = \pi r^2 \Rightarrow A_b = \pi\left(\dfrac{10}{2}\right)^2 \Rightarrow A_b = 25\pi \text{ cm}^2$

Portanto, a área total do cilindro é:

$A_2 = A_\ell + 2A_b \Rightarrow A_2 = 100\pi + 2 \cdot 25\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = 150\pi \text{ cm}^2$

Logo, $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{600}{150\pi} = \dfrac{4}{\pi}$

b) $\mathbf{V_1}$: volume do cubo

$V_1 = (10 \text{ cm})^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$

$\mathbf{V_2}$: volume do cilindro

$V_2 = A_b \cdot h \Rightarrow V_2 = 25\pi \cdot 10 \Rightarrow V_2 = 250\pi \text{ cm}^3$

13. O volume, em cm³, de café que pode ser servido na garrafa térmica é $\pi \cdot 5^2 \cdot 18 = \pi \cdot 25 \cdot 18 = 450\pi$.
O volume, em cm³, de café que pode ser servido em um copinho plástico é, no máximo, $\pi \cdot 2^2 \cdot 4 = 16\pi$.

a) Como $30 \cdot (16\pi \text{ cm}^3) = 480\pi \text{ cm}^3 > 450\pi \text{ cm}^3$, não haverá café suficiente para todos.

b) A área total da superfície de um copinho plástico é:

$$\underbrace{(\pi \cdot 2^2)}_{\text{área de uma base}} \text{ cm}^2 + \underbrace{(2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 4)}_{\text{área da superfície lateral}} \text{ cm}^2 = 20\pi \text{ cm}^2$$

Com o acréscimo de 25% de plástico, a quantidade de material plástico usado na confecção de um copinho é $(1{,}25 \cdot 20\pi) \text{ cm}^2 = 25\pi \text{ cm}^2 \simeq (25 \cdot 3{,}1) \text{ cm}^2 = 77{,}5 \text{ cm}^2$
Para fabricar 1500 desses copinhos, são gastos $1500 \cdot (77{,}5 \text{ cm}^2) = 116\,250 \text{ cm}^2$. Como $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$, temos um gasto de $11{,}625 \text{ m}^2$. O custo desse material é $11{,}625 \cdot 8{,}50$ reais $\simeq 98{,}81$ reais; com o acréscimo de 30%, o valor a ser pago nessa encomenda é de $1{,}3 \cdot 98{,}81$ reais $= 128{,}45$ reais.

14. a) Prisma: $\begin{cases} h = 10 \text{ cm} \\ A_b = (18 \text{ cm})^2 = 324 \text{ cm}^2 \\ V_1 = A_b \cdot h \end{cases}$

$V_1 = (324 \text{ cm}^2) \cdot (10 \text{ cm}) = 3\,240 \text{ cm}^3$

Cilindro: $\begin{cases} h = 10 \text{ cm};\ r = 2{,}8 \text{ cm} \\ A_b = \pi r^2 = \frac{22}{7} \cdot (2{,}8 \text{ cm})^2 = 24{,}640 \text{ cm}^2 \\ V_2 = A_b \cdot h \end{cases}$

$V_2 = (24{,}640 \text{ cm}^2) \cdot (10 \text{ cm}) = 246{,}40 \text{ cm}^3$
O volume da peça é: $V_1 - V_2 = 2\,993{,}60 \text{ cm}^3$

b) **m**: massa da madeira

$$\left.\begin{matrix} 1 \text{ cm}^3 & \text{———} & 0{,}93 \text{ g} \\ 2\,993{,}60 \text{ cm}^3 & \text{———} & m \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = 0{,}93 \cdot 2\,993{,}60 \text{ g} = 2\,784{,}048 \text{ g} \simeq 2{,}784 \text{ kg}$

15. $V = 3{,}14 \cdot (0{,}5)^2 \cdot 2 \Rightarrow V = 1{,}57 \text{ m}^3$
Se o volume do tambor é $1{,}57 \text{ m}^3$, sua capacidade é de 1 570 litros e o volume de álcool será 157 litros.

16. a) Em $\mathbf{C_1}$, temos $2\pi r = 8$ cm e $h = 12$ cm. Assim:

$$r = \frac{4}{\pi} \text{ cm e } V_{C_1} = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot 12 \Rightarrow V_{C_1} = \frac{192}{\pi} \text{ cm}^3$$

Em $\mathbf{C_2}$, temos $2\pi r = 12$ e $h = 8$ cm. Daí:

$$r = \frac{6}{\pi} \text{ cm e } V_{C_2} = \pi \cdot \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 \cdot 8 \Rightarrow V_{C_2} = \frac{288}{\pi} \text{ cm}^3$$

O maior volume é o de $\mathbf{C_2}$.

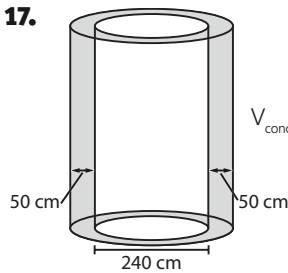
b) Na construção de $\mathbf{C_1}$ são gastos:

$$\left[\underbrace{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2}_{2 \cdot A_b} + \underbrace{8 \cdot 12}_{A_\ell}\right] \text{cm}^2 = \left(\frac{32}{\pi} + 96\right) \text{cm}^2$$

Na construção de $\mathbf{C_2}$ são gastos:

$$\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{6}{\pi}\right)^2 + 8 \cdot 12\right] \text{cm}^2 = \left(\frac{72}{\pi} + 96\right) \text{cm}^2$$

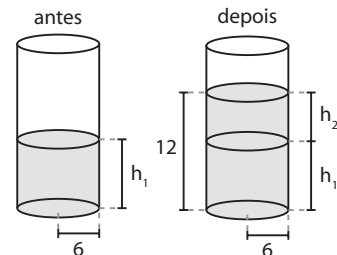
Assim, na construção de $\mathbf{C_1}$ gasta-se menos material.

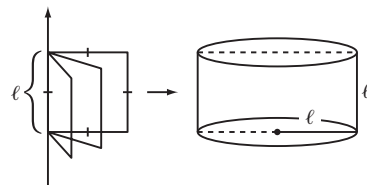
17.

$V_{concreto} = 449{,}5 \text{ m}^3 = 449{,}5 \cdot 10^6 \text{ cm}^3$

O volume de concreto usado na construção da torre é igual à diferença entre os volumes de dois cilindros:
$\pi \cdot (120 + 50)^2 \cdot h - \pi \cdot 120^2 \cdot h =$
$= \pi \cdot 170^2 \cdot h - \pi \cdot 120^2 \cdot h = \pi \cdot h \cdot (170^2 - 120^2) =$
$= \pi \cdot h \cdot (170 + 120) \cdot (170 - 120) = \pi \cdot h \cdot 290 \cdot 50 =$
$= 14\,500\pi \cdot h = 44\,950 \cdot h$

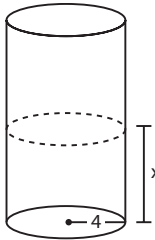
Daí: $44\,950 \cdot h = 449{,}5 \cdot 10^6 \Rightarrow h = \dfrac{449{,}5 \cdot 10^6}{449{,}5 \cdot 10^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 10^4 \text{ cm} = 10^2 \text{ m} = 100 \text{ m}$

18. $V_{grande} = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 \Rightarrow V_{grande} = 300\pi \text{ cm}^3$
$V_{médio} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 \Rightarrow V_{médio} = 90\pi \text{ cm}^3$
Se o copo médio custar x reais, o preço de 1 cm³ de caldo será $\dfrac{x}{90\pi}$ reais; o copo grande custará 3x reais e o preço de 1 cm³ de caldo será $\dfrac{3x}{300\pi}$ reais. Como $\dfrac{x}{90\pi} > \dfrac{x}{100\pi}$, o copo grande é mais vantajoso.
Outro modo: Comprando-se o copo grande, paga-se o triplo do que se pagaria pelo copo médio mas consome-se mais que o triplo de caldo de cana ($300 > 3 \cdot 90$) do que seria consumido no médio.

19.

O volume das pedras é $16 \cdot (3 \text{ cm})^3 = 432 \text{ cm}^3$, que é o volume do cilindro de altura $\mathbf{h_2}$ e raio 6 cm.
$\pi \cdot r^2 \cdot h_2 = 432 \text{ cm}^3$
$h_2 = \dfrac{12}{\pi} \underset{\pi = 3}{\Longrightarrow} h_2 = 4 \text{ cm}$
Como $h_1 + h_2 = 12$ cm, então $h_1 = 8$ cm.

20.

Se o lado do quadrado mede ℓ cm, a seção meridiana é um retângulo de base de medida 2ℓ cm e altura de medida ℓ cm.
$2\ell \cdot \ell = 50 \Rightarrow \ell = 5 \text{ cm}$

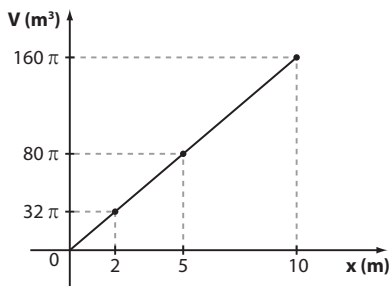
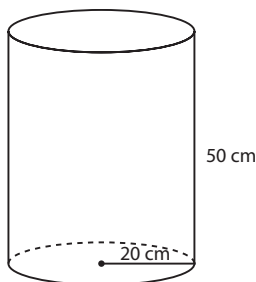
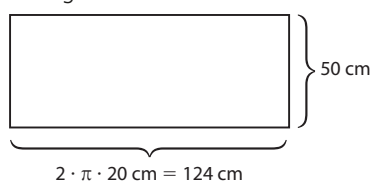
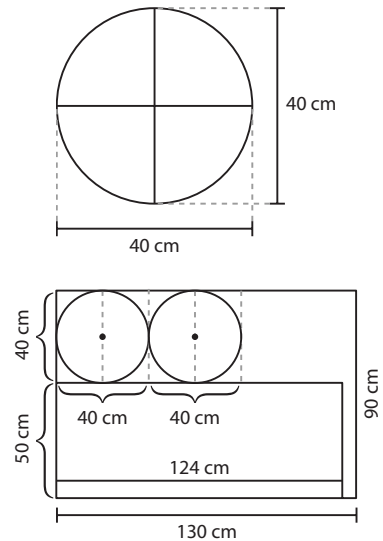
21. O volume do sólido obtido é igual à diferença entre os volumes de dois cilindros: um com raio igual a 7 e altura igual a 2 e o outro com raio igual a 3 e altura igual a 2.
$V = \pi \cdot 7^2 \cdot 2 - \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 98\pi - 18\pi \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 80\pi$ u.v.

22. a) Quando o nível da água no tanque atinge a altura **x**, o volume de água no tanque (em m^3) é:

$V = \pi \cdot 4^2 \cdot x$ (volume de um cilindro com $r = 4$ e $h = x$), isto é, $V(x) = 16\pi \cdot x$

Como $A_b = 16\pi$ m² é constante, temos:

$$\frac{V(x)}{x} = 16\pi = k$$

e desse modo V(x) e **x** são grandezas diretamente proporcionais. Observe que, para uma altura 2x, o volume de água no tanque é $16\pi \cdot 2x$, que é o dobro do volume de água quando a altura é **x**.

b) Temos a função linear $y = 16\pi \cdot x$, sendo **y** o volume de água, em m³, e **x** a altura da água em metros, no reservatório.

23. a)

Ao planificarmos a superfície lateral do cilindro obtemos o retângulo abaixo:

Cada círculo das bases tem diâmetro medindo 40 cm.

O esquema acima mostra uma possível maneira de se fazer cortes no tecido a fim de revestir as bases circulares e a superfície lateral do cilindro.

b) A área do retalho de tecido é $(130 \text{ cm}) \cdot (90 \text{ cm}) =$
$= 11\,700 \text{ cm}^2$
A área do retângulo cortado para revestir a superfície lateral do cilindro é $(124 \text{ cm}) \cdot (50 \text{ cm}) = 6\,200 \text{ cm}^2$
A área de cada círculo cortado para revestir uma base do cilindro é $\pi \cdot (20 \text{ cm})^2 = 1240 \text{ cm}^2$
A área do retalho que vai sobrar é:
$(11\,700 - 6\,200 - 2 \cdot 1\,240) \text{ cm}^2 = 3\,020 \text{ cm}^2$

24. a) Como $V = A_b \cdot h$ e $\mathbf{A_b}$ é fixo, **V** e **h** são diretamente proporcionais. Assim, a altura do combustível é $\frac{5}{8} \cdot 9 \text{ m} = 5{,}625$ m.

b) $2\,400 \text{ L} = 2{,}4 \text{ m}^3$
Como $V = A_b \cdot h$, temos: $2{,}4 = \pi \cdot 4^2 \cdot h \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \frac{2{,}4}{3 \cdot 16} \Rightarrow h = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$
O nível se elevará em 5 cm.

c) Devemos calcular $\frac{3}{8} \cdot V = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 9 = 162$
Ou seja, $162 \text{ m}^3 = 162\,000$ L

25. $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 5 \Rightarrow V = \frac{80\pi}{3} \text{ cm}^3$

26. $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 6 = 128\pi \Rightarrow r^2 = 64 \text{ cm}^2$
A área da base é $\pi r^2 = 64\pi \text{ cm}^2$.

27. $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 - 20^2 = 225 \Rightarrow r = 15$ dm
$A_t = \pi \cdot 15 \cdot (25 + 15) \Rightarrow A_t = 600\pi \text{ dm}^2$
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 225 \cdot 20 \Rightarrow V = 1\,500\pi \text{ dm}^3$

28. $r = 2$ cm
$h = 6$ cm
$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 3{,}1 \cdot 2^2 \cdot 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 24{,}8 \text{ cm}^3$ (por cone)

Para fabricar 2 500 cones, são necessários
$2\,500 \cdot (24{,}8 \text{ cm}^3) = 62\,000 \text{ cm}^3$ de cacau. Assim:

$$\left.\begin{matrix} 1 \text{ cm}^3 & — & 1{,}05 \text{ g} \\ 62\,000 \text{ cm}^3 & — & x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 65\,100 \text{ g} = 65{,}1 \text{ kg}$$

29. a) $g = 2r = 22$ cm

$22^2 = h^2 + 11^2 \Rightarrow h = 11\sqrt{3}$ cm

$A_\ell = \pi \cdot 11 \cdot 22 \Rightarrow A_\ell = 242\pi \text{ cm}^2$

$A_t = \pi \cdot 11 \cdot (22 + 11) \Rightarrow A_t = 363\pi \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 11^2 \cdot 11\sqrt{3} \Rightarrow V = \dfrac{1\,331\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$

b) $g^2 = 35^2 + 10^2 \Rightarrow g = 5\sqrt{53}$ cm

$A_\ell = \pi \cdot 10 \cdot 5\sqrt{53} \Rightarrow A_\ell = 50\pi\sqrt{53} \text{ cm}^2$

$A_t = \pi \cdot 10 \cdot \left(5\sqrt{53} + 10\right) \Rightarrow A_t = 50\pi \cdot \left(\sqrt{53} + 2\right) \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 35 \Rightarrow V = \dfrac{3\,500\pi}{3} \text{ cm}^3$

c) $g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5$ cm

$A_\ell = \underbrace{\dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4}_{\text{área da seção meridiana}} + \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_\ell = \left(\dfrac{24 + 15\pi}{2}\right) \text{ cm}^2$

$A_t = A_\ell + \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_t = 12(\pi + 1) \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 4 \Rightarrow V = 6\pi \text{ cm}^3$

30. Recipiente:

$r = 0{,}20 \text{ m} = 20$ cm

$h = 0{,}80 \text{ m} = 80$ cm

$V = \pi \cdot 20^2 \cdot 80 \Rightarrow V = 32\,000\pi \text{ cm}^3$

Copo:

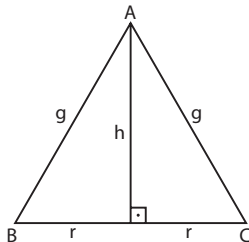
$r = 4$ cm

$h = 18$ cm

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 18 \Rightarrow V = 96\pi \text{ cm}^3$

Número de copos: $\dfrac{32\,000\pi \text{ cm}^3}{96\pi \text{ cm}^3} = 333{,}33...$

Assim, o número mínimo pedido é 334.

31.

No $\triangle ABC$, $A = \dfrac{1}{2} \cdot 2r \cdot h = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow rh = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{12}{5}$ cm

$V = \dfrac{1}{3}\pi \cdot \left(\dfrac{12}{5}\right)^2 \cdot 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 28{,}8\pi \text{ cm}^3$

32. $V_{ci} = \pi \cdot 4^2 \cdot 12 \Rightarrow V_{ci} = 192\pi \text{ cm}^3$

$V_{co} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 32\pi \text{ cm}^3$

Como são 2 cones idênticos, o volume é $64\pi \text{ cm}^3$.

A diferença é de $128\pi \text{ cm}^3$.

33. $\left.\begin{matrix} 360° & — & 2\pi \cdot 18 \text{ cm} \\ \alpha & — & 2\pi \cdot 3 \text{ cm} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = 60°$

34. a) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 9 \Rightarrow V = 432\pi \text{ dm}^3$

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9^2 \cdot 12 \Rightarrow V = 324\pi \text{ dm}^3$

35. O comprimento da circunferência que contém o arco $\widehat{AB}$ é:

$3 \cdot \left(\dfrac{10\pi}{3} \text{ cm}\right) = 10\pi$ cm

Daí $10\pi = 2\pi \cdot g \Rightarrow g = 5$ cm

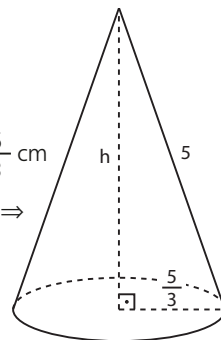
Como $2\pi r = \dfrac{10\pi}{3}$, obtemos $r = \dfrac{5}{3}$ cm

$5^2 = h^2 + \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow 25 - \dfrac{25}{9} = h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = \dfrac{200}{9} \Rightarrow h = \dfrac{10\sqrt{2}}{3}$ cm

$V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 \cdot \dfrac{10\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{250\pi\sqrt{2}}{81} \text{ cm}^3$

36. De $100\pi = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 12$, tem-se $r = 5$ cm.

De $g^2 = r^2 + h^2$, temos: $g^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow g = 13$ cm

$A_\ell = \pi rg \Rightarrow A_\ell = 65\pi \text{ cm}^2$

37. O semicírculo tem raio 28 cm e comprimento 28π cm. O cone tem geratriz de 28 cm e raio da base 14 cm, pois $2\pi r = 28\pi$.

a) De $g^2 = h^2 + r^2$, tem-se $h = 14\sqrt{3}$ cm.

b) Cada folha permite recortar 2 semicírculos, portanto serão usadas 60 folhas, no mínimo.

A área da folha é $56^2 \text{ cm}^2 = 3\,136 \text{ cm}^2$.

A área do círculo é $\pi \cdot (28 \text{ cm})^2 = 784\pi \text{ cm}^2 = 2\,352 \text{ cm}^2$.

A diferença, por folha, é de 784 cm^2 e no total de 60 folhas serão $47\,040 \text{ cm}^2$, ou $4{,}704 \text{ m}^2$.

38. De $g^2 = h^2 + r^2$, temos: $\left(\sqrt{53}\right)^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow h = 7$ cm.

O volume de cada taça, em cm^3, é $\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 7$.

O volume das 600 taças será $17\,600 \text{ cm}^3$, que correspondem a 17,6 litros.

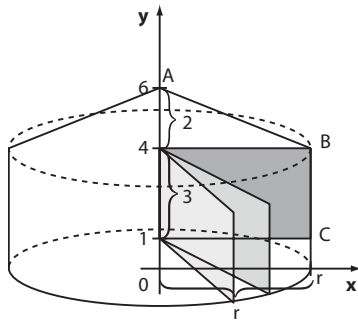
39. De $g^2 = r^2 + (1{,}5)^2$ e $g + r = 4{,}5$

$$\begin{cases} g^2 - r^2 = 1{,}5^2 \Leftrightarrow (g + r) \cdot (g - r) = 2{,}25 & (1) \\ g + r = 4{,}5 & (2) \end{cases}$$

(2) em (1) $\Rightarrow 4{,}5 \cdot (g - r) = 2{,}25 \Rightarrow g - r = \dfrac{1}{2}$ (3)

(2) e (3) $\Rightarrow r = 2$ m e $g = 2{,}5$ m

A área lateral é $\pi \cdot (2 \text{ m}) \cdot (2{,}5 \text{ m}) = 5\pi \text{ m}^2$.

40.

O sólido obtido é um cilindro encimado por um cone cuja base é congruente à base do cilindro.

Seja **r** a abscissa de **C**:

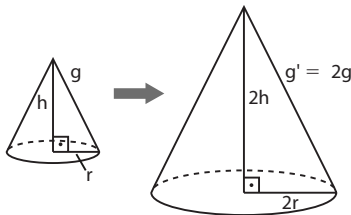
$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot 3$

$V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 2$

Daí $3\pi r^2 + \dfrac{2\pi r^2}{3} = \dfrac{275\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 11\pi r^2 = 275\pi \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$

A abscissa de **C** é 5.

41.

Como $(g')^2 = (2h)^2 + (2r)^2 = 4 \cdot \underbrace{(h^2 + r^2)}_{g^2}$, temos que $g' = 2 \cdot g$

a) $A_b = \pi r^2$ $\qquad A'_b = \pi \cdot (2r)^2 = 4\pi r^2$

$A_\ell = \pi rg$ $\qquad A'_\ell = \pi \cdot (2r) \cdot (2g) = 4\pi rg$

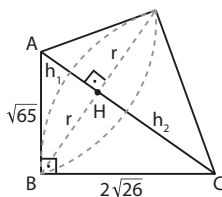
$A_t = A_b + A_\ell$ $\qquad A'_t = A'_b + A'_\ell = 4 \cdot \underbrace{(A_b + A_\ell)}_{A_t}$

Assim, a área fica multiplicada por 4.

b) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ $\qquad V' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot (2r)^2 \cdot 2h$

$V' = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 8r^2 \cdot h = 8 \cdot \underbrace{\dfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot h}_{V}$

Assim, o volume fica multiplicado por 8.

42.

Girando-se o $\triangle ABC$ em torno da hipotenusa $\overline{AC}$, têm-se 2 cones, com raio da base $\overline{BH}$, um deles de altura $\overline{AH}$ e geratriz $\overline{AB}$ e outro com geratriz $\overline{BC}$ e altura $\overline{HC}$.

$(h_1 + h_2)^2 = (\sqrt{65})^2 + (2\sqrt{26})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 + h_2 = 13 \Rightarrow h_2 = 13 - h_1$

Do sistema: $\begin{cases} (\sqrt{65})^2 = h_1^2 + r^2 \\ (2\sqrt{26})^2 = r^2 + (13 - h_1)^2 \end{cases}$

obtêm-se $h_1 = 5$ cm e $h_2 = 8$ cm.

Assim: $r^2 = 40$ cm²

$V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40 \cdot 5 + \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40 \cdot 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \dfrac{520\pi}{3}$ cm³

43. $A_t = \pi r \cdot (g + r) = 54\pi \Rightarrow r \cdot (g + r) = 54 \xRightarrow[g = 2r]{}$

$\Rightarrow r \cdot 3r = 54 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$ m

$h^2 + (3\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{6}$ m

44. a) Sejam:

$\mathbf{h_1}$: medida da altura do cone

$\mathbf{h_2}$: medida da altura do cilindro

$h_1 + h_2 = 15$ ①

$V_{cone} + V_{cilindro} = 325\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot h_1 + \pi \cdot 5^2 \cdot h_2 = 325\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow 25\pi \cdot \left(\dfrac{h_1}{3} + h_2\right) = 325\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{h_1}{3} + h_2 = 13$ ②

① em ② $\Rightarrow \dfrac{h_1}{3} + 15 - h_1 = 13 \Rightarrow \dfrac{2h_1}{3} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h_1 = 3$ m e $h_2 = 12$ m

A altura do cone mede 3 m.

b) $A_{silo} = A_{b\ (cilindro)} + A_{\ell\ (cilindro)} + A_{\ell\ (cone)}$ (*)

No cone, temos $g^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow g^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = \sqrt{34}$ m $\simeq 5{,}8$ m

$A_{b\ (cilindro)} = \pi \cdot 5^2 \Rightarrow A_{b\ (cilindro)} = 25\pi$ m²

$A_{\ell\ (cilindro)} = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 \Rightarrow A_{\ell\ (cilindro)} = 120\pi$ m²

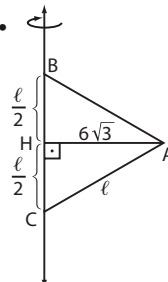
$A_{\ell\ (cone)} = \pi \cdot 5 \cdot 5{,}8 \Rightarrow A_{\ell\ (cone)} = 29\pi$ m²

Em (*), $A_{silo} = 25\pi + 120\pi + 29\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{silo} = 174\pi$ m² $= 174 \cdot 3{,}1$ m² $= 539{,}40$ m²

O custo de fabricação é $539{,}4 \cdot 200$ reais =

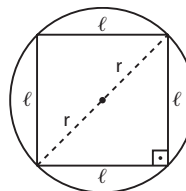
= 107 880 reais.

45.

Ao girar o $\triangle ABC$ em torno do lado $\overline{BC}$, obtêm-se dois cones de altura $\overline{BH} \equiv \overline{HC}$ e raio da base $\overline{AH}$, de medida $6\sqrt{3}$ cm.

$\overline{AH}$: altura do $\triangle ABC$

$\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \ell = 12$ cm

Logo, $V = 2 \cdot \left[\dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot (6\sqrt{3})^2 \cdot \dfrac{12}{2}\right] \Rightarrow V = 432\pi$ cm³

46. Sejam **r** e **h** as medidas do raio da base do cone e da altura do cone, respectivamente (**h** também é a medida da altura da pirâmide), e ℓ a medida da aresta da base da pirâmide.

$(2r)^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4r^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 2r^2 \Rightarrow \ell = r \cdot \sqrt{2}$

$V_{cone} = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

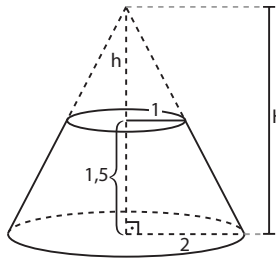
$V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot h \Rightarrow V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot (r\sqrt{2})^2 \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{pirâmide} = \dfrac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h$

A razão pedida é: $\dfrac{\dfrac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h}{\dfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h} = \dfrac{2}{\pi}$

47. 1º modo: $V = \dfrac{\pi \cdot 1{,}5}{3} \cdot (4 + 2 + 1) \Rightarrow V = \dfrac{7\pi}{2}$ cm³

2º modo:

Podemos obter o volume do tronco sem a fórmula:

$\dfrac{2}{1} = \dfrac{H}{h} \Rightarrow H = 2h$

$h + 1{,}5 = H$

$h + 1{,}5 = 2h \Rightarrow h = 1{,}5$ cm

$H = 3$ cm

$V_{\text{cone maior}} = \left(\dfrac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 3\right)\text{cm}^3 = 4\pi\ \text{cm}^3$

$V_{\text{cone menor}} = \left(\dfrac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1{,}5\right)\text{cm}^3 = 0{,}5\pi\ \text{cm}^3$

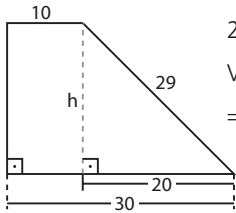
$V_{\text{tronco}} = 4\pi\ \text{cm}^3 - 0{,}5\pi\ \text{cm}^3 = \dfrac{7\pi}{2}\ \text{cm}^3$

Esse procedimento pode ser usado na resolução de todos os exercícios que envolvam o volume do tronco.

$g^2 = 1^2 + (1{,}5)^2 \Rightarrow g = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$ cm

$A_t = \pi \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{2} \cdot (2 + 1) + \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = \pi\left(5 + \dfrac{3\sqrt{13}}{2}\right)\text{cm}^2$

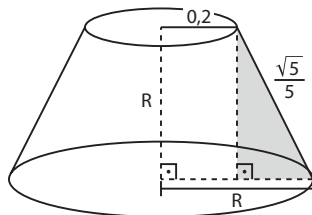
48.

$29^2 = h^2 + 20^2 \Rightarrow h = 21$ cm

$V = \pi \cdot \dfrac{21}{3} \cdot (30^2 + 30 \cdot 10 + 10^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 9\,100\pi$ cm³

49. $A_{\ell(\text{cilindro})} = 2\pi r \cdot h \Rightarrow A_{\ell(\text{cilindro})} =$

$= 2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4\ \text{m}^2 = 0{,}16\pi\ \text{m}^2 = \dfrac{4\pi}{25}\ \text{m}^2$

No triângulo sombreado:

$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = R^2 + (R - 0{,}2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{5} = R^2 + R^2 - \dfrac{2}{5}R + \dfrac{1}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow 25R^2 - 5R - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$ m

- $A_{\ell(\text{tronco})} = \pi \cdot g \cdot (R + r) \Rightarrow$

  $\Rightarrow A_{\ell(\text{tronco})} = \left(\pi \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5}\right)\right)\text{m}^2 = \left(\dfrac{3\pi\sqrt{5}}{25}\right)\text{m}^2$

- $A_{\text{total(coifa)}} = \left(\dfrac{4\pi}{25} + \dfrac{3\pi\sqrt{5}}{25}\right)\text{m}^2 = \dfrac{\pi \cdot (4 + 3\sqrt{5})}{25}\ \text{m}^2$

50. Cada vaso de vidro tem volume igual a:

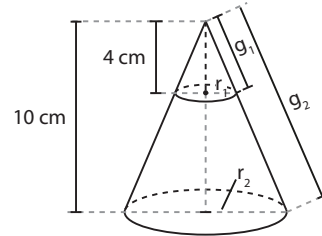
(40 cm) · (30 cm) · (20 cm) = 24 000 cm³

De $g^2 = h^2 + (R - r)^2$, tem-se que $h = 10\sqrt{15}$ cm e o outro vaso tem volume $\dfrac{\pi \cdot 10\sqrt{15}}{3} \cdot (30^2 + 30 \cdot 20 + 20^2) =$

$= 74\,100$, em cm³.

Serão necessários 4 vasos, pois $3 \cdot 24\,000 =$

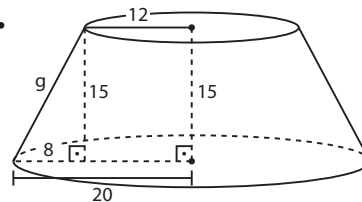
$= 72\,000 < 74\,100$.

51. Se a área de seção é 36π m², então $r_1 = 6$ m.

a) $\dfrac{4}{6} = \dfrac{10}{r_2} \Rightarrow r_2 = 15$ cm e $A_2 = \pi \cdot 15^2 \Rightarrow A_2 = 225\pi$ cm²

b) $V_1 = \dfrac{\pi}{3} \cdot 6^2 \cdot 4 \Rightarrow V_1 = 48\pi$ cm³

$V_2 = \dfrac{\pi}{3} \cdot 15^2 \cdot 10 \Rightarrow V_2 = 750\pi$ cm³

c) Como $\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{10}{4}$, segue que $\dfrac{g_2}{g_1} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$.

52.

$g^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g^2 = 289 \Rightarrow$

$\Rightarrow g = 17$ cm

$A_{\ell\ (\text{tronco})} = \pi \cdot g \cdot (R + r)$

$A_\ell = \pi \cdot 17 \cdot (20 + 12) \Rightarrow A_\ell = 1686{,}4\ \text{cm}^2 = 0{,}16864\ \text{m}^2$

Custo de fabricação de um abajur:

250 · 0,16864 + 40 = 82,16

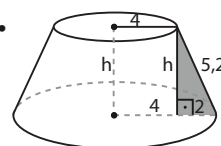
O custo de um abajur é R$ 82,16.

Custo do lote:

125 · 82,16 ⇒ 10 270,00

O custo do lote é R$ 10 270,00.

53. O círculo projetado de 400π dm² tem raio 20 dm. Por semelhança de triângulos, $\dfrac{20}{5} = \dfrac{d + 3}{3}$, de onde d = 9 dm e a distância pedida é d + 3 = 12, em dm.

54.

$A_t = 2 \cdot A_\ell \Rightarrow A_\ell + A_B + A_b = 2 \cdot A_\ell \Rightarrow$

$\Rightarrow A_B + A_b = A_\ell \Rightarrow \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 4^2 = \pi \cdot g \cdot (6 + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 52\pi = 10\pi\, g \Rightarrow g = \dfrac{52}{10}\ \text{m} = 5{,}2$ m

$5{,}2^2 = h^2 + 2^2 \Rightarrow h^2 = 23{,}04 \Rightarrow h = \sqrt{\dfrac{2\,304}{100}} \Rightarrow h =$

$= 4{,}8$ m

55. $d = 12 \text{ cm} \Rightarrow r = 6 \text{ cm}$

$A = 4\pi \cdot (6 \text{ cm})^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

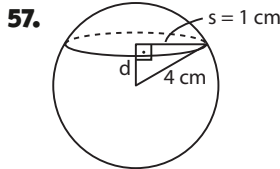
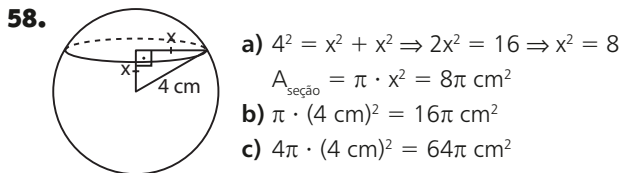
$V = \dfrac{4\pi \cdot 6^3}{3} \Rightarrow V = 288\pi \text{ cm}^3$

56. $4\pi r^2 = 576\pi \Rightarrow r^2 = \dfrac{576}{4} = 144 \Rightarrow r = 12 \text{ cm}$

$V = \dfrac{4\pi \cdot (12 \text{ cm})^3}{3} = 2\,304\pi \text{ cm}^3$

57.

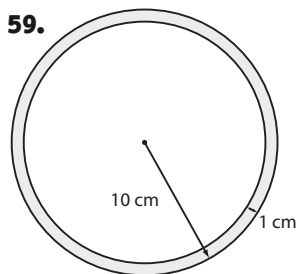
$4^2 = d^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{15} \text{ cm}$

58.

a) $4^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8$

$A_{seção} = \pi \cdot x^2 = 8\pi \text{ cm}^2$

b) $\pi \cdot (4 \text{ cm})^2 = 16\pi \text{ cm}^2$

c) $4\pi \cdot (4 \text{ cm})^2 = 64\pi \text{ cm}^2$

59.

1 dm = 10 cm

O raio da esfera oca mede 10 cm − 1 cm = 9 cm e seu volume é:

$\dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot (9 \text{ cm})^3 = 972\pi \text{ cm}^3$

60. $V_{paral.} = (4 \text{ m}) \cdot (2 \text{ m}) \cdot (1 \text{ m}) = 8 \text{ m}^3$

$V_{vaso} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi \cdot (0{,}6 \text{ m})^3}{3} = 0{,}144\pi \text{ m}^3$

número de vasos: $\dfrac{8}{0{,}144\pi} \simeq 17{,}69$

O número mínimo de vasos é 18.

61.

s: medida do raio da seção

a) $4^2 = 2^2 + s^2 \Rightarrow s^2 = 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow s = 2\sqrt{3} \text{ cm}$

$A_{seção} = \pi s^2 \Rightarrow A_{seção} = 12\pi \text{ cm}^2$

b) $2\pi s = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \text{ cm} = 4\pi\sqrt{3} \text{ cm}$

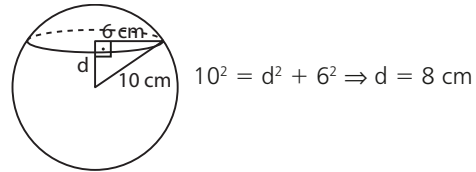
62. $A_{inicial} = 144\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6 \text{ cm}$

$A_{final} = 256\pi = 4\pi r'^2 \Rightarrow r'^2 = 64 \Rightarrow r' = 8 \text{ cm}$

Desse modo, a medida do raio deve ser aumentada em 2 cm.

63. $A_{seção} = 36\pi \Rightarrow \pi s^2 = 36\pi \Rightarrow s = 6 \text{ cm}$

$A_{sup.\ esférica} = 400\pi \Rightarrow 400\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 10 \text{ cm}$

$10^2 = d^2 + 6^2 \Rightarrow d = 8 \text{ cm}$

64. a) Cilindro: $A_b + A_\ell = \pi 2^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 8 = 4\pi + 32\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_b + A_\ell = 36\pi \text{ m}^2$ (observe que só uma base é "contada")

Hemisfério: $\left(\dfrac{4\pi \cdot 2^2}{2}\right) \text{m}^2 = 8\pi \text{ m}^2$

Quantidade de aço: $44\pi \text{ m}^2 = 44 \cdot 3{,}1 \text{ m}^2 = 136{,}4 \text{ m}^2$

b) $V_{recipiente} = V_{cilindro} + \dfrac{V_{esfera}}{2}$

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi = 32 \cdot 3{,}1 \Rightarrow$

$\Rightarrow V_{cilindro} = 99{,}2 \text{ m}^3$

$V_{esfera} = \dfrac{4\pi}{3} \cdot r^3 = \dfrac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \dfrac{32}{3} \cdot \pi \Rightarrow V_{esfera} = 33{,}0\overline{6} \text{ m}^3$

Assim, o volume do recipiente, em m^3, é:

$99{,}2 + \dfrac{33{,}0\overline{6}}{2} = 115{,}7\overline{3}$

65. a) Seja **n** o número de esferas menores que serão fundidas. Devemos ter:

$n \cdot V_{menor} \geqslant V_{maior}$

$n \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot 2^3 \geqslant \dfrac{4}{3}\pi \cdot 3^3$

$8n \geqslant 27 \Rightarrow n \geqslant \dfrac{27}{8}$, isto é, $n \geqslant 3{,}375$

Como **n** é inteiro positivo, o número mínimo de esferas menores que serão fundidas é 4.

b) O volume da sobra de ouro é:

$4 \cdot \dfrac{4}{3}\pi \cdot (2 \text{ cm})^3 - \dfrac{4}{3}\pi \cdot (3 \text{ cm})^3 = \left(\dfrac{128\pi}{3} - 36\pi\right) \text{cm}^3 =$

$= \dfrac{20\pi}{3} \text{ cm}^3 \simeq \dfrac{20 \cdot 3}{3} \text{ cm}^3 = 20 \text{ cm}^3$

Como a densidade é 19,3 g/cm³, a massa de ouro que sobra é 386 g (19,3 · 20 = 386), que será vendida ao preço, em reais, de 140 · 386 = 54 040.

66. 4 cm; h; $\sqrt{241}$ cm

$\left(\sqrt{241}\right)^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 241 - 16 = h^2 \Rightarrow h = 15 \text{ cm}$

$V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi\, 4^2 \cdot 15 \Rightarrow V_{cone} = 80\pi \text{ cm}^3$

$= 240 \text{ cm}^3$

Metade da bola de sorvete está dentro do cone e seu volume é:

$v = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\pi \cdot (4 \text{ cm})^3}{3} = \dfrac{128\pi}{3} \text{ cm}^3 = 128 \text{ cm}^3$

O volume da parte do cone sem sorvete é:

$V_{cone} - v = 240 \text{ cm}^3 - 128 \text{ cm}^3 = 112 \text{ cm}^3$

67. a) $R = 2r$

$\begin{cases} A' = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot (2r)^2 = 16\pi r^2 \\ A = 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow A' = 4 \cdot A$

$\begin{cases} V' = \dfrac{4\pi}{3} R^3 = \dfrac{4\pi}{3} \cdot (2r)^3 = \dfrac{32\pi\, r^3}{3} \\ V = \dfrac{4\pi\, r^3}{3} \end{cases} \Rightarrow V' = 8 \cdot V$

b) $R = \frac{r}{3}$

$A' = 4\pi \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^2 = 4\pi \frac{r^2}{9} = \frac{4\pi r^2}{9} = \frac{A}{9} \Rightarrow A' = \frac{A}{9}$

$V' = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{r}{3}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^3}{27} = \frac{1}{27} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{1}{27} \cdot V \Rightarrow$

$\Rightarrow V' = \frac{V}{27}$

68. a) $V_{cone} = \frac{1}{3} \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 1\,000\pi \Rightarrow V_{cone} = 3\,100 \text{ cm}^3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27}{8} = \frac{9\pi}{2} \Rightarrow V_{esfera} = 13{,}95 \text{cm}^3$; como foram colocadas 200 bolinhas, o volume ocupado por elas é $(200 \cdot 13{,}95) \text{ cm}^3 = 2\,790 \text{ cm}^3$

$V_{\text{líquido adicionado}} = 3\,100 \text{ cm}^3 - 2\,790 \text{ cm}^3 = 310 \text{ cm}^3$

b) O volume de cada nova bolinha é:

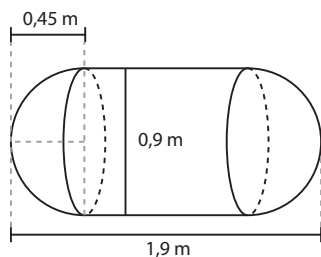
$V' = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} R^3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdot V$, sendo **V** o volume de cada bolinha usada na 1ª situação.

Assim, o volume de líquido, em cm³, que seria adicionado é:

$3\,100 - 200 \cdot \frac{V}{8} = 3\,100 - 25 \cdot V =$

$= 3\,100 - 25 \cdot 13{,}95 = 2\,751{,}25$

69. a) Observe que o raio da base do cilindro coincide com o raio da semiesfera. O comprimento, em m, do cilindro é:

$1{,}9 - 2 \cdot \frac{0{,}9}{2} = 1$

$A_{semiesfera} = \frac{4\pi R^2}{2} = 2 \cdot \pi \cdot (0{,}45)^2 = 6 \cdot 0{,}2025 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{semiesfera} = 1{,}215 \text{ m}^2$

$A_{\ell cilindro} = 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot 0{,}45 \cdot 1 = 0{,}9\pi \Rightarrow A_{\ell cilindro} = 2{,}7 \text{ m}^2$

A área da superfície do aquecedor é:

$(2 \cdot 1{,}215 + 2{,}7) \text{ m}^2 = 5{,}13 \text{ m}^2$

b) $V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$; como são 2 semiesferas, temos:

$V_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (0{,}45)^3 = 4 \cdot \left(\frac{45}{100}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^3 =$

$= 4 \cdot \frac{9^3}{20^3} \Rightarrow V_1 = \frac{729}{2\,000} \text{ m}^3$

$V_2 = V_{cilindro} = \pi \cdot \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot 1 = \frac{3 \cdot 81}{400} \Rightarrow V_2 = \frac{243}{400} \text{ m}^3$

$V = V_1 + V_2 = \frac{729}{2\,000} + \frac{243}{400} = \frac{1\,944}{2\,000} \Rightarrow$

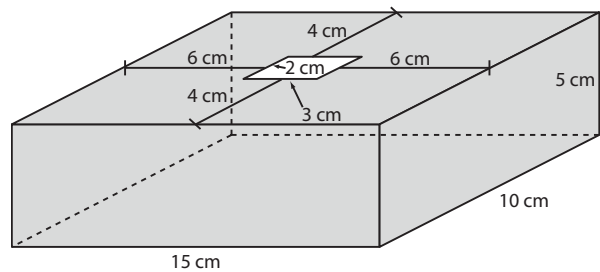
$\Rightarrow V = 0{,}972 \text{ m}^3 = 972 \text{ L}$

70. Devemos ter:

$\underbrace{\pi \cdot 70^2 \cdot h}_{\text{volume inicial, em cm}^3\text{, da água ao nível } \mathbf{h}} + \underbrace{\frac{4}{3}\pi \cdot 21^3}_{\text{volume da pedra, em cm}^3} = \underbrace{\pi \cdot 70^2 \cdot (h + x)}_{\text{volume final (água + pedra), em cm}^3\text{, ao nível } h + x}$

$\cancel{4\,900\pi h} + 12\,348\pi = \cancel{4\,900\pi h} + x \cdot \pi \cdot 4\,900 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12\,348\pi}{4\,900\pi} = x \Rightarrow x = 2{,}52 \text{ cm}$

71. Veja como fica a caixa montada com a abertura:

A abertura por onde serão colocados os sólidos é um retângulo de dimensões $(10 - 2 \cdot 4)$ cm = 2 cm e $(15 - 2 \cdot 6)$ cm = 3 cm.

I) passa, pois o diâmetro da base mede 3 cm e sua altura é 1 cm;

II) passa, pois a aresta do cubo mede 2 cm;

III) não passa, pois o diâmetro da esfera mede 3 cm e a abertura tem dimensões 3×2;

IV) passa, basta fazer a passagem pela base retangular cujas dimensões são 2 cm e 3 cm, com a aresta de 4 cm na vertical;

V) passa; o diâmetro da base mede 2 cm e a altura é compatível.

Alternativa *c*.

72. Observe que a altura do cilindro mede $6 \cdot (2{,}0 \text{ cm}) = 12{,}0$ cm e o raio da base do cilindro mede $\frac{(2{,}0 \text{ cm})}{2} = 1{,}0$ cm.

Assim, o volume do cilindro é $\pi \cdot (1 \text{ cm})^2 \cdot (12 \text{ cm}) = 12\pi \text{ cm}^3$.

O volume de uma esfera é $\frac{4}{3} \pi \cdot (1 \text{ cm})^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$.

O volume de ar pedido é $\left(12\pi - 6 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \text{cm}^2 = 4\pi \text{ cm}^3 \simeq$

$\simeq 12{,}56 \text{ cm}^3$.

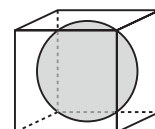
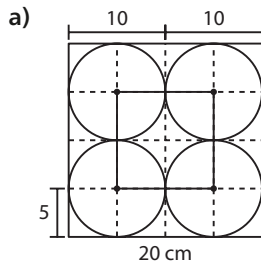
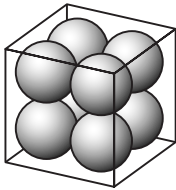
73. Observe que o diâmetro da esfera coincide com a aresta do cubo. Essa medida é $\sqrt{196}$ cm = 14 cm.

Assim, a área da superfície esférica é $4\pi \cdot (7 \text{ cm})^2 = 196\pi \text{ cm}^2$

74.

a)

10 10

5

20 cm

Se a aresta do cubo mede 20 cm, o diâmetro de cada esfera mede 10 cm e o raio mede 5 cm.
O quadrilátero formado é um quadrado de lado 10 cm; sua área é 100 cm².

b) O poliedro formado é um cubo de aresta 10 cm e o seu volume é $(10\text{ cm})^3 = 1\,000\text{ cm}^3$.

75. a) $A_{\text{sup. esférica}} = 4\pi \cdot (5\text{ cm})^2 = 100\pi\text{ cm}^2$

Observe que 30° equivalem a $\frac{1}{12}$ de 360°.

$A_{\text{fuso}} = \frac{1}{12} \cdot 100\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{fuso}} = \frac{25\pi}{3}\text{ cm}^2$

b) $A_{\text{sup. esférica}} = 4\pi \cdot (6\text{ cm})^2 = 144\pi\text{ cm}^2$

$A_{\text{fuso}} = \frac{1}{12} \cdot 144\pi\text{ cm}^2 = 12\pi\text{ cm}^2$

$A_{\text{cunha}} = A_{\text{fuso}} + 2 \cdot A_{\text{semicírculo}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{cunha}} = 12\pi + 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 6^2}{2}\right) = 12\pi + 36\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{cunha}} = 48\pi\text{ cm}^2$

$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi}{3} \cdot (6\text{ cm})^3 = 288\pi\text{ cm}^3$

$V_{\text{cunha}} = \frac{1}{12} \cdot 288\pi\text{ cm}^3 = 24\pi\text{ cm}^3$

76. $45° = \frac{1}{8} \cdot 360°$; $A_{\text{sup. esférica}} = 4\pi \cdot (10\text{ cm})^2 = 400\pi\text{ cm}^2$

$A_{\text{fuso}} = \frac{1}{8} \cdot 400\pi\text{ cm}^2 = 50\pi\text{ cm}^2$

77. $\frac{A_{\text{superfície esférica}}}{A_{\text{fuso}}} = \frac{324\pi}{54\pi} = 6 \Rightarrow \alpha = 60°$, pois

$\frac{360°}{6} = 60°$

78. Como $\frac{10°}{360°} = \frac{1}{36}$, concluímos que o volume da esfera é $36 \cdot 1\,078\text{ m}^3 = 38\,808\text{ m}^3$.

Daí:

$38\,808 = \frac{4\pi \cdot r^3}{3} \Rightarrow 38\,808 \cdot 3 = 4 \cdot \frac{22}{7} r^3 \Rightarrow r^3 = 9\,261 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 21\text{ m}$

$A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi \cdot (21\text{m})^2 = 1\,764\pi\text{ m}^2$

$A_{\text{cunha}} = \frac{1\,764\pi}{36} + \underbrace{\pi \cdot 21^2}_{\text{área de 2 semicírculos}} = 49\pi + 441\pi =$

$= 490 \cdot \frac{22}{7} \Rightarrow A_{\text{cunha}} = 1\,540\text{ m}^2$

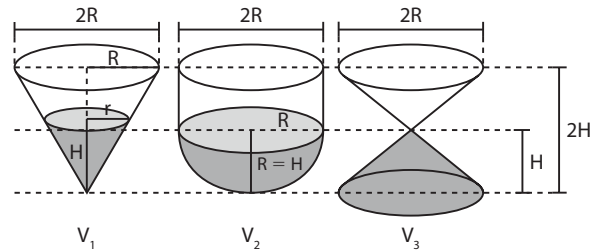
79. a) Cada fatia equivale a $\frac{1}{12}$ da melancia.

$A_{\text{casca da fatia}} = \frac{1}{12} \cdot 4\pi R^2\text{ cm}^2 = \frac{\pi R^2}{3}\text{ cm}^2$

b) Devemos determinar a área de uma cunha de 30° em uma esfera de raio **R**:

$A_{\text{cunha}} = A_{\text{fuso}} + \underbrace{2 \cdot \frac{\pi R^2}{2}}_{\text{2 semicírculos}} = \frac{\pi R^2}{3} + \pi R^2 = \frac{4\pi R^2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{\text{cunha}} = \frac{4\pi R^2}{3}\text{ cm}^2$

Desafio

$\mathbf{V_1}$ é o volume do cone de raio **r** com líquido até a altura **H**.
Notemos que:

$$\frac{R}{r} = \frac{2H}{H} \Rightarrow r = \frac{R}{2}$$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{4} \cdot H\text{; como } R = H\text{, temos:}$$

$$V_1 = \frac{\pi R^2 \cdot R}{12} = \frac{\pi R^3}{12} = \frac{1}{12} \cdot \pi R^3$$

$\mathbf{V_2}$ é o volume de uma semiesfera:

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi R^3$$

$\mathbf{V_3}$ é o volume de um cone de raio **R** e altura H = R:

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{\pi R^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^3$$

Como $\frac{1}{12} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$, segue que $V_1 < V_3 < V_2$.

Alternativa *b*.

CAPÍTULO 10 Análise Combinatória

Exercícios

1. $5 \cdot 3 = 15$

2. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

3. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 =$

(1ª questão, 2ª questão, 3ª questão, …, 12ª questão)

$= 3^{12} = 531\,441$ (531 441 possibilidades)

4. $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ (60 possibilidades)

5. a) $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} = 9 \cdot 10^4 =$

$= 90\,000$ (90 000 números)

b) $\underline{9} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underline{10} \cdot \underset{\text{ímpar}}{\underline{5}} = 5 \cdot 9 \cdot 10^3 =$

$= 45\,000$ (45 000 números)

c) Devemos saber quantos números existem entre 71 266 e 99 999, incluindo-os. Temos:
99 999 − 71 266 + 1 = 28734 (28 734 números)

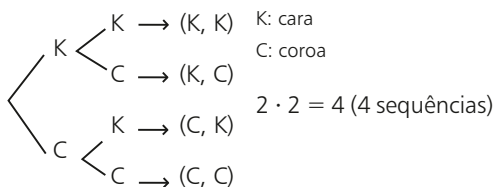
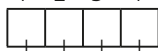
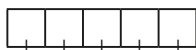
d) $\underline{1} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} =$
= 3 024 (3 024 números)

6. a) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 = 4\,096$

b) $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = 2\,048$ (4: par)

c) Números com algarismos distintos: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$; a porcentagem é: $\frac{1\,680}{4\,096} \simeq 0{,}4101 \simeq 41{,}01\%$

7. a)
K → K → (K, K)
K → C → (K, C)
C → K → (C, K)
C → C → (C, C)

K: cara
C: coroa

$2 \cdot 2 = 4$ (4 sequências)

b) 1º 2º 3º 4º
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ (16 sequências)
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ (32 sequências)
Para 10 lançamentos: $2^{10} = 1\,024$ (1 024 sequências)

c) Generalizando o item *b*, para **n** lançamentos temos 2^n sequências. Daí:
$2^n = 4^{19} \Rightarrow 2^n = (2^2)^{19} \Rightarrow n = 38$

8. a) Excluímos: 1, 9 e 6; temos: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ (840 opções de senha)

b) Excluímos 1, 9, 5 e 4:
$\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 360$ (360 opções)

c) Excluímos 1 e 9: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$ (1 680 opções)

9. a) $\underbrace{\underline{26} \cdot \underline{26} \cdot \underline{26}}_{\text{letras}} \cdot \underbrace{\underline{10} \cdot \underline{9} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7}}_{\text{algarismos}} =$
$= 26^3 \cdot 5\,040 = 88\,583\,040$ (88 583 040 placas)

b) $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 78\,624\,000$ (78 624 000 placas)

c) $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{usando apenas A, E, I, O, U}} \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}_{\text{usando os algarismos 0, 2, 4, 6, 8 sem repetição}} = 15\,000$ (15 000 placas)

d) $\underbrace{25 \cdot 25 \cdot 25}_{\text{usando todas as letras, exceto o J}} \cdot \underbrace{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}_{\text{usando 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6}} = 25^3 \cdot 7^4 =$
= 37 515 625 (37 515 625 placas)

e) Para os quatro algarismos ímpares temos as seguintes possibilidades de ordem crescente:
1 − 3 − 5 − 7 ou 1 − 3 − 5 − 9 ou 1 − 3 − 7 − 9 ou 1 − 5 − 7 − 9 ou 3 − 5 − 7 − 9
Para cada uma dessas cinco possibilidades, o número de placas possíveis é:
$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 26^3 = 17\,576$
Assim, o número de placas distintas procurado é:
$5 \cdot 17\,576 = 87\,880$

10. a) $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$

b) $\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 60$

c) $\underset{\neq 0}{\underline{4}} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} = 48$

d) Há dois casos para considerar:
1º) números da forma (par, ímpar, par):
$4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ (80 possibilidades) (4: sem o zero)
2º) números da forma (ímpar, par, ímpar):
$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ (100 possibilidades)
Assim, ao todo, podem ser formados 180 números (80 + 100 = 180).

11. a) Números pares que terminam por 0:
$\underline{6} \cdot \underline{7} \cdot \underline{1} = 42$
Números pares que terminam por 2, 4 e 6:
$\underline{6} \cdot \underline{7} \cdot \underline{3} = 126$
Ao todo, são 168 números (42 + 126 = 168).

b) Números pares que terminam por 0:
$\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{1} = 30$
Números pares que terminam por 2, 4 ou 6:
$\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{3} = 75$
Ao todo, há 105 números (30 + 75 = 105).

c) Números que terminam por 0:
$\underline{6} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{1} = 120$
Números que terminam por 5:
$\underset{\neq 0,\ \neq 5}{\underline{5}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underset{\text{só pode ser 5}}{\underline{1}} = 100$
Temos, ao todo, 220 números (120 + 100 = 220).

12.
32 rapazes (**R**):
- $\frac{3}{8} \cdot 32 = 12$ sabem dançar
- 20 não sabem

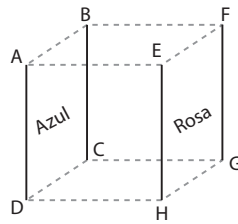
40 moças (**M**):
- $0{,}8 \cdot 40 = 32$ sabem dançar
- 8 não sabem

a) Devemos formar uma sequência do tipo (R, M) em que **R** pode ser escolhido de 20 modos distintos e **M** de 8 maneiras distintas. Pelo PFC, o número de sequências é: $20 \cdot 8 = 160$.

b) Há dois casos:
1º) O rapaz sabe dançar e a moça não:
$12 \cdot 8 = 96$ (96 pares)
2º) A moça sabe dançar e o rapaz não:
$32 \cdot 20 = 640$ (640 pares)
Assim há, ao todo, 736 opções de pares (96 + 640 = = 736).

13. 1º modo:

Total de possibilidades para pintar as 4 paredes sem restrição: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Número de possibilidades com as paredes azul e rosa de frente uma para outra:

O resultado procurado é, portanto, $24 - 4 - 4 = 16$.

2º modo:

Pintando a face ABCD de azul, temos:

- face EFGH: 2 opções (verde ou branco)
- face ADEH: 2 opções (rosa ou a cor *não* usada em EFGH)
- face BCFG: 1 opção

Temos: $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ (4 maneiras)

Como qualquer uma das outras três faces pode ser pintada de azul, o resultado, por analogia, é $4 \cdot 4 = 16$.

Alternativa *b*.

14. a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

15. O Recruta Zero pode colocar sua carta em 3 "destinos" possíveis; o 2º soldado também tem 3 opções de envio e assim por diante.

Assim, o resultado procurado é $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$.

16. Sejam: $\begin{cases} \mathbf{s}\text{: número de saias} \\ \mathbf{p}\text{: número de pares de sapato} \end{cases}$

número de combinações para se vestir:

$10 \cdot s \cdot p = 420 \Rightarrow s \cdot p = 42$

Devemos encontrar os possíveis valores naturais de **s** e **p** que satisfazem essa equação, lembrando que $s \neq 1$ e $p \neq 1$.

s	p
2	21
3	14
6	7
7	6
14	3
21	2

17. Temos 5 algarismos ímpares: 1, 3, 5, 7 e 9.

- Com um algarismo, temos 5 números.
- Com dois algarismos, temos 25 números ($5 \cdot 5 = 25$).
- Com três algarismos, temos 125 números ($5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$).

Como $5 + 25 + 125 = 155$, o 156º número é 1 111 e assim o 157º número é 1 113.

Alternativa *d*.

18. a) Se a conexão for em São Paulo:

$\underline{4} \cdot \underline{5} = 20$ (4: Brasília-São Paulo; 5: São Paulo-Buenos Aires)

Se a conexão for no Rio de Janeiro:

$\underline{4} \cdot \underline{3} = 12$

Se a conexão for em Curitiba: $\underline{2} \cdot \underline{4} = 8$

Total: $20 + 12 + 8 = 40$

b) Conexão em São Paulo: 4 opções (**A**, **B**, **C** ou **D**)

Conexão no Rio de Janeiro: 2 opções (**B** ou **C**)

Conexão em Curitiba: 2 opções (**A** ou **B**)

Total: $4 + 2 + 2 = 8$.

19. Como $x = \frac{a + b}{2}$, sabemos que **x** resultará inteiro se o numerador $a + b$ for par. Para que a soma resulte par, podem ocorrer:

1º) **a** é par e **b** é par: **a** pode ser escolhido de 2 maneiras e **b** também, num total de 4 possibilidades ($2 \cdot 2 = 4$).

2º) **a** é ímpar e **b** é ímpar: **a** pode ser escolhido de 3 maneiras, o mesmo ocorrendo com **b**, num total de 9 possibilidades ($3 \cdot 3 = 9$).

Assim, o resultado procurado é: $4 + 9 = 13$.

20. a) $\underline{1} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 81$ (1: só pode ser "·")

b)

2 símbolos: $\underline{3} \cdot \underline{3} = 9$

3 símbolos: $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 27$

4 símbolos: $\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} = 81$

total: 117

c) $\underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} = 6$

d) Com exatamente três "·":

8 possibilidades.

Com os quatro "·" só há uma única sequência, totalizando 9 casos possíveis ($8 + 1 = 9$).

21. a) $2 \cdot 4 = 8$ (8 opções distintas) (2: transporte; 4: hotel)

b) $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ (16 opções distintas) (2: transporte; 4: hotel; 2: seguro)

22. a) Falsa; usando cor 1 em **A**, em **B** devemos usar cor 2 e em **C** cor 3; em **D** podemos usar novamente a cor 1. Assim, o número mínimo de cores é 3.

b) Verdadeira; iniciando com: **A**: 4 opções; **B**: 3 opções; **C**: 2 opções e **D**: 1 opção. Pelo PFC, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (24 possibilidades).

c) Falsa; iniciando com **A**: 4 opções; **B**: 3 opções; **C**: 2 opções e **D**: 2 opções (pode ser igual à cor usada em A ou pode ser uma 4ª cor). Temos: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ (48 possibilidades).

d) Verdadeira; iniciando com **A**: 5 opções; **B**: 4 opções; **C**: 3 opções e **D**: 1 opção. Temos: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ (60 possibilidades).

e) Verdadeira; veja item *a*.

23. Podemos ter:
1º) **A → B → D**: $3 \cdot 2 = 6$ (6 possibilidades)
2º) **A → C → D**: $4 \cdot 3 = 12$ (12 possibilidades)
3º) **A → B → C → D**: $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ (36 possibilidades)
4º) **A → C → B → D**: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ (32 possibilidades)
Ao todo existem 86 opções distintas ($6 + 12 + 36 + 32 = 86$).

24. a)

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Um divisor de 120 é da forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ em que $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$ e $c \in \{0, 1\}$. Assim, podemos fazer 16 escolhas distintas ($4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$); 120 possui 16 divisores positivos.

b) $3\,780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
O número de divisores positivos é $3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

c) $48 = 2^4 \cdot 3$; $15 = 3 \cdot 5$
$48^5 \cdot 15^6 = (2^4 \cdot 3)^5 \cdot (3 \cdot 5)^6 = 2^{20} \cdot 3^5 \cdot 3^6 \cdot 5^6 = 2^{20} \cdot 3^{11} \cdot 5^6$
O número de divisores positivos é $21 \cdot 12 \cdot 7 = 1\,764$.

25. a) $1\,125 = 3^2 \cdot 5^3$
$1\,125 \cdot 2^n = 3^2 \cdot 5^3 \cdot 2^n$; esse número possui:
$3 \cdot 4 \cdot (n + 1)$ divisores positivos, isto é:
$12 \cdot (n + 1) = 84 \Rightarrow n = 6$

b) $$\begin{cases} 2 = 1 \cdot 2 \\ 4 = 2^2 \\ 6 = 2 \cdot 3 \\ 8 = 2^3 \\ 10 = 2 \cdot 5 \\ 12 = 2^2 \cdot 3 \\ 14 = 2 \cdot 7 \\ 16 = 2^4 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \\ 20 = 2^2 \cdot 5 \end{cases}$$

O produto $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 18 \cdot 20$ é igual a:
$2 \cdot 2^2 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 2^3 \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 7) \cdot 2^4 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (2^2 \cdot 5) = 2^{18} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
O número de divisores positivos é:
$19 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 570$

26. a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$
b) $5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320$
c) Vamos supor que em cada uma das "extremidades" seja usada a cor $\mathbf{C_1}$; para o 2º retângulo há 4 opções de escolha e para o 3º retângulo há 3 opções de escolha. Teremos 12 possibilidades ($1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$).
Se a cor usada nas extremidades fosse $\mathbf{C_2}$, teríamos, pelo mesmo raciocínio, 12 possibilidades e assim por diante. Como há 5 cores disponíveis, temos 60 possibilidades distintas ($5 \cdot 12 = 60$).

27. 1ª etapa

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$ (5 040 opções)

2ª etapa

$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 67\,600$ (67 600 opções)

É importante observar que o número de possibilidades para a 2ª etapa refere-se apenas à tentativa correta, e não para todas as 5 040 tentativas. Assim, o número máximo de tentativas é: $5\,040 + 67\,600 = 72\,640$

$$\begin{cases} 1 \text{ tentativa} \text{ --- } 30 \text{ s} \\ 72\,640 \text{ --- } x \end{cases} \Rightarrow x = 2\,179\,200 \text{ s}$$

Como 1 h contém 3 600 s, teríamos $\frac{2\,179\,200}{3\,600}$ h $= 605{,}33...$ h, ou seja, 605 horas e 20 minutos.

28. a) 720
b) 24
c) $1 + 1 = 2$
d) $6 - 2 = 4$
e) $5\,040 - 120 = 4\,920$
f) $5 \cdot 6 = 30$

29. a) $\frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 56$

b) $\frac{\cancel{9!}}{10 \cdot \cancel{9!}} = \frac{1}{10}$

c) $\frac{\cancel{3!}}{4 \cdot \cancel{3!}} + \frac{\cancel{4!}}{5 \cdot \cancel{4!}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$

d) $\frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2} = 21$

e) $\frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!} \cdot 2} = 190$

f) $\frac{8 \cdot \cancel{7!} \cdot \cancel{6!}}{\cancel{7!} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}} = \frac{8}{7}$

30. a) $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9! + 9!}{10 \cdot 9!} = \frac{\cancel{9!}\,(110 + 1)}{10 \cdot \cancel{9!}} = \frac{111}{10}$

b) $17 \cdot 16! - 17 \cdot 16! = 0$

c) $\frac{40 \cdot 39! - 39!}{41 \cdot 40 \cdot 39!} = \frac{\cancel{39!}\,(40 - 1)}{41 \cdot 40 \cdot \cancel{39!}} = \frac{39}{1\,640}$

d) $\frac{\cancel{85!} \cdot 85 \cdot 84 \cdot \cancel{83!}}{86 \cdot \cancel{85!} \cdot \cancel{83!}} = \frac{85 \cdot 84}{86} = \frac{3\,570}{43}$

31. a) $a = 2$ e $b = 3 \Rightarrow 5! \neq 2! + 3! = 2 + 6 = 8$ **(F)**
b) $a = 3$ e $b = 2 \Rightarrow 1! \neq 3! - 2! = 6 - 2 = 4$ **(F)**
c) $a = 3 \Rightarrow 6! \neq 2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$ **(F)**
d) $(a!)^2 = a! \cdot a!$ **(V)**
e) $a = 3$ e $b = 2 \Rightarrow 6! \neq 3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 12$ **(F)**

32. a) $\frac{(n + 2) \cdot \cancel{(n + 1)!}}{\cancel{(n + 1)!}} = n + 2$

b) $\frac{\cancel{(n - 3)!}}{(n - 2) \cdot \cancel{(n - 3)!}} = \frac{1}{n - 2}$

c) $\frac{(n + 1) \cdot n! + n!}{n!} = \frac{\cancel{n!}\,(n + 1 + 1)}{\cancel{n!}} = n + 2$

d) $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! - (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-1) \cdot (n-2)! + (n-2)!} =$

$= \dfrac{\cancel{(n-2)!} \cdot (n^2 - n - n + 1)}{\cancel{(n-2)!} \cdot (n - 1 + 1)} = \dfrac{(n-1)^2}{n}$

33. a) $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 6 \Rightarrow \dfrac{(n+2) \cdot (n+1) \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 3n - 4 = 0$ ⟨ $n = 1$ ou $n = -4$ não convém

$S = \{1\}$

b) $n! = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 5;\ S = \{5\}$

c) $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 42 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 - n - 42 = 0$ ⟨ $n = 7$ ou $n = -6$ não convém

$S = \{7\}$

d) $\dfrac{(n+2) \cdot (n+1)! - (n+1)!}{n!} = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(n+2-1) \cdot (n+1)!}{n!} = 25 \Rightarrow \dfrac{(n+1)^2 \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 2n - 24 = 0$ ⟨ $n = 4$ ou $n = -6$ não convém

$S = \{4\}$

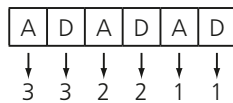
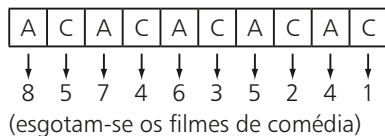
e) Como $0! = 1$ e $1! = 1$, podemos ter:
$(n - 5 = 0 \Rightarrow n = 5)$ ou $(n - 5 = 1 \Rightarrow n = 6)$
$S = \{5, 6\}$

f) Seja $n! = m$; segue a equação do 2º grau:
$m^2 - 100m - 2\,400 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow m = 120$ ou $m = -20$ (não serve)
Logo, $n! = 120 \Rightarrow n = 5$
$S = \{5\}$

34. Considerando **A** filme de ação, **C** filme de comédia e **D** filme de drama, devemos ter:

A	C	A	C	A	C	A	C	A	C
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	5	7	4	6	3	5	2	4	1

(esgotam-se os filmes de comédia)

A	D	A	D	A	D
↓	↓	↓	↓	↓	↓
3	3	2	2	1	1

(esgotam-se todos os lançamentos)
O número de maneiras é:
$8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 =$
$= 8! \cdot 5! \cdot 3!$
Alternativa *b*.

35. a) $P_3 = 3! = 6$
b) $P_4 = 4! = 24$
c) $P_6 = 6! = 720$
d) $P_9 = 9! = 362\,880$
e) $P_5 = 5! = 120$
f) $P_{10} = 10! = 3\,628\,800$

36. $P_4 = 4! = 24$ ou, pelo PFC, $\underbrace{4}_{1º} \cdot \underbrace{3}_{2º} \cdot \underbrace{2}_{3º} \cdot \underbrace{1}_{4º} = 24$

37. a) $P_9 = 9! = 362\,880$

b) $\underset{\text{vogal}}{4}\ \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _\ _\ _}_{P_8} = 4 \cdot 8! =$
$= 161\,280$

c) $\underset{\text{consoante}}{5}\ \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _\ _}_{P_7}\ \underset{\text{consoante}}{4} =$
$= 5 \cdot 4 \cdot 7! = 20 \cdot 7! = 100\,800$

d) | CON | Q | U | I | S | T | A | $\rightarrow$ 7 blocos
$P_7 = 7! = 5\,040$

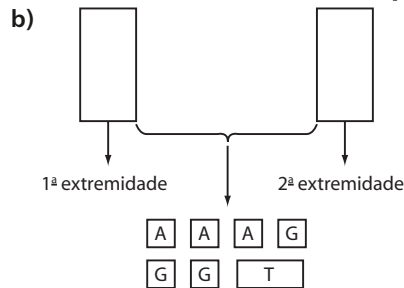
e) Do total de anagramas possíveis, metade tem a letra **C** antes da letra **A** e a outra metade tem o contrário. A resposta é 181 440.

f) | CON | QUIS | TA |
- 3 blocos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- dentro de cada bloco: $P_3 \cdot P_4 \cdot P_2 = 288$

O total pedido é: $6 \cdot 288 = 1\,728$

38. a) Devemos permutar 5 cidades; $P_5 = 5! = 120$
b) __ __ __ __ Petrolina: $P_4 = 4! = 24$

39. a) Consideremos os 5 livros de Álgebra como um só livro ($\mathbf{L}_1$), os 3 de Geometria como um só livro ($\mathbf{L}_2$) e os 2 de Trigonometria como um só livro ($\mathbf{L}_3$). Devemos, então, permutar $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ e $\mathbf{L}_3$, em um total de 6 configurações ($P_3 = 3! = 6$). Mas, para cada uma dessas configurações, devemos permutar os livros em $\mathbf{L}_1$, os livros em $\mathbf{L}_2$ e os livros em $\mathbf{L}_3$, totalizando: $6 \cdot \underbrace{5!}_{P_5} \cdot \underbrace{3!}_{P_3} \cdot \underbrace{2!}_{P_2} = 8\,640$

b)

1ª extremidade: 5 opções
2ª extremidade: 4 opções
"miolo": Devemos permutar 7 blocos e, além disso, permutar dentro do bloco de Trigonometria: $7! \cdot 2$
O resultado procurado é, portanto: $5 \cdot 4 \cdot 7! \cdot 2 =$
$= 201\,600$ (201 600 modos)

40. a) 7 semanas
b) $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$ (5 040 ordens distintas)
c) | moças | rapazes |
Temos: $\underbrace{P_3 \cdot P_4}_{\text{"dentro" dos blocos}} = 6 \cdot 24 = 144$ (144 maneiras)

d) Devemos obrigatoriamente iniciar por rapaz. Temos:
R – M – R – M – R – M – R
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$ (144 modos distintos)

41. Total de anagramas (sem restrições): $P_6 = 6! = 720$
Número de anagramas em que as vogais estão juntas:

| Q | vogais | J |

$\underbrace{P_3}_{\text{entre}} \cdot \underbrace{P_4}_{\text{dentro}} = 6 \cdot 24 = 144$

A diferença $720 - 144 = 576$ fornece o número de anagramas em que as vogais não aparecem todas juntas.

42. **a)** $n! = 24 \Rightarrow n = 4$; $S = \{4\}$

b) $\frac{n!}{(n-2)!} = 506 \Rightarrow n(n-1) = 506 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 - n - 506 = 0 \xRightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 23$; $S = \{23\}$

43. **a)** Começando por **A** existem 120 anagramas (5! = 120).
Começando por **O** existem 120 anagramas.
Começando por **P** existem 120 anagramas.
Assim, o primeiro anagrama que começa por **R** é precedido de 360 anagramas (120 + 120 + 120 = = 360) e sua posição é a 361ª.

b) Começando por **A**, há 120 anagramas ($P_5 = 5! = 120$).
Começando por **O**, há 120 anagramas ($P_5 = 5! = 120$).
Começando por PA, há 24 anagramas ($P_4 = 4! = 24$).
Começando por PO, há 24 anagramas ($P_4 = 4! = 24$).
Começando por PRAO, há 2 anagramas ($P_2 = 2$).
Começando por PRAS, há 2 anagramas ($P_2 = 2$).
Assim, o anagrama PRATOS é precedido de 292 anagramas (120 + 120 + 24 + 24 + 2 + 2 = 292), e sua posição é a 293ª.

c)
- Da 1ª à 120ª posição temos os anagramas que começam por **A**.
- Da 121ª à 240ª posição temos os anagramas que começam por **O**.
- Da 241ª à 360ª posição temos os anagramas que começam por **P**.
- Da 361ª à 480ª posição temos os anagramas que começam por **R**.

Começando por SA temos 24 anagramas ($P_4 = 4! = 24$), posição 481ª até a 504ª. As últimas posições (que começam por SAT) são:
504ª → SATRPO
503ª → SATROP
502ª → SATPRO
501ª → SATPOR
500ª → SATORP
499ª → SATOPR
Logo, o anagrama procurado é SATORP.

44. **a)** B __ __ __ __ __: $P_5 = 5! = 120$

b) B __ __ __ __ L: $P_4 = 4! = 24$

c) Começam por **B**:
B __ __ __ __ __: $P_5 = 120$
Terminam por **L**:
__ __ __ __ __ L: $P_5 = 120$
Começam por **B** e terminam por **L**:
B __ __ __ __ L : $P_4 = 24$
O número de anagramas que começam por **B** ou terminam por **L** é: 120 + 120 − 24 = 216

45. Para cada elemento de **A** há 4 opções de "ligação": **p**, **q**, **r**, **s**.
Temos, portanto: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ (256 funções)

46. $\underset{\text{presidente}}{10} \cdot \underset{\text{vice}}{9} = 90$ ou $A_{10,\,2} = \frac{10!}{8!} = 90$

47. **a)** $\underbrace{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}_{\text{letras}} \cdot \underbrace{10 \cdot 9}_{\text{algarismos}}$

$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 = 32\,292\,000$

ou $A_{26,\,4} \cdot A_{10,\,2} = \frac{26!}{22!} \cdot \frac{10!}{8!} = 32\,292\,000$

b) $\overbrace{A_{21,\,4}}^{\text{consoantes}} \cdot \overbrace{A_{4,\,2}}^{\text{algarismos}}$

$143\,640 \cdot 12 = 1\,723\,680$

48. **a)** $10 \cdot 9 \cdot 8$ ou $A_{10,\,3} = \frac{10!}{7!} = 720$

b) $\frac{1}{\text{Natal}} \cdot \frac{9}{2^{\circ}} \cdot \frac{8}{3^{\circ}} = 9 \cdot 8 = 72$ ou $A_{9,\,2} = \frac{9!}{7!} = 72$

c) $9 \cdot 8 \cdot 7 = 72 \cdot 7 = 504$ ou $A_{9,\,3} = \frac{9!}{6!} = 504$

49. Como **A** e **B** se enfrentam duas vezes, isto é, $\underbrace{(A, B)}_{\text{campo de A}} \neq \underbrace{(B, A)}_{\text{campo de B}}$, o número total de jogos é:

$A_{15,\,2} = \frac{15!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210$

A final ocorrerá em 2 jogos, totalizando 212 jogos.

50. Financeiro: 2 opções
Presidente: 7 opções (exclui-se o escolhido para diretor financeiro)
Vice: 6 opções
Total: $2 \cdot 7 \cdot 6 = 84$

51. 1ª parte: $P_3 = 3! = 6$ (6 opções distintas de respostas)
2ª parte: $A_{7,\,2} = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$ (42 opções distintas de respostas)
Total: $6 \cdot 42 = 252$ (252 maneiras distintas)

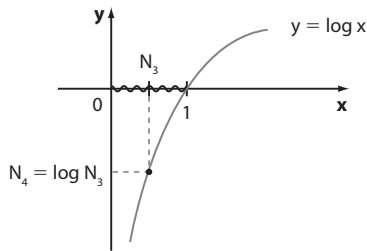
52. **a)** $A_{8,\,3} = \frac{8!}{5!} = 336$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

b) $A_{5,\,3} = \frac{5!}{2!} = 60$ ou $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

c) Vamos supor que o nadador brasileiro receba medalha de ouro. Para distribuir as duas outras medalhas existem 42 opções ($A_{7,\,2} = 7 \cdot 6 = 42$). Como o nadador brasileiro pode receber também a medalha de prata ou de bronze, o resultado pedido é $3 \cdot 42 = 126$.

d) Podemos ter:
- 1º e 2º colocados europeus e 3º colocado norte-americano:

$\underset{1^{\circ}}{5} \cdot \underset{2^{\circ}}{4} \cdot \underset{3^{\circ}}{2} = 40$

3ª vez: $N_3 = \log N_2$; como $1 < N_2 < 2$, $\log N_2$ é um número entre 0 e 1, isto é, $0 < N_3 < 1$
4ª vez: $N_4 = \log N_3$; como $0 < N_3 < 1$, $\log N_3$ é um número negativo, isto é, $N_4 < 0$

5ª vez: $N_5 = \log N_4$ não existe, pois $N_4 < 0$
Na calculadora:
log 20 000 000 000 = 10,30102
log 10,30102 = 1,01288
log 1,01288 = 0,00555
log 0,00555 = −2,25505
log −2,25505 = MATH ERROR

Progressões

Exercícios

1. **a)** $a_2 = -3 + 5 \cdot 2 = 7$ **c)** $a_{11} = -3 + 5 \cdot 11 = 52$
b) $a_4 = -3 + 5 \cdot 4 = 17$

2. $a_1 = 2 \cdot 3^1 = 6$; $a_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$; $a_3 = 2 \cdot 3^3 = 54$; $a_4 = 2 \cdot 3^4 = 162$.

3. **a)** $n = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \cdot 2 = 6$; $n = 2 \Rightarrow f(2) = 3 \cdot 3 = 9$; $n = 3 \Rightarrow f(3) = 3 \cdot 4 = 12$; $n = 4 \Rightarrow f(4) = 3 \cdot 5 = 15$; ...
A sequência associada a **f** é: (6, 9, 12, 15, ...).
b) $g(1) = 1 - 2 + 4 = 3$; $g(2) = 4 - 4 + 4 = 4$; $g(3) = 9 - 6 + 4 = 7$; $g(4) = 16 - 8 + 4 = 12$; ...
A sequência associada a **g** é: (3, 4, 7, 12, ...).

4. **a)** $a_1 = 143 - 4 = 139$; $a_2 = 143 - 8 = 135$; $a_3 = 143 - 12 = 131$; a soma é: $139 + 135 + 131 = 405$.
b)
- $71 = 143 - 4n \Rightarrow 4n = 72 \Rightarrow n = 18$; 71 pertence à sequência; 18º termo.
- $-345 = 143 - 4n \Rightarrow 4n = 488 \Rightarrow n = 122$; −345 pertence à sequência; 122º termo.
- $-195 = 143 - 4n \Rightarrow 4n = 338 \Rightarrow n = 84{,}5 \notin \mathbb{N}^*$; −195 não pertence à sequência.

5. $a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 = 2 \cdot (-5) + 3 = -7$
$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 = 2 \cdot (-7) + 3 = -11$
$a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 = 2 \cdot (-11) + 3 = -19$
$a_5 = 2 \cdot a_4 + 3 = 2 \cdot (-19) + 3 = -35$
A sequência é: (−5, −7, −11, −19, −35, ...).

6. $a_1 = 2$; $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$; $a_3 = 3 \cdot 6 = 18$; $a_4 = 3 \cdot 18 = 54$; $a_5 = 3 \cdot 54 = 162$; $a_6 = 3 \cdot 162 = 486$.

7. O 3º termo da sequência é $f(3) = 3^3 + 3^2 + 1 = 37$.
O 6º termo da sequência é $f(6) = 6^3 + 6^2 + 1 = 253$.
Portanto, a sequência é (3, 13, 37, 81, 151, 253, ...).

8. **a)** $a_1 = -193 + 3 = -190$; $a_2 = -193 + 6 = -187$;
$a_3 = -193 + 9 = -184$; $a_4 = -193 + 12 = -181$;
$a_5 = -193 + 15 = -178$.
$(a_n) = (-190, -187, -184, -181, -178, ...)$
$b_1 = 220 - 4 = 216$; $b_2 = 220 - 8 = 212$;
$b_3 = 220 - 12 = 208$; $b_4 = 220 - 16 = 204$;
$b_5 = 220 - 20 = 200$.
$(b_n) = (216, 212, 208, 204, 200, ...)$
b) $a_n > 0 \Rightarrow -193 + 3n > 0 \Rightarrow n > 64{,}33...$; como $n \in \mathbb{N}$, temos que $n = 65$ (65º termo)
$a_{65} = -193 + 195 = 2$
c) $b_n < 0 \Rightarrow 220 - 4n < 0 \Rightarrow n > 55 \Rightarrow n = 56$ (56º termo)
$b_{56} = 220 - 224 = -4$
d) $a_n = b_n \Rightarrow -193 + 3n = 220 - 4n \Rightarrow 7n = 413 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 59$ (59º termo)
$a_{59} = b_{59} = -16$

9. *a*, *c*, *d* e *f*.

10. **a)** $r = -3$; decrescente. **d)** $r = -10$; decrescente.
b) $r = 6$; crescente. **e)** $r = \frac{2}{3}$; crescente.
c) $r = 0$; constante. **f)** $r = 1$; crescente.

11. **a)** $a_8 = a_1 + 7r$
$a_8 = 28 + 7 \cdot 8$
$a_8 = 84$
b) $a_{19} = a_1 + 18r$
$a_{19} = 28 + 18 \cdot 8$
$a_{19} = 172$

12. **a)** $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow 98 = a_1 + 9 \cdot 9 \Rightarrow a_1 = 17 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_2 = 17 + 9 = 26$
b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_n = 17 + (n - 1) \cdot 9$
$a_n = 8 + 9n$; $n \in \mathbb{N}^*$

13. $r = 400$ m; $a_6 = 3\,200$ m
$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow 3\,200 = a_1 + 5 \cdot 400 \Rightarrow a_1 = 1\,200 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_2 = 1\,200 + 400 = 1\,600$ (1 600 metros)

14. **a)** $\begin{cases} a_4 = 24 \\ a_9 = 79 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_9 = a_4 + 5r \\ 79 = 24 + 5r \Rightarrow r = 11 \end{cases}$
$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow 24 = a_1 + 33 \Rightarrow a_1 = -9$
A P.A. é (−9, 2, 13, 24, 35, 46, 57, ...).
b) Os termos de ordem par desta P.A. formam a sequência (2, 24, 46, 68, ...), que é uma P.A. de razão $r = 22$.
$a_{20} = 2 + 19 \cdot 22 = 420$

15. $a_1 + a_3 + a_4 = a_1 + a_1 + 2r + a_1 + 3r$
Assim temos: $\begin{cases} 3a_1 + 5r = 0 \\ a_1 + 5r = 40 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -20$ e $r = 12$
A P.A. é (−20, −8, 4, 16, 28, 40, ...).

16. $\begin{cases} a_1 = 310 - 8 = 302 \\ a_2 = 310 - 16 = 294 \end{cases} \Rightarrow r = a_2 - a_1 = 294 - 302 = -8$

17. **a)** $3x + 1 = \dfrac{3x - 5 + 25}{2} \Rightarrow 6x + 2 = 3x + 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 6$; P.A.: (13, 19, 25); r = 6.

b) $x + 2 = \dfrac{-6 - x + 4x}{2} \Rightarrow 2x + 4 = 3x - 6 \Rightarrow x = 10;$

P.A.: $(-6 -10; 10 + 2; 4 \cdot 10) = (-16, 12, 40)$; r = 28.

c) $x^2 = \dfrac{x + 3 + 6x + 1}{2} \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$

Se x = 4, a P.A. é (7, 16, 25); r = 9.

Se $x = -\dfrac{1}{2}$, a P.A. é $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{4}, -2\right)$; $r = -2{,}25$.

18. Seja $(a_1, a_2, ..., a_{24})$ a sequência do número de contratos mensais de janeiro de 2016 a dezembro de 2017.

Do enunciado temos:

$a_{11} + a_{12} = 12\,000 \Rightarrow a_1 + 10r + a_1 + 11r = 12\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a_1 + 21r = 12\,000 \Rightarrow 2a_1 + 21 \cdot 450 = 12\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 = 1\,275$

a) $a_3 = a_1 + 2r$
$a_3 = 1\,275 + 2 \cdot 450 \Rightarrow a_3 = 2\,175$

b) $a_{16} = a_1 + 15r$
$a_{16} = 1\,275 + 15 \cdot 450 \Rightarrow a_{16} = 8\,025$

c) $a_{24} = a_1 + 23r$
$a_{24} = 1\,275 + 23 \cdot 450 \Rightarrow a_{24} = 11\,625$

19. A sequência é:
(4, 11, 18, 25, 32, ...)

a) $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow a_n = 4 + 7n - 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = -3 + 7n;\ n \in \mathbb{N}^*$

b) $a_{50} = a_1 + 49r \Rightarrow a_{50} = 4 + 49 \cdot 7 = 347$

20. **a)** $a_n = 131 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow a_n = 7n + 124,\ n \in \mathbb{N}^*$

b) $565 = 131 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow \dfrac{434}{7} = n - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 1 + 62 = 63$ (63 termos)

21. (73, 75, 77, ... , 467)
$\downarrow$ a_1 (73); $\downarrow$ a_n (467)

$467 = 73 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow \dfrac{394}{2} = n - 1 \Rightarrow n = 198$

22. O total de números é: $432 - 23 + 1 = 410$

Múltiplos de 3: (24, 27, 30, ..., 432)

$432 = 24 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 137$

Assim, a diferença $410 - 137 = 273$ fornece o total de números que não são múltiplos de 3.

23. $(x - r, x, x + r)$

$x - r + x + x + r = 72 \Rightarrow 3x = 72 \Rightarrow x = 24$
$(x - r) \cdot (x + r) = 560 \Rightarrow x^2 - r^2 = 560 \Rightarrow$
$\Rightarrow 24^2 - r^2 = 560 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \pm 4$

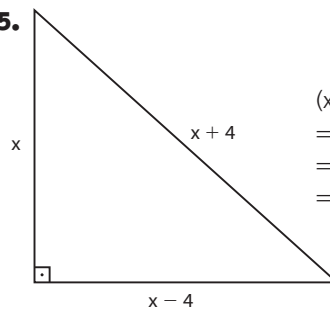
Se r = 4, a P.A. é (24 − 4, 24, 24 + 4) = (20, 24, 28).
Se r = −4, a P.A. é (28, 24, 20).

24. Medidas dos ângulos do triângulo: $(x - r, x, x + r)$

$x + r = 105°$
$x - \cancel{r} + x + x + \cancel{r} = 180° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$

As medidas são: (15°, 60°, 105°).

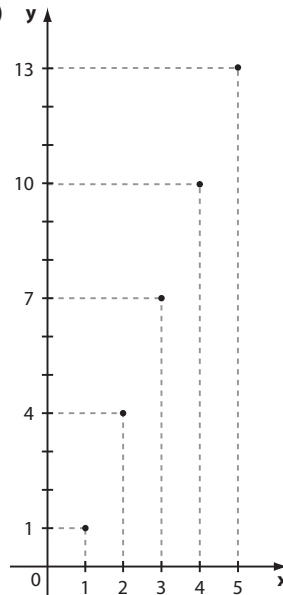
25.

x; x + 4; x − 4

$(x + 4)^2 = x^2 + (x - 4)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8x = x^2 - 8x \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 16x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 16$

A hipotenusa mede 16 + 4 = 20.

26. **a)** $f(1) = -2 + 3 = 1$; $f(2) = -2 + 6 = 4$;
$f(3) = -2 + 9 = 7$; ...

O conjunto imagem de **f** é {1, 4, 7, 10, 13, ...}

b)

27. • $\log 20 - \log 80 = \log\left(\dfrac{20}{80}\right) = \log \dfrac{1}{4} = \log 4^{-1} =$
$= -1 \cdot \log 2^2 = -2 \cdot \log 2$

• $\log 5 - \log 20 = \log\left(\dfrac{5}{20}\right) = \log \dfrac{1}{4} = -2 \cdot \log 2$

Portanto, a razão dessa P.A. é $-2 \cdot \log 2$.

28. **a)** A sequência das medidas dos lados dos quadrados é (1, 3, 5, 7, ...).

$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = 1 + 19 \cdot 2 = 39$

O perímetro de $\mathbf{Q}_{20}$ é $4 \cdot 39$ cm = 156 cm.

b) $a_{31} = a_1 + 30r \Rightarrow a_{31} = 1 + 30 \cdot 2 = 61$

A área de $\mathbf{Q}_{31}$ é $(61\ \text{cm})^2 = 3\,721\ \text{cm}^2$.

c) $a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 1 + 9 \cdot 2 = 19$

A diagonal de $\mathbf{Q}_{10}$ é $19\sqrt{2}$cm.

29. **a)** A sequência que representa, em metros, os pontos em que foram colocadas mesas de apoio é:

(5 000, 5 800, 6 600, ..., 41 800*)
Observe que o termo geral dessa P.A. é
$a_n = 5000 + (n - 1) \cdot 800 \Rightarrow a_n = 800n + 4200$;
Fazendo $a_n = 42195$, obtemos:
$42195 = 800n + 4200 \Rightarrow n \simeq 47,49$
Assim, $a_{47} = 800 \cdot 47 + 4200 = 41800$, como mostra * e, deste modo, a sequência possui 47 termos.

b) $42195 \text{ m} - 41800 \text{ m} = 395 \text{ m}$

c) Fazendo $a_n = 30000$, obtemos:
$30000 = 800n + 4200 \Rightarrow n = 32,25$
$a_{32} = 800 \cdot 32 + 4200 = 29800$
Assim, no marco 29,8 km havia uma mesa de apoio (32ª). A 33ª mesa estava localizada no marco 30,6 km. Deste modo, o caminho mais curto era retornar à última mesa pela qual ele havia passado.

30. Perímetro: $4 \cdot \ell$
Diagonal: $\ell \cdot \sqrt{2}$
Área: ℓ^2
Se $(4\ell, \ell\sqrt{2}, \ell^2)$ é P.A., devemos ter:

$$\ell\sqrt{2} = \frac{4\ell + \ell^2}{2} \Rightarrow 4\ell + \ell^2 = 2\ell\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \ell^2 + \left(4 - 2\sqrt{2}\right)\ell = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell \cdot \left(\ell + 4 - 2\sqrt{2}\right) = 0 \;\begin{cases} \ell = 0 \text{ (não serve)} \\ \text{ou} \\ \ell = 2\sqrt{2} - 4 < 0 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

Assim, não podem ser os termos de uma P.A.

31. a) $\begin{cases} a_1 = 1930 \\ r = 4 \\ a_n = 2014 \end{cases}$

$2014 = 1930 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 84 = (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow n = 22$
Como não houve Copa em 1942 e em 1946, concluímos que a Copa de 2014 foi a 20ª.

b) $a_n = 2100 \Rightarrow 2100 = 1930 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$; não haverá Copa em 2100.
$a_n = 2150 \Rightarrow 2150 = 1930 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow n = 56$; haverá Copa em 2150.

32. $a_{15} = a_1 + 14r \Rightarrow a_{15} = -45 + 14 \cdot 4 = 11$

$$S_{15} = \frac{(a_1 + a_{15}) \cdot 15}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{(-45 + 11) \cdot 15}{2} = -255$$

33. $a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = 0,15 + 19 \cdot 0,25 = 4,9$

$$S_{20} = \frac{(0,15 + 4,9) \cdot 20}{2} = 50,5$$

34. a) No plano alfa, o valor da 13ª prestação é:
$a_{13} = a_1 + 12r \Rightarrow a_{13} = 35 + 12 \cdot 15 = 215$
O desembolso total é:

$$\frac{(35 + 215) \cdot 13}{2} + 400 = 1625 + 400 = 2025$$

No plano beta, o desembolso total é:
$15 \cdot 130 = 1950$
O desembolso total é maior no plano alfa.

b) $x + 1625 = 1950 \Rightarrow x = 325$ (325 reais)

35. • $S_{10} = 245 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = 245 \Rightarrow a_1 + a_{10} = 49 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a_1 + 9r = 49$

• $S_{20} = 245 + 745 = 990 \Rightarrow \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 990 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 + a_{20} = 99 \Rightarrow 2a_1 + 19r = 99$

$$\begin{cases} 2a_1 + 9r = 49 \\ 2a_1 + 19r = 99 \end{cases}$$

Do sistema acima, obtemos: $r = 5$ e $a_1 = 2$.
P.A.: (2, 7, 12, 17, 22, 27, ...)

36. a) $n = 1 \Rightarrow S_1 = 18 \cdot 1 - 3 \cdot 1^2 = 15$
Logo, $a_1 = 15$.

b) $n = 2 \Rightarrow S_2 = 18 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 24$
Assim, $a_1 + a_2 = 24$; como $a_1 = 15$, temos: $15 + a_2 = 24 \Rightarrow a_2 = 9$
P.A.: (15, 9, 3, ...); $r = -6$

c) $a_{10} = 15 + 9 \cdot (-6) = -39$

37. Sequência de figurinhas:

(3,	7,	11, ... , a_n)
↓	↓	↓
1ª fileira	2ª fileira	n-ésima fileira

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = -1 + 4n$
Como $S_n = 1378$, temos: $\frac{[3 + (-1 + 4n)]n}{2} = 1378 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4n^2 + 2n = 2756 \Rightarrow 2n^2 + n - 1378 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = \frac{-1 \pm 105}{4} \overset{n > 0}{\Longrightarrow} n = 26 \text{ (26 fileiras)}$$

38. O perímetro do 7º quadrado é 68 cm; seu lado

$$\ell_7 = \frac{68 \text{ cm}}{4} = 17 \text{ cm.}$$

Como $\ell_7 = \ell_1 + 6 \cdot 2$, temos:
$17 = \ell_1 + 12 \Rightarrow \ell_1 = 5$
Daí: $\ell_{16} = \ell_1 + 15 \cdot 2 = 5 + 30 = 35$
$L = 4\ell_1 + 4\ell_2 + ... + 4\ell_{16} = 4(\ell_1 + ... + \ell_{16}) =$

$$= 4 \cdot \left[\frac{(\ell_1 + \ell_{16}) \cdot 16}{2}\right] = 1280$$

$\therefore L = 1280 \text{ cm} = 12,8 \text{ m}$

39. a) Como cada bloco contém 9 números, podemos fazer:
$787 \div 9 = 87,444...$
Assim, o número 787 pertence ao 88º bloco. (Observe que o último número (3ª linha e 3ª coluna) do 87º bloco é $9 \cdot 87 = 783$ e o último número do 88º bloco é $9 \cdot 88 = 792$.)
Assim, o número 787 encontra-se na 2ª linha e 1ª coluna do 88º bloco.

784	785	786
787	788	789
790	791	792

b) Observando a sequência dos números que ocupam a 3ª linha e 1ª coluna de cada bloco $\mathbf{B}_i$ (i = 1, 2, 3, ...), temos: (7, 16, 25, 34, ...), que é uma P.A. de razão 9.
$a_{100} = a_1 + 99 \cdot r = 7 + 99 \cdot 9 = 898$

c) Observando a sequência dos números que ocupam a 2ª linha e 3ª coluna de $\mathbf{B}_{500}$ de cada bloco $\mathbf{B}_i$ (i = 1, 2, 3, ...), temos: (6, 15, 24, 33, ...), que é uma P.A. de razão 9.

$a_{500} = a_1 + 499r = 6 + 499 \cdot 9 = 4497$

d) Sequência dos números da 2ª linha e 2ª coluna: (5, 14, 23, 32, ...), que é uma P.A. de razão 9.

$a_{500} = 5 + 499 \cdot 9 = 4496$ (poderíamos também ter usado a resolução do item *c* para determinar esse valor)

Daí, $S_{500} = \dfrac{(a_1 + a_{500}) \cdot 500}{2} \Rightarrow S_{500} = \dfrac{(5 + 4496) \cdot 500}{2} =$
$= 1125250$

e) O último elemento do 200º bloco é $9 \cdot 200 = 1800$

Assim, é preciso calcular a soma

$1 + 2 + 3 + ... + 1800 = \dfrac{(1 + 1800) \cdot 1800}{2} =$
$= 1620900$

40. a) $f(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{N}^*$

$\begin{cases} x = 1, y = 3 \\ x = 3, y = -1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1 + b = 3 \\ a \cdot 3 + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ e } b = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -2x + 5$

b) $(3, 1, -1, -3, ...)$; $a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = -2n + 5$; $n \in \mathbb{N}^*$

41. São P.G.: *a*, *b*, *d*, e *e*.

42. a) $q = 2$

b) $q = \dfrac{10^{42}}{10^{40}} = 10^2 = 100$

c) $q = -3$

d) $q = -1$

e) $q = \dfrac{1}{2}$

f) $q = \dfrac{10^{-2}}{10^{-1}} = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

43. $a_8 = a_1 \cdot q^7 = -1 \cdot (-4)^7 = (-1) \cdot (-16384) = 16384$

44. $q = \dfrac{-120}{-240} = \dfrac{1}{2}$

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = (-240) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = -\dfrac{240}{32} = -\dfrac{15}{2}$

45. $a_7 = a_1 \cdot q^6$ $(\div)$
$a_3 = a_1 \cdot q^2$

$\dfrac{a_7}{a_3} = q^4 \Rightarrow \dfrac{-5}{-80} = q^4 \Rightarrow q^4 = \dfrac{1}{16} \Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$

$\left(\text{Se } q = -\dfrac{1}{2}, \text{ a P.G. seria alternada.}\right)$

Como $a_3 = -80$, temos: $-80 = a_1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a_1 = -320$

46. $q = 3$; $a_6 = 1458$; $a_3 = ?$

- $a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 1458 = a_1 \cdot 3^5 \Rightarrow a_1 = 6$
- $a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow a_3 = 6 \cdot 3^2 = 54$

Observação: Podemos fazer, diretamente:
$a_6 = a_3 \cdot q^3 \Rightarrow 1458 = a_3 \cdot 3^3 \Rightarrow a_3 = 54$

47. $q = 2$; $a_5 = 4^{19}$

a) $a_5 = a_1 \cdot q^4$
$4^{19} = a_1 \cdot 2^4 \Rightarrow 4^{19} = a_1 \cdot 4^2 \Rightarrow 4^{17} = a_1$ (ou $a_1 = 2^{34}$)

b) $a_{10} = a_1 \cdot q^9$
$a_{10} = 4^{17} \cdot 2^9 \Rightarrow a_{10} = 2^{34} \cdot 2^9 \Rightarrow a_{10} = 2^{43}$

48. a) (120; 144; 172,80; 207,36, ...) é uma P.G. de razão 1,2, pois $\dfrac{144}{120} = \dfrac{172{,}80}{144} = 1{,}2$.

b) $a_3 = 120$; $a_3 = a_1 \cdot q^2$

$a_1 = \dfrac{a_3}{q^2} = \dfrac{120}{1{,}2^2} = 83{,}\overline{3} \simeq 83$

$a_{13} = a_1 \cdot q^{12} \Rightarrow a_{13} = 83 \cdot 1{,}2^{12} = 83 \cdot 8{,}9 = 738{,}70 \simeq 739$

A diferença pedida, em reais, é igual a $739 - 83 =$
$= 656$.

49. a) $x^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow x = \pm 6$

b) $(2x + 4)^2 = (x^2 - 4) \cdot 6 \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 6x^2 - 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{8 \pm 12}{2}$ < $x = 10$; $x = -2$

Para $x = 10$, temos: (96, 24, 6); P.G. de razão $\dfrac{1}{4}$.

Para $x = -2$, temos: (0, 0, 6); não é P.G.

Assim, $x = 10$

c) $(x + 1)^2 = -2 \cdot (-4x + 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 8x - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 5$

Se $x = 1$, temos: $(-2, 2, -2)$; é P.G. com $q = -1$.

Se $x = 5$, temos: $(-2, 6, -18)$; é P.G. com $q = -3$.

d) $\left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \Rightarrow \left(\log_{\frac{1}{4}} x\right)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}} x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{16} \\ \text{ou} \\ \log_{\frac{1}{4}} x = -2 \Rightarrow x = 16 \end{cases}$

50. Seja **b** a idade da Sra. Beatriz; temos:

$\left(b, \dfrac{2}{3}b, \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 b\right)$ é P.G.

$b - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 b = 50 \Rightarrow \left(1 - \dfrac{4}{9}\right)b = 50 \Rightarrow b = 90$

Avó: 90; filha: 60; e neta: 40.

51. a) $(2 - n, 5 - n, 6 - n)$ é P.G. $\Rightarrow$
$\Rightarrow (5 - n)^2 = (2 - n) \cdot (6 - n) \Rightarrow$
$\Rightarrow 25 - 10n + \cancel{n^2} = 12 - 8n + \cancel{n^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 13 = 2n \Rightarrow n = 6{,}5$

Observe que a P.G. é $(-4{,}5; -1{,}5; -0{,}5)$.

b) $q = \dfrac{-1{,}5}{-4{,}5} = \dfrac{1}{3}$

52. a) $a_3 = a_1 \cdot q^2 = 144$ (1)

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = 486$ (2)

Dividindo (1) por (2) temos: $\dfrac{1}{q^3} = \dfrac{8}{27} \Rightarrow$

$\Rightarrow q = \dfrac{3}{2}$

Substituindo o valor de **q**, em (1):

$a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 144 \Rightarrow a_1 = 64$ (64 reais)

b) $a_7 = a_1 \cdot q^6 = 64 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 = 729$ (729 reais)

53. a) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$2^{111} = 2^{31} \cdot (2^4)^{n-1} \Rightarrow 2^{111} = 2^{27+4n} \Rightarrow$

$\Rightarrow 111 = 27 + 4n \Rightarrow n = 21$

b) $\frac{64}{15} = -\frac{1}{120} \cdot (-2)^{n-1} \Rightarrow -512 = (-2)^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2)^9 = (-2)^{n-1} \Rightarrow n = 10$

54. $(\ell, 4\ell, \ell^2)$ é P.G. $\Rightarrow (4\ell)^2 = \ell \cdot \ell^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16\ell^2 = \ell^3 \overset{\ell \neq 0}{\Longrightarrow} \ell = 16$ u.c.

55. Seja a P.G. $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$.

$\frac{x}{\not q} \cdot x \cdot \not q = 625 \Rightarrow x^2 = 625 \overset{x > 0}{\Longrightarrow} x = 25$

$25 + 25q = 30 \Rightarrow q = \frac{1}{5}$ e $a_1 = \frac{x}{q} = \frac{25}{\frac{1}{5}} = 125$

56. P.G.: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

$\frac{x}{\not q} \cdot x \cdot x \cdot \not q = 216 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6$

$\frac{6}{q} + 6 = 9 \Rightarrow \frac{6}{q} = 3 \Rightarrow q = 2$

P.G.: $\left(\frac{6}{2}, 6, 6 \cdot 2\right) = (3, 6, 12)$

57. P.A.: $a_1 = 13$ e $a_3 = 21 \Rightarrow$

$\Rightarrow 21 - 13 = 2r \Rightarrow r = 4 \Rightarrow a_2 = 17$

Logo, $4x + 1 = 17 \Rightarrow x = 4$

P.G.: $\left(\frac{1}{2}, y, 32\right)$

$y^2 = \frac{1}{2} \cdot 32 \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \pm 4$

58. P.G.: (8, 2, a, b, ...)

$q = \frac{1}{4}$; $a = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$; $b = a \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

a) P.A. $\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, c, ...\right)$

$r = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

$c = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$

b) O termo geral da P.A. é:

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = \frac{1}{8} + (n - 1) \cdot \frac{1}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{8} + \frac{n}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} + \frac{n}{16}$

Se $a_n = \frac{1}{2}$, temos: $\frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{n}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{n}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{n}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow n = 7$

Logo, $\frac{1}{2}$ é o sétimo termo da sequência.

59. $a_n = 3n + 4$

$a_1 = 3 \cdot 1 + 4 = 7$; $a_2 = 3 \cdot 2 + 4 = 10$; $a_3 = 3 \cdot 3 + 4 = 13$; $a_4 = 3 \cdot 4 + 4 = 16$; ...

f: (7, 10, 13, 16, ...) é P.A. de razão 3.

$b_n = 2^{a_n}$

$b_1 = 2^{a_1} = 2^7$; $b_2 = 2^{a_2} = 2^{10}$; $b_3 = 2^{a_3} = 2^{13}$; $b_4 = 2^{a_4} = 2^{16}$;...

g: $(2^7, 2^{10}, 2^{13}, 2^{16}, ...)$ é P.G. de razão $2^3 = 8$.

60.
- P.A.: $a_2 = 2 + r$; $a_5 = 2 + 4r$ e $a_{14} = 2 + 13r$
- P.G.: $(2 + r, 2 + 4r, 2 + 13r) \Rightarrow$

$\Rightarrow (2 + 4r)^2 = (2 + r) \cdot (2 + 13r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \not 4 + 16r + 16r^2 = 13r^2 + 28r + \not 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3r^2 - 12r = 0 \overset{r \neq 0}{\Longrightarrow} r = 4$

A P.G. obtida é (6, 18, 54), cuja razão é q = 3.

61. (a, b, c) é P.A. $\Rightarrow b = \frac{a + c}{2}$ (1)

(a, b, c) é P.G. $\Rightarrow b^2 = a \cdot c$ (2)

Substituindo (1) em (2): $\left(\frac{a + c}{2}\right)^2 = ac \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 2ac + c^2 = 4ac \Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c$

Substituindo em (1) temos: b = a = c

62. $q = -2$; $S_6 = \frac{a_1 \cdot (q^6 - 1)}{q - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_6 = \frac{(-2) \cdot [(-2)^6 - 1]}{-2 - 1} = \frac{(-2) \cdot 63}{-3} = 42$

63. $q = \frac{1}{2}$; $S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_8 = \frac{320 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} =$

$= \frac{320 \cdot \left(\frac{1}{256} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_8 = \frac{320 \cdot \left(-\frac{255}{256}\right)}{-\frac{1}{2}} = 320 \cdot \frac{255}{\underset{128}{\not 256}} \cdot \not 2^{\,1} = 637{,}5$

64. Note que $\frac{60\,000}{50\,000} = 1{,}2$; $\frac{72\,000}{60\,000} = 1{,}2$ etc.

Devemos calcular a soma dos 10 primeiros termos da P.G. (50 000, 60 000, 72 000, ...):

$S_{10} = 50\,000 \cdot \frac{(1{,}2^{10} - 1)}{1{,}2 - 1}$

Como $1{,}2^{10} = (1{,}2^5)^2 = 2{,}5^2 = 6{,}25$, obtemos:

$S_{10} = 50\,000 \cdot \frac{5{,}25}{0{,}2} = 1\,312\,500$

65. $a_4 = 318$

$a_1 \cdot q^3 = 318 \Rightarrow a_1 \cdot 1{,}02^3 = 318 \Rightarrow a_1 = \frac{318}{1{,}06} = 300$

$S_{20} = \frac{a_1 \cdot (q^{20} - 1)}{q - 1}$

$S_{20} = \frac{300 \cdot (1{,}02^{20} - 1)}{1{,}02 - 1} = \frac{300 \cdot (1{,}5 - 1)}{0{,}02} = 7\,500$

(R$ 7 500,00)

66. $a_1 = \frac{3^1}{6} = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{3^2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$;
$a_3 = \frac{3^3}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, ...\right)$ é uma P.G. com q = 3.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5$

b) Devemos determinar **n** tal que $S_n = 14\,762$:

$$14\,762 = \frac{\frac{1}{2} \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 59\,048 = 3^n - 1 \Rightarrow 3^n = 59\,049 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^n = 3^{10} \Rightarrow n = 10 \text{ (10 termos)}$$

67. a) $\ell_2 = 1 \Rightarrow$ perímetro de $\mathbf{T}_2$ é 3;

$\frac{5}{4} \cdot p(T_1) = p(T_2) \Rightarrow p(T_1) = \frac{12}{5} = 2{,}4$ (2,4 m)

(note que o lado ℓ_1 mede 0,8 m)
A sequência que representa as medidas dos lados dos triângulos é (0,8; 1; 1,25;...); P.G. com $q = \frac{5}{4} = 1{,}25$.

b) $\ell_4 = \ell_1 \cdot q^3 = 0{,}8 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 1{,}5625$ (1,5625 m)

c) $S_7 = \frac{a_1 \cdot (q^7 - 1)}{q - 1}$, sendo $\mathbf{a}_1$ o perímetro do 1º triângulo.

$$S_7 = \frac{2{,}4 \cdot (1{,}25^7 - 1)}{1{,}25 - 1} = \frac{2{,}4 \cdot (4{,}8 - 1)}{0{,}25} =$$

= 36,48 (36,48 m); o número inteiro mínimo pedido é 37 m.

68. 1º dia → 5
2º dia → 10 novas pessoas
3º dia → 20 novas pessoas
⋮

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1}$$
$$S_8 = \frac{5 \cdot (2^8 - 1)}{2 - 1} = 1\,275 \text{ (1 275 pessoas)}$$

69. a) $\frac{a_1}{1 - q} = \frac{20}{1 - 0{,}5} = 40$

b) $\frac{90}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{90}{\frac{9}{10}} = 100$

c) $\frac{0{,}001}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}001}{0{,}9} = \frac{1}{900}$

d) $\left(-25, -5, -1, -\frac{1}{5}, ...\right)$ é uma P.G. com $q = \frac{1}{5}$.

$$(-25) + (-5) + (-1) + \left(-\frac{1}{5}\right) + ... =$$
$$= -25 - 5 - 1 - \frac{1}{5} - ... = \frac{-25}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{-25}{\frac{4}{5}} = -\frac{125}{4}$$

e) $\left(9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, ...\right)$ é uma P.G. alternada com $q = -\frac{1}{3}\left(-1 < -\frac{1}{3} < 1\right)$.

$$9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - ... = \frac{9}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4}$$

70. $a_2 = \frac{9}{2 \cdot 3^2} = \frac{1}{2}$; $a_4 = \frac{9}{2 \cdot 3^4} = \frac{3^2}{2 \cdot 3^4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2}$;

$a_6 = \frac{9}{2 \cdot 3^6} = \frac{3^2}{2 \cdot 3^6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^4}$; $a_8 = \frac{9}{2 \cdot 3^8} = \frac{3^2}{2 \cdot 3^8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^6}$; ...

Devemos calcular a soma:

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^6} + ...$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + ...\right)$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{16}$$

71. a) 0,444 ... = 0,4 + 0,04 + 0,004 + ...
Como (0,4; 0,04; 0,004; ...) é uma P.G. com $q = \frac{1}{10}$, temos:

$$\frac{0{,}4}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0{,}4}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{9}$$

b) 1,777 ... = 1 + 0,7 + 0,07 + 0,007 + ...
Como (0,7; 0,07; 0,007; ...) é uma P.G. com $q = \frac{1}{10}$, temos:

$$1 + \frac{a_1}{1 - q} = 1 + \frac{0{,}7}{1 - 0{,}1} = 1 + \frac{0{,}7}{0{,}9} =$$
$$= 1 + \frac{7}{9} = \frac{16}{9}$$

c) $0{,}\overline{27} = 0{,}27 + 0{,}0027 + 0{,}000027 + ... =$

$$= \frac{0{,}27}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}27}{0{,}99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

d) $2{,}3\overline{6} = 2{,}3 + 0{,}06 + 0{,}006 + 0{,}0006 + ... =$

$$= 2{,}3 + \frac{0{,}06}{1 - 0{,}1} = \frac{23}{10} + \frac{\frac{6}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{23}{10} + \frac{2}{30} = \frac{71}{30}$$

72. Sejam ℓ_i, $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{A}_i$ as medidas dos lados, do perímetro e a área, respectivamente, do quadrado $\mathbf{Q}_i$ (i = 1, 2, ...)

	Q_1		Q_2		Q_3		
	$\ell_1 = 10$		$\ell_2 = 1$		$\ell_3 = \frac{1}{10}$		
	$p_1 = 40$	⇒	$p_2 = 4$	⇒	$p_2 = \frac{4}{10}$	⇒	...
	$A_1 = 100$		$A_2 = 1$		$A_2 = \frac{1}{100}$		

a) A sequência de perímetros é:
$\left(40, 4, \frac{4}{10}, ...\right)$, que é P.G. de razão $\frac{1}{10}$.
A soma infinita é igual a:

$$\frac{40}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{400}{9} = 44{,}\overline{4} \text{ } (44{,}\overline{4} \text{ cm})$$

b) A sequência de áreas é:
$\left(100, 1, \frac{1}{100}, ...\right)$, que é P.G. de razão $\frac{1}{100}$.

A soma infinita é igual a:

$$\frac{100}{1-\frac{1}{100}} = \frac{10\,000}{99} = 101{,}\overline{01}\ (101{,}\overline{01}\ \text{cm}^2)$$

73. a) $\left(x^2, \frac{x^3}{2}, \frac{x^4}{4}, \ldots\right)$ é uma P.G. com $q = \frac{x}{2}$; $-1 < q < 1$.

$$\frac{x^2}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow 6x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{12} \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\text{convém, pois } q = \frac{1}{4}\right) \\ x = -\frac{2}{3}\left(\text{convém, pois } q = -\frac{1}{3}\right) \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$$

b) $(1 + x, (1 + x)^2, (1 + x)^3, \ldots)$ é uma P.G. com $q = 1 + x$; $-1 < q < 1$

$$\frac{1+x}{1-(1+x)} = 3 \Rightarrow \frac{1+x}{-x} = 3 \Rightarrow 1 + x = -3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{4};\ S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

Nesse caso, a razão da P.G. é $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

c) $\left(x, \frac{x^2}{4}, \frac{x^3}{16}, \frac{x^4}{64}, \ldots\right)$ é uma P.G. com $q = \frac{x}{4}$;

$-1 < q < 1$

$$x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{64} + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{x}{1-\frac{x}{4}}$$

Daí:

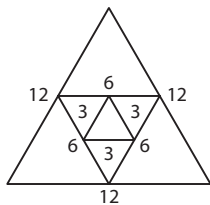
$$\frac{x}{1-\frac{x}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4 - x = 3x \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1;$$ note que, nesse caso, a razão da P.G. é $q = \frac{1}{4}$; $S = \{1\}$.

d) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 0{,}25 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^x + \frac{2^x}{2^1} + \frac{2^x}{2^2} + \frac{2^x}{2^3} + \ldots = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot \Bigg(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2}\Bigg) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} \Rightarrow x = -3;\ S = \{-3\}$$

74.

Pelo teorema da base média do triângulo, temos:

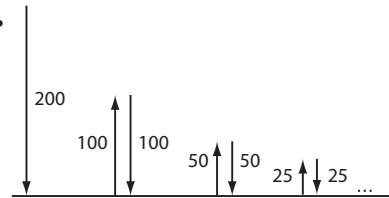
a) $36 + 18 + 9 + \ldots = \frac{36}{1-\frac{1}{2}} = 72\ (72\ \text{cm})$

b) $\frac{12^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + \ldots =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(144 + 36 + 9 + \ldots) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{144}{1-\frac{1}{4}}\right) = 48\sqrt{3}\ \left(48\sqrt{3}\ \text{cm}^2\right)$$

75.

200 100 100 50 50 25 25 ...

$$= 200 + 200 + 100 + 50 + \ldots =$$

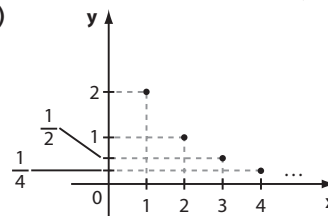
$$= 200 + \frac{200}{1 - 0{,}5} = 200 + 400 = 600$$

A bola percorre 600 cm ao todo.

76. a) $f(1) = 4 \cdot 0{,}5 = 2$; $f(2) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$;

$f(3) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$; $f(4) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$; ...

O conjunto imagem de **f** é $\left\{2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

b)

77. a) $x = 3$, $y = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{6} \cdot 3^{3+k} \Rightarrow 9 = 3^{3+k} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^2 = 3^{3+k} \Rightarrow k = -1$

b) A P.G. é (f(1), f(2), f(3), f(4), ...), isto é:

$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \ldots\right)$; $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{n-1}$, com $q = 3$.

Desafio

Esse é um problema clássico de análise combinatória, mas que pode ser resolvido utilizando progressão aritmética.

Vamos representar os profissionais por: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{599}$ e P_{600}.

- **P_1** cumprimenta $P_2, P_3, P_4, \ldots, P_{599}$ e P_{600}, num total de 599 saudações;
- **P_2** cumprimenta $P_3, P_4, \ldots, P_{599}$ e P_{600}, num total de 598 saudações (já contamos a saudação com **P_1**);
- **P_3** cumprimenta $P_4, P_5, \ldots, P_{599}$ e P_{600}, num total de 597 saudações (já contamos as saudações com **P_1** e **P_2**);

  ⋮
- **P_{598}** cumprimenta **P_{599}** e **P_{600}**, num total de 2 saudações (já contamos as saudações com $P_1, P_2, \ldots$ e P_{597});
- **P_{599}** cumprimenta P_{600} – 1 saudação (já contamos todas as demais).

Assim, o número total de apertos de mão é:

$$599 + 598 + 597 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{(599 + 1) \cdot 599}{2} =$$

$$= 179\,700$$

Semelhança e triângulos retângulos

Exercícios

1. **a)** Falsa, pois, por exemplo, os lados de um podem medir 1 cm e 2 cm e os do outro, 1 cm e 3 cm, ou seja, não são proporcionais.

b) Verdadeira.

c) Falsa, pois, por exemplo, os ângulos agudos de um dos triângulos podem ser de 30° e 60°; os do outro podem ser de 40° e 50°.

d) Verdadeira.

e) Falsa, pois, por exemplo, as bases de um deles podem medir 1 cm e 3 cm e as do outro, 1 cm e 4 cm; logo, não são proporcionais.

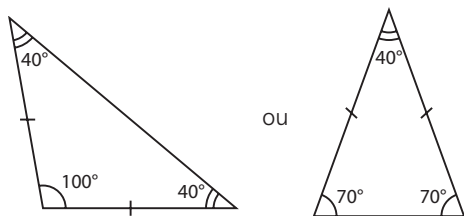
f) Falsa, pois um pode ter ângulos internos medindo 30° e 150° e o outro, 80° e 100°; logo, não são semelhantes.

2. Sejam **x** e **y** as medidas, em centímetros, dos lados de $\mathbf{R}_2$. Tem-se: $\frac{2}{3} = \frac{6}{x} = \frac{10}{y} \Rightarrow x = 9$ e $y = 15$.

3. Sim, pois eles têm dois ângulos congruentes, um medindo 48° e o outro, 90°. Logicamente, os terceiros ângulos também são congruentes.

4. O perímetro do quadrilátero dado é 85 cm e o do procurado é 17 cm. Então, $\frac{85\text{ cm}}{17\text{ cm}} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \Rightarrow A'B' = 2{,}4$ cm; $B'C' = 6{,}6$ cm; $C'D' = 4{,}4$ cm; $D'A' = 3{,}6$ cm.

5. Não, pois podem ocorrer dois casos:

ou

Nessa situação, os dois triângulos não são semelhantes.

6. Se **x**, **y** e **z** são as medidas em centímetros das arestas do outro bloco, então $\frac{1}{3} = \frac{8}{x} = \frac{2}{y} = \frac{6}{z} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 24, y = 6, z = 18.$

7. A razão de semelhança entre as figuras é $\frac{6\text{ m}}{5\text{ m}} = \frac{9\text{ m}}{7{,}5\text{ m}} = 1{,}2$

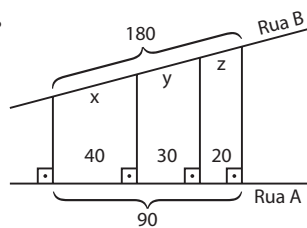
Daí: $\frac{3}{x} = 1{,}2 \Rightarrow x = 2{,}5$ m; $\frac{4}{y} = 1{,}2 \Rightarrow y \simeq 3{,}33$ m;
$z = 6 - 3 = 3$ m; $\frac{w}{2{,}1} = 1{,}2 \Rightarrow w = 2{,}52$ m;
$t = 5 - x = 5 - 2{,}5 = 2{,}5 \Rightarrow t = 2{,}5$ m.

8. $AB = 2 \cdot 2\,000\text{ cm} = 4\,000\text{ cm} = 40\text{ m}$
$BC = 4 \cdot 2\,000\text{ cm} = 8\,000\text{ cm} = 80\text{ m}$
$CD = 5 \cdot 2\,000\text{ cm} = 10\,000\text{ cm} = 100\text{ m}$
$AD = 2{,}7 \cdot 2\,000\text{ cm} = 5\,400\text{ cm} = 54\text{ m}$

9. **a)** $\frac{4}{6} = \frac{x}{5} \Rightarrow 6x = 20 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

b) $\frac{3 + x}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 12 + 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -2$ (não serve) ou $x = 6$

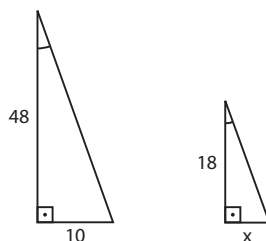
c) $\frac{3}{2} = \frac{5}{x} \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$
$\frac{3}{y} = \frac{5}{6} \Rightarrow 5y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{5}$

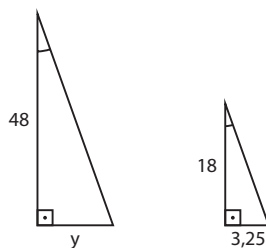
10.

$\frac{180}{x} = \frac{90}{40} \Rightarrow x = 80$ (lote I: 80 m)
$\frac{180}{y} = \frac{90}{30} \Rightarrow y = 60$ (lote II: 60 m)
$z = 180 - (80 + 60) = 40$ (lote III: 40 m)

11. 1 e 8 (caso LAL); 2 e 5 (caso LLL ou AA); 3 e 6 (caso LLL); 4 e 7 (caso AA).

12. **a)** $\frac{8}{4} = \frac{6}{y} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 2$ e $y = 3$

b) $\frac{6}{3} = \frac{y}{5} = \frac{x}{4} \Rightarrow y = 10$ e $x = 8$

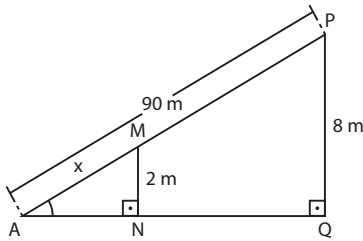
13. **a)**

Temos: $\frac{48}{10} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = 3{,}75$ m

b) $(3{,}75 - 0{,}50)$ m $= 3{,}25$ m

$\frac{48}{y} = \frac{18}{3{,}25} \Rightarrow y = 8{,}\overline{6}$ m

A sombra do prédio maior diminuiu, aproximadamente, 10 m − 8, 66 m = 1,34 m.

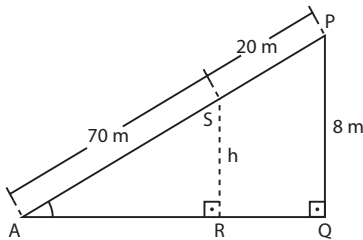
14. $AE = AC - EC = 3$ cm

Tem-se: $\frac{BE}{DE} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{32}{3}$ cm

15. a)

$\triangle AMN \sim \triangle APQ \Rightarrow \frac{MN}{AM} = \frac{PQ}{AP} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{8}{90} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 22,5$ m

Faltam 90 m − 22,5 m = 67,5 m para chegar ao ponto mais alto.

b)

$\triangle APQ \sim \triangle ASR \Rightarrow \frac{AP}{AS} = \frac{PQ}{SR} \Rightarrow \frac{90}{70} = \frac{8}{h} \Rightarrow$

$\Rightarrow h \simeq 6,22$ m

16. a) $\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{6}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 12$ cm

b) $\triangle EDA \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{ED}{DA} = \frac{CB}{BA} \Rightarrow \frac{36}{x} = \frac{27}{x - 10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 40$ m

17. a) $\triangle CAB \sim \triangle XYB \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{AB}{3} \Rightarrow AB = 6$

b) $\triangle ABC \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{2}{AB} = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = \frac{4}{5}$

c) $\triangle ACD \sim \triangle CBD$, pois $A\hat{C}D \equiv C\hat{B}D$ e $A\hat{D}C \equiv C\hat{D}B$ (ângulo comum). Daí:

$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{10}{AB + 4} \Rightarrow 4 \cdot (AB + 4) = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 21$

18. 1º modo:

Da semelhança dos triângulos ABC e ADE, podemos escrever:

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow$

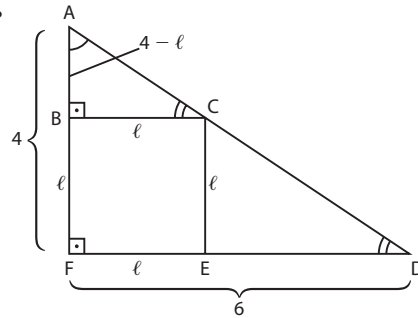
$\Rightarrow \frac{5}{AD} = \frac{4}{4 + 2} = \frac{BC}{6} \Rightarrow AD = 7,5$ cm e $BC = 4$ cm

O perímetro do $\triangle ABC$ é 5 cm + 4 cm + 4 cm = 13 cm e o perímetro do $\triangle ADE$ é 7,5 cm + 6 cm + 6 cm = 19,5 cm.

A razão pedida é $\frac{13 \text{ cm}}{19,5 \text{ cm}} = \frac{13}{\frac{39}{2}} = \frac{2}{3}$.

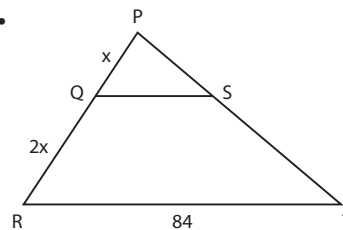
2º modo:

A razão de semelhança entre os triângulos ABC e ADE é $k = \frac{AC}{AE} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Como o perímetro é a soma das medidas dos três lados, a razão entre seus perímetros também é $\frac{2}{3}$.

19.

Seja ℓ a medida do lado do quadrado.

$\triangle ABC \sim \triangle AFD$

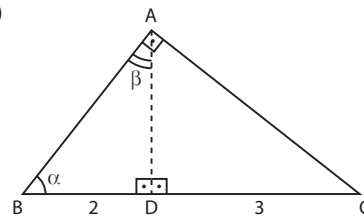
$\frac{AB}{AF} = \frac{BC}{FD} \Rightarrow \frac{4 - \ell}{4} = \frac{\ell}{6} \Rightarrow 4\ell = 24 - 6\ell \Rightarrow \ell = 2,4$ cm

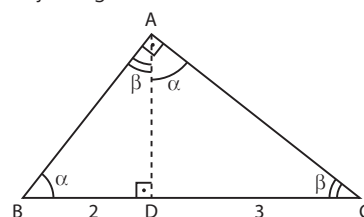
20.

$\triangle PQS \sim \triangle PRT$

$\frac{PQ}{PR} = \frac{PS}{PT} = \frac{QS}{RT}$

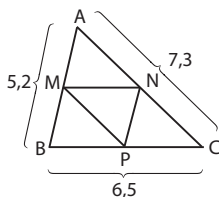
Da 1ª e da 3ª razões, temos:

$\frac{x}{3x} = \frac{QS}{84} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{QS}{84} \Rightarrow QS = 28$ m

21. a)

- Chamando med($A\hat{B}D$) = α e med($B\hat{A}D$) = β, temos que α + β = 90° (*)
- O ângulo $B\hat{A}C$ mede 90°; como med($B\hat{A}D$) = β, o ângulo $C\hat{A}D$ deve medir o complemento de β, que, por (*), é igual a α.
- Por fim, no $\triangle CAD$, o ângulo $A\hat{C}D$ mede o complemento de α, que é igual a β.

Veja a figura abaixo:

Assim, $\triangle ABD \sim \triangle CAD$, pois têm ângulos congruentes.

b) Podemos escrever:
$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{AD}{3} = \frac{2}{AD} \Rightarrow (AD)^2 = 6 \Rightarrow AD = \sqrt{6}$ cm

22. Os triângulos AMN, BMP e PNC são semelhantes ao triângulo ABC pelo caso LAL.

a) $\triangle ABC \sim \triangle AMN \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{5,2}{6,5} = \frac{2,6}{MN} \Rightarrow MN = 3,25$ cm

$\triangle ABC \sim \triangle MBP \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MP} \Rightarrow \frac{5,2}{2,6} = \frac{7,3}{MP} \Rightarrow$

$\Rightarrow MP = 3,65$ cm

$\triangle ABC \sim \triangle NPC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{NP}{PC} \Rightarrow \frac{5,2}{6,5} = \frac{NP}{3,25} \Rightarrow$

$\Rightarrow NP = 2,6$ cm

O perímetro, em centímetros, do $\triangle MNP$ é:
$3,25 + 3,65 + 2,6 = 9,5$

b) $\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{AB}{PN} = \frac{2}{1}$; os triângulos são semelhantes pelo caso LLL.

23. a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{3}{9 + 3} = \frac{4}{4 + 12} = \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

d) Do item anterior, sabemos que
$A_{\triangle ABC} = 16 \cdot A_{\triangle ADE}$,
isto é, $A_{\triangle ABC} = 16 \cdot 6 \text{ cm}^2 = 96 \text{ cm}^2$.
Podemos também fazer:
$A_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{16 \text{ cm} \cdot 12 \text{ cm}}{2} = 96 \text{ cm}^2$

24. a) $\frac{AB}{DE} = \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow h_2 = 6$ cm

b) A área do triângulo ABC é: $\frac{(5 \text{ cm}) \cdot (3 \text{ cm})}{2} = 7,5 \text{ cm}^2$.

A área do triângulo CDE é: $\frac{(10 \text{ cm}) \cdot (6 \text{ cm})}{2} = 30 \text{ cm}^2$.

Observe que $k = \frac{AB}{DE} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ e $k^2 = \frac{1}{4} \left(7,5 : 30 = \frac{1}{4}\right)$.

25. Se o perímetro de $\mathbf{T}_1$ é 6 cm, seus lados medem 2 cm. Se o perímetro de $\mathbf{T}_2$ é 24 cm, seus lados medem 8 cm. Se a razão entre os lados é $\frac{8}{2} = 4$, a razão entre as áreas é $4^2 = 16$.

26. Se a razão entre as áreas é $\frac{36}{4} = 9 = k^2$, a razão entre as medidas dos lados é $k = 3$. Então $\frac{AB}{DE} = 3 \Rightarrow AB = 12$ cm.

27. $\frac{6}{4} = \frac{x + (8 - x)}{8 - x} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

$y^2 = 4^2 + (8 - x)^2 = 4^2 + \left(8 - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{400}{9} \Rightarrow y = \frac{20}{3}$

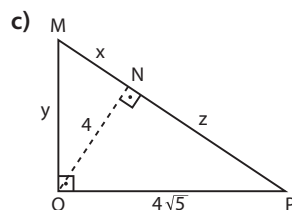
28. a) $(\sqrt{5})^2 = 1^2 + m^2 \Rightarrow m = 2$

$(\sqrt{5})^2 = m \cdot y = 2y \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = (\sqrt{5})^2 + x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $3^2 = (x + 2) \cdot 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

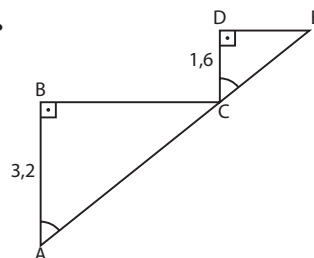
$y^2 = (x + 2) \cdot x = \frac{45}{4} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

c)

$\triangle PQN$: $(4\sqrt{5})^2 = 4^2 + z^2 \Rightarrow z = 8$

$\triangle MPQ$: $(4\sqrt{5})^2 = (x + z) \cdot z \Rightarrow$

$\Rightarrow 80 = (x + 8) \cdot 8 \Rightarrow x = 2$

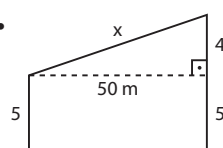
$\triangle MNQ$: $y^2 = x^2 + 4^2 \Rightarrow y^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow y = 2\sqrt{5}$

29.

Os triângulos BAC e DCE são semelhantes e $k = \frac{BC}{DE} = \frac{2 \cdot DE}{DE} = 2$

Temos:

$\begin{cases} AB = 2 \cdot CD = 2 \cdot 1,6 \text{ m} = 3,2 \text{ m} \\ AC = 2 \cdot CE; \text{ como } AC + CE = 6, \text{ concluímos que } CE = 2 \text{ m e } AC = 4 \text{ m} \end{cases}$

Usando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$, temos:
$AC^2 = BC^2 + AB^2 \Rightarrow BC^2 = 4^2 - 3,2^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow BC = \sqrt{5,76}$ m $= 2,4$ m $\Rightarrow DE = 1,2$ m

30.

$x^2 = 50^2 + 4^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 2\,516 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt{2\,516} \simeq 50,1597$

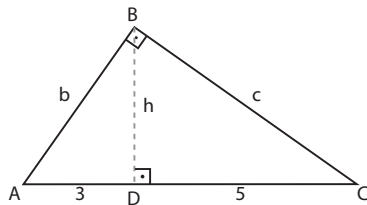
Como $50,15^2 = 2\,515,0225$ e $50,16^2 = 2\,516,0256$, o comprimento aproximado, por excesso, com erro menor que 0,01, é 50,16 m.

31. a) $17^2 = x^2 + 15^2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ cm

b) Seja ℓ a hipotenusa do primeiro triângulo.
Então: $\ell^2 = 6^2 + 9^2 = 117$ e $12^2 = x^2 + \ell^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 27$ e $x = 3\sqrt{3}$ cm

c) $x^2 + x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$ cm

d) $6^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$ cm

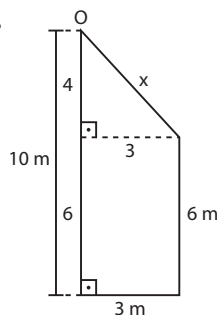
32.

$h^2 = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow h = \sqrt{15}$ cm

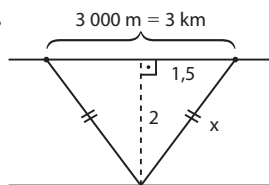
$b^2 = 3^2 + h^2 = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$ cm

$c^2 = 5^2 + h^2 = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}$ cm

33. $\ell^2 = 40^2 + 20^2 = 2\,000 \Rightarrow \ell = 20\sqrt{5}$ m $\simeq 44{,}6$ m

34. A base do triângulo de hipotenusa $\overline{AB}$ mede:
$6 \cdot 0{,}40 = 2{,}4 \Rightarrow AB^2 = (2{,}4)^2 + (1{,}8)^2 = 9 \Rightarrow AB = 3$ m

35.

Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $x = 5$.
A distância total percorrida pelo robô é
$10 \text{ m} + 3 \text{ m} + 6 \text{ m} + 5 \text{ m} = 24$ m.

36.

$$x^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 4 + \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5 \Rightarrow x = 2{,}5 \text{ km}$$

37.

$$3^2 = x^2 + (x + 0{,}6)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9 = x^2 + x^2 + 1{,}2x + 0{,}36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2 + 1{,}2x - 8{,}64 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 0{,}6x - 4{,}32 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{-0{,}6 \pm \sqrt{17{,}64}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{-0{,}6 + 4{,}2}{2} = 1{,}8$$

O comprimento do portão é 1,8 m e a altura é 2,4 m.

38. O lado do quadrado mede $\frac{36 \text{ cm}}{4} = 9$ cm. A diagonal **d** é tal que $d^2 = 9^2 + 9^2 \Rightarrow d = 9\sqrt{2}$ cm.

39. $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 12$

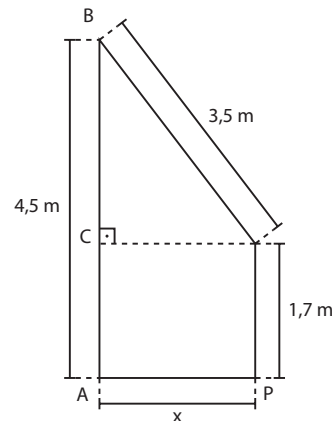
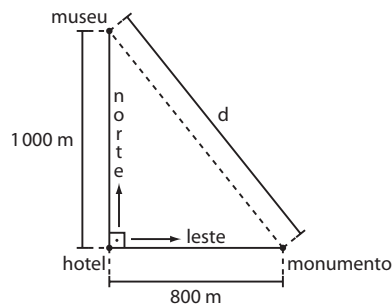
O perímetro é igual a $3\ell = 3 \cdot 12 = 36$, ou seja, 36 metros.

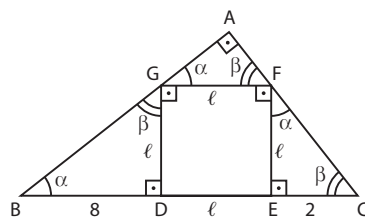
40. a) $26^2 = x^2 + (39 - 15)^2 \Rightarrow x = 10$

b) $12^2 = x^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 8\sqrt{2}$

c) $13^2 = 12^2 + \left(\frac{x - 7}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 17$

d) $6^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + \left\{\frac{[10 - (x + 2)]}{2}\right\}^2 \Rightarrow x = 2$

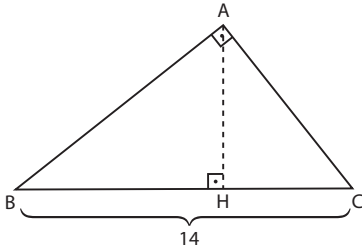
41. Seja **x** a distância, em metros, de Paulo (**P**) ao pé do poste (**A**): $(3{,}5)^2 = x^2 + (4{,}5 - 1{,}7)^2 \Rightarrow x = 2{,}1$ m

42. a) De $d^2 = (1\,000)^2 + (800)^2$, tem-se $d = 100 \cdot \sqrt{164}$, ou seja, aproximadamente 1 280 m.

b) À velocidade de 2 km/h, cada grupo terá caminhado 500 m ao fim de 15 minutos. A distância **x** entre eles é determinada pela igualdade $x^2 = (500)^2 + (500)^2$ e é aproximadamente 707 m.

Desafio

a) Nos triângulos AGF, BGD, FEC e ABC, observe que α e β são complementares.

$\triangle BDG \sim \triangle FEC$

$\dfrac{DG}{EC} = \dfrac{BD}{FE} \Rightarrow \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{8}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = 16 \Rightarrow \ell = 4$ cm

O perímetro do quadrado é 4 · (4 cm) = 16 cm.

b) A menor distância de **A** a $\overline{BC}$ é dada pela medida do segmento $\overline{AH}$, com $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BC}$ ($\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa $\overline{BC}$):

- $BC = 8 + \ell + 2 = 8 + 4 + 2 = 14$
- $\triangle BGD$: $BG^2 = 8^2 + \ell^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow BG = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
- $\triangle BGD \sim \triangle GFA \Rightarrow \dfrac{BD}{GA} = \dfrac{BG}{GF} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dfrac{8}{GA} = \dfrac{4\sqrt{5}}{4} \Rightarrow GA = \dfrac{8}{\sqrt{5}} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}$
  $AB = BG + GA = 4\sqrt{5} + \dfrac{8\sqrt{5}}{5} = \dfrac{28\sqrt{5}}{5}$
- $\triangle CFE$: $CF^2 = \ell^2 + 2^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow CF = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- $\triangle CFE \sim \triangle FGA \Rightarrow \dfrac{CE}{FA} = \dfrac{CF}{FG} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \dfrac{2}{FA} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow FA = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$
  $AC = CF + FA \Rightarrow AC = 2\sqrt{5} + \dfrac{4\sqrt{5}}{5} = \dfrac{14\sqrt{5}}{5}$

Por fim, no $\triangle$ retângulo ABC, temos:

$b \cdot c = a \cdot h \Rightarrow AC \cdot AB = BC \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{14\sqrt{5}}{5} \cdot \dfrac{28\sqrt{5}}{5} = 14 \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{28}{5}$ cm $= 5{,}6$ cm

CAPÍTULO 11 Trigonometria no triângulo retângulo

Exercícios

1. $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = \sqrt{289} = 17 \Rightarrow AC = 17$ cm

a) $\text{sen } \hat{A} = \dfrac{15}{17}$; $\cos \hat{A} = \dfrac{8}{17}$; $\text{tg } \hat{A} = \dfrac{15}{8}$

b) $\text{sen } \hat{C} = \dfrac{8}{17}$; $\cos \hat{C} = \dfrac{15}{17}$; $\text{tg } \hat{C} = \dfrac{8}{15}$

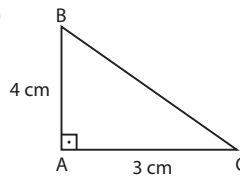
2. a) $\triangle QOP$: $\text{tg } \theta = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

b) $\triangle Q'OP'$: $\text{tg } \theta = \dfrac{P'Q'}{OP'} \Rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{OP'} \Rightarrow OP' = 9$ m

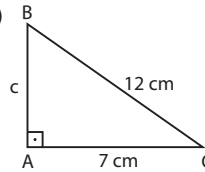
3. a) $\text{sen } \hat{C} = \dfrac{2}{7}$

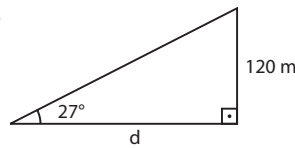
b) $BC^2 = 11^2 + 60^2 = 121 + 3\,600 = 3\,721 \Rightarrow$
$\Rightarrow BC = \sqrt{3\,721} = 61$
$\text{sen } \hat{B} = \dfrac{11}{61}$

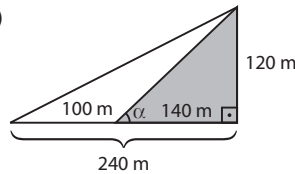
c) $AC^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow AC = \sqrt{41}$
$\text{sen } \hat{A} = \dfrac{5}{\sqrt{41}} = \dfrac{5\sqrt{41}}{41}$

4. a) (triângulo retângulo em A, com AB = 4 cm e AC = 3 cm)

$BC^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow BC = 5$ cm

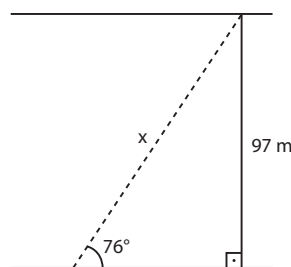
$\cos \hat{B} = \dfrac{4}{5}$ e $\cos \hat{C} = \dfrac{3}{5}$

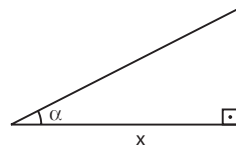
b)

$12^2 = c^2 + 7^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow c^2 = 144 - 49 \Rightarrow$
$\Rightarrow c^2 = 95 \Rightarrow c = \sqrt{95}$ cm
$\cos \hat{B} = \dfrac{\sqrt{95}}{12}$; $\cos \hat{C} = \dfrac{7}{12}$

5. a)

$\text{tg } 27° = \dfrac{120}{d} \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}5 = \dfrac{120}{d} \Rightarrow$
$\Rightarrow d = 240$ m

b)

$\text{tg } \alpha = \dfrac{120 \text{ m}}{140 \text{ m}} \simeq 0{,}857$

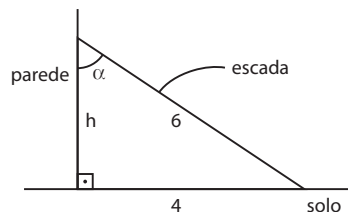
O valor mais próximo que encontramos na tabela é $\alpha = 41°$.

6.

$\text{sen } 76° = \dfrac{97}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}97030 = \dfrac{97}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 99{,}96 \text{ m} \simeq 100$ m

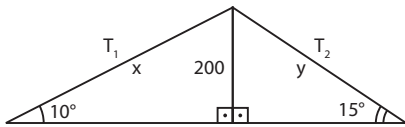
7.

$\text{tg } \alpha = \dfrac{3{,}2}{x} = 0{,}0833 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{3{,}2}{x} = \dfrac{1}{12} \Rightarrow x = 38{,}4$ m

8. a) $16^2 = 15^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = 31 \Rightarrow d = \sqrt{31} \text{ m} \simeq 5{,}57$ m

b) $\text{tg } \alpha = \dfrac{5{,}57}{15} = 0{,}37$. A rampa não é acessível.

9.

a) $\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$; na tabela, obtemos $\alpha \simeq 42°$.

b) $6^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5} \simeq 4{,}48 \Rightarrow h \simeq 4{,}48$ m

10.

a) Na trilha 2, pois a inclinação é maior.

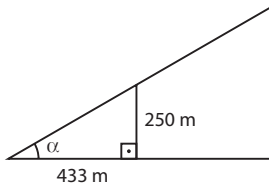
b) $\text{sen } 10° = \frac{200}{x} \Rightarrow x = \frac{200}{0{,}174} \simeq 1\,149{,}42$

Aproximando, obtemos x = 1 149 m.

$\text{sen } 15° = \frac{200}{y} \Rightarrow y = \frac{200}{0{,}259} \simeq 772{,}2$

Aproximando, obtemos y = 772 m.

A diferença pedida é 1 149 m − 772 m = 377 m

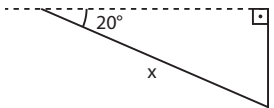
11.

$\text{tg } \alpha = \frac{250}{433} \simeq 0{,}5773 \xRightarrow{\text{(tabela)}} \alpha = 30°$

12. a) $\text{tg } 50° = \frac{4}{x} \Rightarrow 1{,}19175 = \frac{4}{x} \Rightarrow x \simeq 3{,}36$

b) $\cos 30° = \frac{x}{6} \Rightarrow 0{,}86603 = \frac{x}{6} \Rightarrow x \simeq 5{,}196$

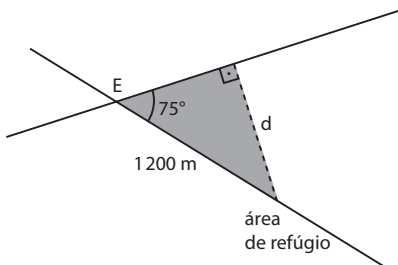
c) $\cos x = \frac{75}{106} \Rightarrow \cos x = 0{,}707 \xRightarrow{\text{(tabela)}} x = 45°$

d) $\text{sen } 54° = \frac{8}{x} \Rightarrow 0{,}80903 = \frac{8}{x} \Rightarrow x \simeq 9{,}89$

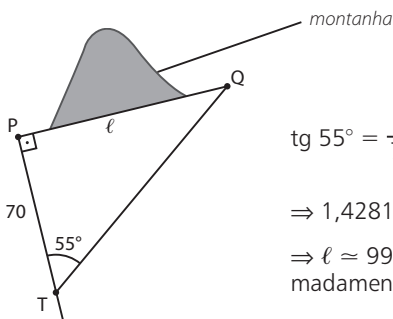
13.

$\text{sen } 20° = \frac{3}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}34202 = \frac{3}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 8{,}77$ km

14.

$\text{sen } 75° = \frac{d}{1\,200} \Rightarrow 0{,}96593 = \frac{d}{1\,200} \Rightarrow d \simeq 1\,159$ m

15.

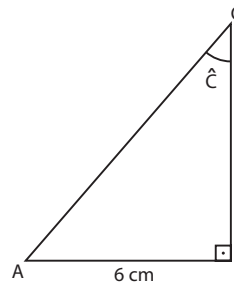
$\text{tg } 55° = \frac{\ell}{70} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1{,}42815 = \frac{\ell}{70} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell \simeq 99{,}97$ m ou aproximadamente 100 m.

16. O seno de um ângulo agudo é definido, no triângulo retângulo, pela razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa. Ora, a hipotenusa corresponde ao lado de maior medida em um triângulo retângulo, de modo que essa razão está entre 0 e 1. Para o cosseno vale a mesma ideia.

A tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida do cateto adjacente ao ângulo.

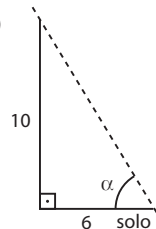
Pode ocorrer que o cateto oposto meça mais ou menos (ou até tenha a mesma medida) que o adjacente, de modo que a tangente pode assumir qualquer valor real positivo.

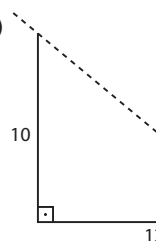
17.

a) $\text{sen } \hat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 0{,}2 = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = 30$ cm

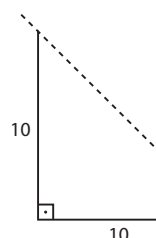
b) $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 30^2 = 6^2 + BC^2 \Rightarrow$

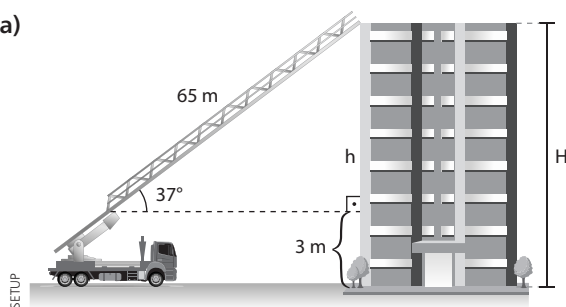
$\Rightarrow BC = \sqrt{900 - 36} = \sqrt{864} = 12\sqrt{6}$

$\text{sen } \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{12\sqrt{6}}{30} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

18. a)

$\text{tg } \alpha = \frac{10}{6} = 1{,}666... \xRightarrow{\text{(tabela)}} \alpha \simeq 59°$

b)

$\text{tg } \alpha = \frac{10}{12} = 0{,}833... \xRightarrow{\text{(tabela)}} \alpha \simeq 40°$

c)

$\text{tg } \alpha = \frac{10}{10} = 1 \xRightarrow{\text{(tabela)}} \alpha = 45°$

19. a)

b) $\text{sen } 37° = \frac{h}{65} \Rightarrow 0{,}6 = \frac{h}{65} \Rightarrow h = 39 \text{ m}$

$H = h + 3 \Rightarrow H = 39 + 3 \Rightarrow H = 42 \text{ m}$

$42 \div 2{,}8 = 15$

Portanto, o prédio possui 15 andares.

20. a) $\text{tg } 60° = \frac{8\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 8$

b) $\text{sen } 45° = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{x} \Rightarrow x \cdot \sqrt{2} = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$

c) O triângulo é retângulo isósceles; o outro cateto também mede **x**.

Daí: $6^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

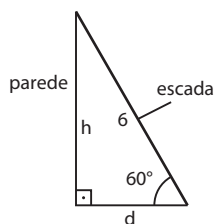
d) $\text{sen } 30° = \frac{x}{\frac{11}{2}} \Rightarrow x = \frac{11}{2} \cdot \text{sen } 30° = \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{11}{4}$

e) $\cos 60° = \frac{x}{9} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 4{,}5$

f) A hipotenusa do triângulo de catetos $\sqrt{2}$ e $\sqrt{10}$ mede $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Daí: $\cos 30° = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 4$

21.

$\text{sen } 60° = \frac{h}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 3\sqrt{3} \text{ m}$

$\cos 60° = \frac{d}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{6} \Rightarrow$

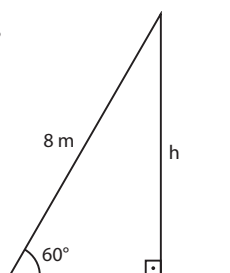
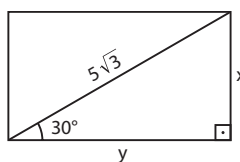
$\Rightarrow d = 3 \text{ m}$

22.

$\text{sen } 60° = \frac{h}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow$

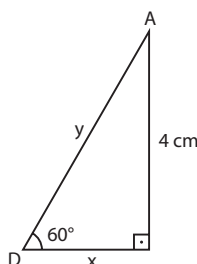
$\Rightarrow h = 4\sqrt{3} \text{ m}$

23.

$\text{sen } 30° = \frac{x}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{5\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30° = \frac{y}{5\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{5\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{15}{2}$

O perímetro é: $2x + 2y = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm} + 2 \cdot \frac{15}{2} \text{ cm} =$

$= 5\sqrt{3} \text{ cm} + 15 \text{ cm} = 5\left(\sqrt{3}+3\right) \text{ cm}$

24.

$\text{tg } 60° = \frac{4}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

$CD = x + 15 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 15$

$\text{sen } 60° = \frac{4}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

$AD = BC = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$

O perímetro do paralelogramo é:

$2 \cdot \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + 15\right) + 2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3} =$

$= \frac{8\sqrt{3}}{3} + 30 + \frac{16\sqrt{3}}{3} = \left(8\sqrt{3}+30\right) \text{ cm}$

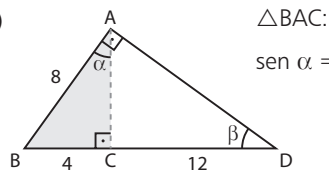
25. a) $\overline{AC}$ é a altura relativa à hipotenusa $\overline{BD}$. Lembrando que o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto entre a medida de sua projeção na hipotenusa e a medida da hipotenusa, escrevemos:

$AB^2 = BD \cdot BC \Rightarrow 8^2 = (x + 4) \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 = x + 4 \Rightarrow x = 12$

b)

$\triangle BAC$:

$\text{sen } \alpha = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

c) 1º modo: $\triangle BAD$: $\text{tg } \beta = \frac{AB}{AD}$;

mas $AD^2 = 16^2 - 8^2 = 256 - 64 = 192 \Rightarrow$

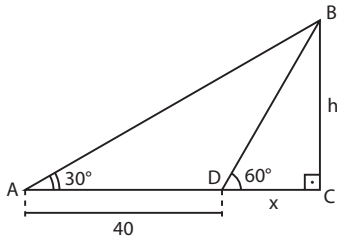
$\Rightarrow AD = 8\sqrt{3}$

$\text{tg } \beta = \frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2º modo: Como $\alpha = 30°$, no $\triangle BAC$ concluímos que $\text{med}(A\hat{B}C) = 60°$.

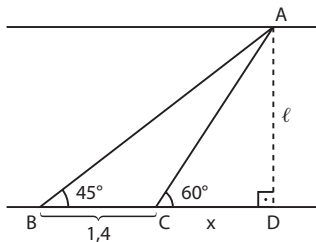
$\triangle BAD$: $90° + 60° + \beta = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = 30°$ e $\text{tg } \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

26.

Como med(BD̂A) = 120°, concluímos que med(AB̂D) = = 30° e o △ABD é isósceles de base $\overline{AB}$. Assim, BD = 40 m. No △BCD, temos:

a) $\cos 60° = \frac{x}{BD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{40} \Rightarrow x = 20$

b) $\text{sen } 60° = \frac{h}{BD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 20\sqrt{3}$ m

27.

- △ABD: $\text{tg } 45° = \frac{AD}{BD} \Rightarrow 1 = \frac{\ell}{x + 1,4} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \ell = x + 1,4$ (1)
- △ACD: $\text{tg } 60° = \frac{\ell}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\ell}{x} \Rightarrow$
  $\Rightarrow \ell = x \cdot \sqrt{3}$ (2)

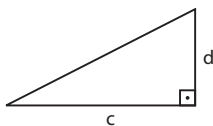
Substituindo (2) em (1) $\Rightarrow x \cdot \sqrt{3} = x + 1,4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (\sqrt{3} - 1) = 1,4 \Rightarrow$

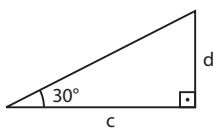
$\Rightarrow x = \frac{1,4}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1,4}{1,7 - 1} = \frac{1,4}{0,7} = 2 \Rightarrow$

Em (2), obtemos $\ell = 2 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 1,7 = 3,4 \Rightarrow \ell = 3,4$ km

28. a) Não; sejam **d** e **c**, respectivamente, o desnível e o comprimento horizontal de cada uma das rampas.

Projeto I:

$\frac{d}{c} = \frac{30}{100} = 0,3 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 0,3c$

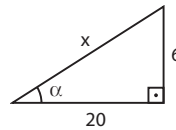
Projeto II:

$\text{tg } 30° = \frac{d}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot c \Rightarrow$

$\Rightarrow d \simeq 0,577 \cdot c$

b) Projeto I: $6 = 0,3 \cdot c \Rightarrow c = 20$ m

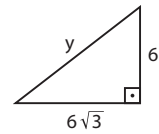
Projeto II: $6 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot c \Rightarrow c = 6 \cdot \sqrt{3}$ m

c) Projeto I:

$x = \sqrt{20^2 + 6^2}$

$x = \sqrt{436}$

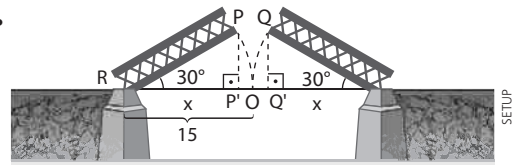
$x = 2\sqrt{109}$

$\therefore x \simeq 20,88$ m

Projeto II:

$y = \sqrt{36 + 108}$

$\therefore y = 12$ m

d) Na figura anterior, $\text{tg } \alpha = \frac{6}{20} = 0,3$. Na tabela, o valor mais próximo é $\alpha = 17°$.

29.

No triângulo PP'R, temos:

$\cos 30° = \frac{x}{15} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

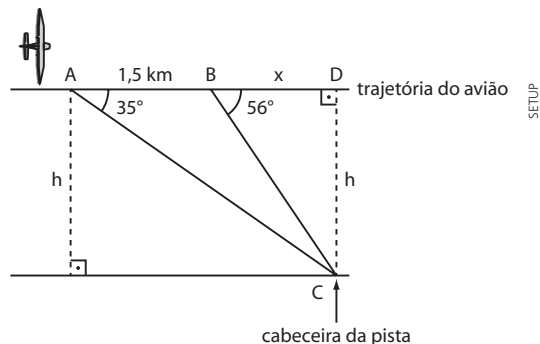
$OP' = 15 - x = 15 - \frac{15\sqrt{3}}{2}$

Como OP' = OQ', segue que

$PQ = 2 \cdot OP' \Rightarrow PQ = 2 \cdot \left(15 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow PQ = 30 - 15\sqrt{3} \Rightarrow PQ = 30 - 15 \cdot 1,7 \Rightarrow$

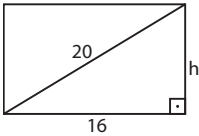
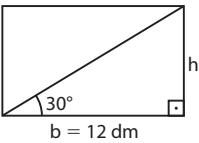
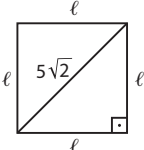
$\Rightarrow PQ = 4,5$ m

Desafio

Com a velocidade de 300 km/h, temos:

$\left.\begin{array}{l} 3\,600 \text{ s} — 300 \text{ km} \\ 18 \text{ s} — x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1,5 \text{ km} \Rightarrow AB = 1,5 \text{ km}$

△ACD: $\text{tg } 35° = \frac{h}{1,5 + x} \Rightarrow 0,7 = \frac{h}{1,5 + x} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 1,05 + 0,7x$ (1)

△BCD: $\text{tg } 56° = \frac{h}{x} \Rightarrow 1,5 = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 1,5x$ (2)

Igualando (1) e (2): $1,05 + 0,7x = 1,5x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1,05}{0,8} = x \Rightarrow x = \frac{21}{16}$ km

Daí, em (2), temos: $h = \frac{3}{2} \cdot \frac{21}{16} = \frac{63}{32} = 1,96875 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 1,96875$ km $= 1968,75$ m

CAPÍTULO 12

Áreas de figuras planas

Exercícios

1. **a)** $b = 6{,}5$ cm e $h = 12$ cm
$A = b \cdot h \Rightarrow A = (6{,}5 \text{ cm}) \cdot (12 \text{ cm}) = 78 \text{ cm}^2$

b) $\ell = 5\sqrt{3}$ m
$A = \ell^2 \Rightarrow A = \left(5\sqrt{3} \text{ m}\right)^2 = 75 \text{ m}^2$

c) $\begin{cases} b = 16 \text{ dm} \\ d = 20 \text{ dm} \end{cases}$

Pelo teorema de Pitágoras: $h^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 12$ dm
$A = b \cdot h = (16 \text{ dm}) \cdot (12 \text{ dm}) = 192 \text{ dm}^2$

d) ℓ: medida do lado do quadrado
$2p = 4\ell = 24 \text{ m} \Rightarrow \ell = 6$ m
$A = \ell^2 = (6 \text{ m})^2 = 36 \text{ m}^2$

e)

$\text{tg } 30° = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 4\sqrt{3}$ dm
$A = b \cdot h =$
$= (12 \text{ dm}) \cdot \left(4\sqrt{3} \text{ dm}\right) =$
$= 48\sqrt{3} \text{ dm}^2$

f)

$\ell^2 + \ell^2 = \left(5\sqrt{2} \text{ mm}\right)^2$
$A = \ell^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 25 \text{ mm}^2$

2. $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ cm} — 200 \text{ m} \\ 0{,}3 \text{ cm} — x \end{array}\right\} x = 0{,}3 \cdot 200 \text{ m} = 60 \text{ m}$ (medida real)

$A_{real} = (60 \text{ m})^2 = 3\,600 \text{ m}^2$

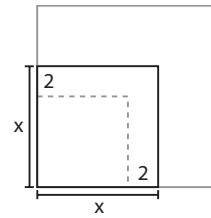
3. $\ell = 2{,}5$ u.c. $\Rightarrow A_1 = (2{,}5 \text{ u.c.})^2 = 6{,}25$ u.a.
$A = 20 \cdot A_1 = 20 \cdot (6{,}25 \text{ u.a.}) = 125$ u.a.

4. Dimensões do retângulo: **a** e **b**

$\begin{cases} 2a + 2b = 28 \text{ m} \Rightarrow a + b = 14 \text{ m} \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{a+b}{7} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow a = 6 \text{ m e } b = 8 \text{ m} \end{cases}$

$A = a \cdot b = (6 \text{ m}) \cdot (8 \text{ m}) = 48 \text{ m}^2$

5.
- ℓ: medida do lado do azulejo
  d: medida da diagonal do quadrado
  $d = \ell \cdot \sqrt{2} \Rightarrow 15\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 15$ cm
  Logo: $A_1 = (15 \text{ cm})^2 = 225 \text{ cm}^2$ (área do azulejo)
- A_2: área da superfície das paredes
  Logo: $A_2 = (54 \text{ m}) \cdot (4{,}5 \text{ m}) = (5\,400 \text{ cm}) \cdot (450 \text{ cm}) =$
  $= (5\,400) \cdot (450) \text{ cm}^2$
- **n**: número de azulejos que serão usados:
  $n \cdot A_1 = A_2 \Rightarrow n = \frac{5\,400 \cdot 450}{225} = 10\,800$

6. $A = 225 \text{ m}^2$ (área do quintal)
x: medida do lado da piscina original (em m)

A_1 (área da piscina original): $A_1 = x^2$

A_2 (área da piscina reduzida): $\begin{cases} A_2 = (x - 2)^2 & (1) \\ A_2 = 0{,}36 \cdot 225 \text{ m}^2 & (2) \end{cases}$

De (1) e (2): $(x - 2)^2 = 81 \text{ m}^2 \Rightarrow x = 11 \text{ m} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_1 = (11 \text{ m})^2 = 121 \text{ m}^2$
Logo: $A_1 - A_2 = 121 \text{ m}^2 - 81 \text{ m}^2 = 40 \text{ m}^2$

7. **a** e **b**: dimensões da mesa $\Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 52 \text{ dm} & (1) \\ a \cdot b = 144 \text{ dm}^2 & (2) \end{cases}$

De (1) e (2), obtêm-se: $a = 18$ dm e $b = 8$ dm (ou $a = 8$ dm e $b = 18$ dm).

8. A_1: área da área de serviço
$A_1 = (2{,}10 \text{ m}) \cdot (3{,}55 \text{ m}) = 7{,}455 \text{ m}^2$
A_2: área da cozinha
$A_2 = (2{,}55 \text{ m}) \cdot (4{,}50 \text{ m}) = 11{,}475 \text{ m}^2$
Logo: $A_1 + A_2 = 18{,}93 \text{ m}^2$

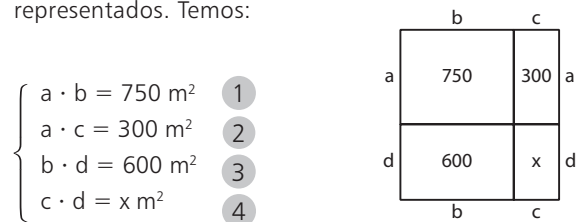
9. A malha é composta de $10 \cdot 9 = 90$ quadradinhos.
A: área de cada quadradinho de x m de medida do lado
$A = x^2 = \frac{36\,000}{90} \text{ m}^2 \Rightarrow x = 20$ m

a) Perímetro das regiões I, II e III: $14x = 280$ m
Perímetro da região IV: $12x = 240$ m
Logo, as regiões com perímetros iguais são I, II e III.

b) $A_{I} = 6x^2$; $A_{II} = 7x^2$; $A_{III} = 6x^2$; $A_{IV} = 6x^2$
Logo, Lucas deverá construir na superfície II.
$A_{II} = 7x^2 = 7 \cdot 400 \text{ m}^2 = 2\,800 \text{ m}^2$

10. Sejam **a**, **b**, **c** e **d** as dimensões, em metros, dos lotes representados. Temos:

$\begin{cases} a \cdot b = 750 \text{ m}^2 & (1) \\ a \cdot c = 300 \text{ m}^2 & (2) \\ b \cdot d = 600 \text{ m}^2 & (3) \\ c \cdot d = x \text{ m}^2 & (4) \end{cases}$

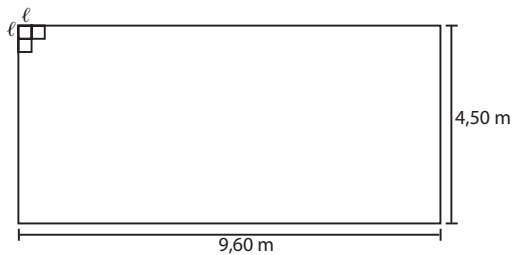
	b	c	
a	750	300	a
d	600	x	d
	b	c	

De (1) e (2): $\frac{b}{c} = \frac{750}{300} \Rightarrow b = \frac{5}{2}c$ (*)

Substituindo (*) em (3): $\left(\frac{5}{2}c\right) \cdot d = 600 \text{ m}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c \cdot d = 240 \text{ m}^2 \Rightarrow x = 240 \text{ m}^2$
Assim, o preço de venda do lote de 240 m^2 de área é:
$240 \cdot$ R\$ 86,00 = R\$ 20 640,00

11. **A**: área destinada aos espectadores
$A = (180 \text{ m}) \cdot (60 \text{ m}) = 10\,800 \text{ m}^2 =$
$= 108\,000\,000 \text{ cm}^2$
Logo:
$108\,000\,000 : 2\,500 = 43\,200$ (43 200 pessoas)

12. **A_1**: área do piso da sala

$A_1 = (9,60 \text{ m}) \cdot (4,50 \text{ m}) = 43,20 \text{ m}^2$

a) **ℓ**: medida do lado de cada ladrilho

x: número de ladrilhos colocados em 1 linha

$x = \dfrac{9,60}{\ell} = \dfrac{96}{10\ell}$

y: número de ladrilhos colocados em 1 coluna

$y = \dfrac{4,50}{\ell} = \dfrac{45}{10\ell}$

Como $3 = \text{mdc}(96, 45)$ e $x, y \in \mathbb{Z}$, então, para que se obtenha o menor número de ladrilhos, devemos ter: $\ell = 0,3$ m

Logo: $x = 32$ e $y = 15 \Rightarrow x \cdot y = 32 \cdot 15 = 480$ (480 ladrilhos colocados)

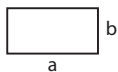
b) Como $\ell = 0,3 \text{ m} = 30 \text{ cm}$, então:

$A = \ell^2 = (30 \text{ cm})^2 = 900 \text{ cm}^2$

13. Paulo (tablete quadrado):

$\begin{cases} 4\ell = 12 \text{ cm} \Rightarrow \ell = 3 \text{ cm} \\ A_1 = \ell^2 \text{ (área da superfície do seu tablete)} \quad (1) \end{cases}$

Carlos (tablete retangular):

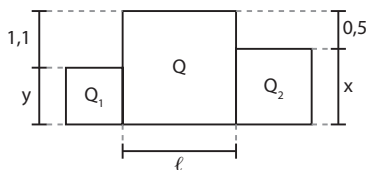
$\begin{cases} a = 3b \quad (2) \\ 2a + 2b = 12 \text{ cm} \Rightarrow a + b = 6 \text{ cm} \quad (3) \\ A_2 = a \cdot b \text{ (área da superfície do seu tablete)} \quad (4) \end{cases}$

De (1), temos: $A_1 = (3 \text{ cm})^2 = 9 \text{ cm}^2$

De (2) e (3), temos: $a + b = 6 \text{ cm} \Rightarrow 4b = 6 \text{ cm} \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 1,5$ cm e $a = 4,5$ cm

De (4) temos: $A_2 = (4,5 \text{ cm}) \cdot (1,5 \text{ cm}) = 6,75 \text{ cm}^2$

Como as espessuras dos tabletes são iguais, então, se $A_2 < A_1$, Carlos teria vantagem em aceitar a troca.

14. Observe na figura que:

$\ell = y + 1,1 = x + 0,5 \Rightarrow \begin{cases} x = \ell - 0,5 \\ y = \ell - 1,1 \end{cases}$

$A_{Q_1} = y^2 = (\ell - 1,1)^2$

$A_{Q_2} = x^2 = (\ell - 0,5)^2$

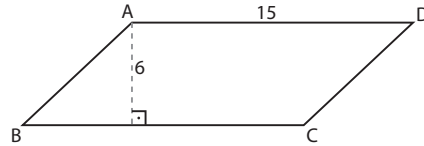
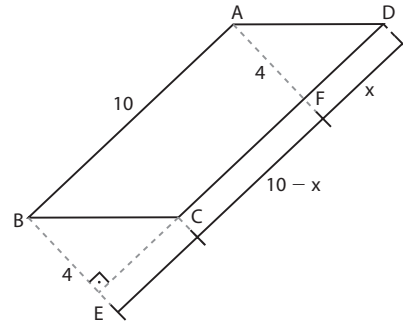
$A_Q = \ell^2$

Como $A_{Q_1} + A_{Q_2} + A_{Q_3} = 7,06 \text{ m}^2$, temos:

$(\ell - 1,1)^2 + (\ell - 0,5)^2 + \ell^2 = 7,06 \text{ m}^2 \Rightarrow$

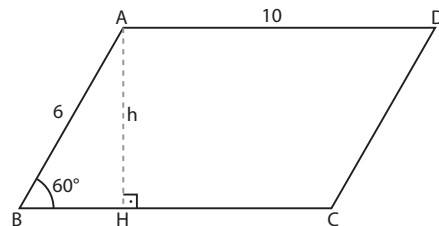
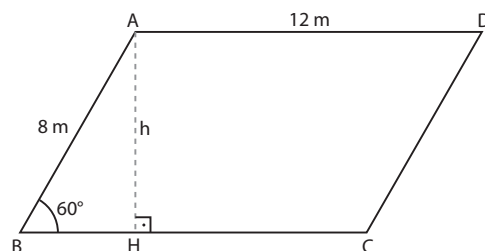
$\Rightarrow 3\ell^2 - 3,2\ell - 5,6 = 0 \Rightarrow \ell = 2 \text{ m}$

Logo, $A_Q = (2 \text{ m})^2 = 4 \text{ m}^2$

15. **a)** $\left.\begin{matrix} b = 15 \text{ cm} \\ h = 6 \text{ cm} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = b \cdot h = (15 \text{ cm}) \cdot (6 \text{ cm}) = 90 \text{ cm}^2$

b) $\left.\begin{matrix} b = 10 \text{ cm} \\ h = 4 \text{ cm} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = b \cdot h = (10 \text{ cm}) \cdot (4 \text{ cm}) = 40 \text{ cm}^2$

c) $b = 10$ cm

$\triangle AHB$ retângulo $\Rightarrow \text{sen } 60° = \dfrac{h}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 3\sqrt{3}$ cm

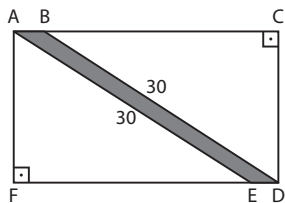
$A = b \cdot h = (10 \text{ cm})\left(3\sqrt{3} \text{ cm}\right) = 30\sqrt{3} \text{ cm}^2$

16. $b = AD = 12$ m

$\triangle AHB$ retângulo $\Rightarrow \text{sen } 60° = \dfrac{h}{AB} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 4\sqrt{3}$ m

$A = b \cdot h = (12 \text{ m})\left(4\sqrt{3} \text{ m}\right) = 48\sqrt{3} \text{ m}^2$

17. $\left.\begin{matrix} \triangle AFE \text{ retângulo} \\ AE = 30 \text{ m e } AF = \dfrac{3}{4} \cdot FE \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AF^2 + FE^2 = 30^2 \Rightarrow \dfrac{9}{16} \cdot FE^2 + FE^2 = 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow FE = 24 \text{ m} \Rightarrow AF = \dfrac{3}{4} \cdot 24 \text{ m} = 18 \text{ m}$

$A_{ACDF} = 504 \text{ m}^2 \Rightarrow AF \cdot FD = 504 \Rightarrow 18 \cdot FD = 504 \Rightarrow$
$\Rightarrow FD = 28 \text{ m}$

Como AF e $ED = FD - FE = 28 \text{ m} - 24 \text{ m} = 4 \text{ m}$ são as respectivas medidas da altura e da base da passagem (paralelogramo), então sua área é:

$A_{ABDE} = ED \cdot AF = (4 \text{ m}) \cdot (18 \text{ m}) = 72 \text{ m}^2$

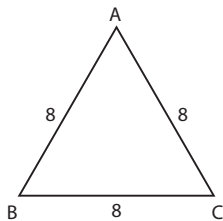
Outro modo de resolução:

Primeiramente determinam-se $FE = 24$ m e $AF = 18$ m, da forma como foi feito anteriormente.

Como os triângulos retângulos AFE e CDB são congruentes, temos:

$A_{ACDF} = 2 \cdot A_{AFE} + A_{ABDE} \Rightarrow$

$\Rightarrow 504 = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18\right) + A_{ABDE} \Rightarrow A_{ABDE} = 72 \text{ m}^2$

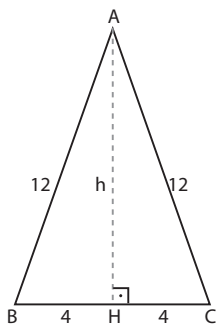
18. a) $\triangle ABC$ é equilátero.

$\ell = 8 \text{ m}$

$A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{64\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 16\sqrt{3} \text{ m}^2$

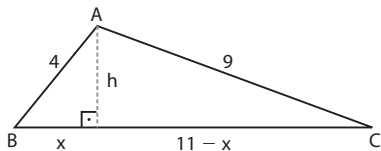
b) $b = AC = 8$ m

H é ponto médio de $\overline{BC} \Rightarrow BH = HC = \dfrac{BC}{2} = 4 \text{ m}$

$\triangle AHC$ retângulo $\Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 8\sqrt{2} \text{ m}$

$A = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 32\sqrt{2} \text{ m}^2$

c) $a = BC = 11$ m; $b = AC = 9$ m; $c = AB = 4$ m

$4^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = 16 - x^2$ (1)

$9^2 = (11 - x)^2 + h^2 \Rightarrow 81 = 121 - 22x + x^2 + h^2$ (2)

Substituindo (1) em (2):

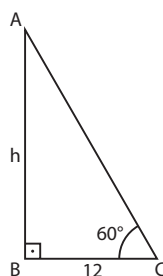
$81 = 121 - 22x + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 22x = 56 \Rightarrow x = \dfrac{28}{11} \text{ m}$

Em (1): $h^2 = 16 - \dfrac{784}{121} = \dfrac{1\,152}{121} \Rightarrow h = \dfrac{24\sqrt{2}}{11} \text{ m}$

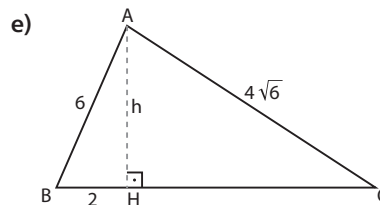
$A_{ABC} = \dfrac{\cancel{11} \cdot \dfrac{24\sqrt{2}}{\cancel{11}}}{2} \Rightarrow A_{ABC} = 12\sqrt{2} \text{ m}^2$

d) $\triangle ABC$ retângulo $\Rightarrow \text{tg } 60° = \dfrac{h}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = BC \cdot \text{tg } 60° = 12\sqrt{3} \text{ m}$

$A = \dfrac{1}{2} \cdot BC \cdot h \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12\sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 72\sqrt{3} \text{ m}^2$

e)

$\triangle AHB$ retângulo $\Rightarrow h^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$ m (*)

$\triangle AHC$ retângulo $\Rightarrow h^2 + HC^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2 \overset{*}{\Rightarrow}$

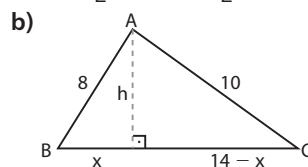
$\Rightarrow HC^2 = 96 - 32 \Rightarrow HC = 8 \text{ m}$

Logo: $a = BH + HC = 10$ m e $h = 4\sqrt{2}$ m.

$A = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4\sqrt{2} \Rightarrow A = 20\sqrt{2} \text{ m}^2$

19. a) $b = 12$ cm e $h = 8$ cm

$A = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot h = \dfrac{1}{2} (12 \text{ cm}) \cdot (8 \text{ cm}) = 48 \text{ cm}^2$

b)

$\begin{cases} 8^2 = h^2 + x^2 & (1) \\ 10^2 = h^2 + (14 - x)^2 \Rightarrow 100 = h^2 + 196 - 28x + x^2 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2):

$100 = 64 + 196 - 28x = 160 \Rightarrow x = \dfrac{40}{7} \text{ m}$

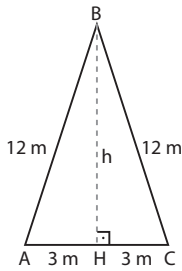
Em (1): $64 = h^2 + \dfrac{1\,600}{49} \Rightarrow h^2 = \dfrac{1\,536}{49} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \dfrac{16\sqrt{6}}{7} \text{ m}$

$A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{14 \cdot \dfrac{16\sqrt{6}}{7}}{2} = 16\sqrt{6} \text{ m}^2$

c) $\triangle ABC$ é equilátero e $\ell = 6$ dm.

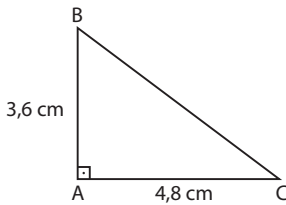
$A = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \dfrac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 9\sqrt{3} \text{ dm}^2$

d) $\triangle BHC$ retângulo $\Rightarrow h^2 + 3^2 = 12^2 \Rightarrow h = 3\sqrt{15}$ m

$b = AC = 6$ m

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h =$

$= \frac{1}{2}(6 \text{ m})(3\sqrt{15} \text{ m}) =$

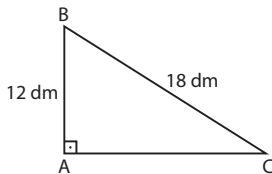
$= 9\sqrt{15} \text{ m}^2$

e) $b = 4{,}8$ cm e $c = 3{,}6$ cm

$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c =$

$= \frac{1}{2}(4{,}8 \text{ cm})(3{,}6 \text{ cm}) =$

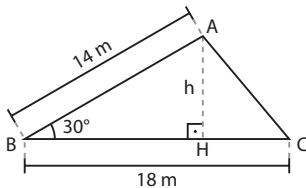
$= 8{,}64 \text{ cm}^2$

f) $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow 12^2 + AC^2 = 18^2 \Rightarrow AC = 6\sqrt{5}$ dm

B, 12 dm, 18 dm, A, C

$A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB =$

$= \frac{1}{2}(6\sqrt{5} \text{ dm})(12 \text{ dm}) =$

$= 36\sqrt{5} \text{ dm}^2$

g)

h: medida da altura $\overline{AH}$ do $\triangle ABC$

$\triangle AHB$ retângulo $\Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{h}{14} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{14} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 7$ m

A: área do $\triangle ABC$

$A = \frac{1}{2} BC \cdot h \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot (18 \text{ m}) \cdot (7 \text{ m}) = 63 \text{ m}^2$

20. A folha de papel tem 42 quadradinhos, cada um dos quais com área igual a:

$\ell^2 = \frac{(0{,}24 \text{ m}) \cdot (0{,}28 \text{ m})}{42} = 0{,}0016 \text{ m}^2 = 16 \text{ cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = 4$ cm

$$\begin{cases} h = \text{medida da altura do triângulo} \Rightarrow \\ \Rightarrow h = 3 \cdot (4 \text{ cm}) = 12 \text{ cm} \\ b = \text{medida da base do triângulo} \Rightarrow \\ \Rightarrow b = 6 \cdot (4 \text{ cm}) = 24 \text{ cm} \end{cases}$$

Logo, a área é:

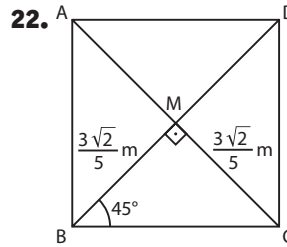
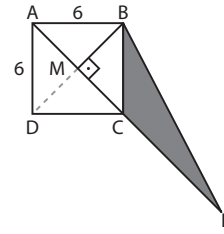
$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2}(24 \text{ cm}) \cdot (12 \text{ cm}) = 144 \text{ cm}^2$

21. Observe na figura que:

$A_{BCE} = \frac{1}{2} CE \cdot BM$

$$\left.\begin{array}{l} CE = AC = 6\sqrt{2} \text{ cm} \\ BM = \frac{BD}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A_{BCE} = \frac{1}{2}(6\sqrt{2} \text{ cm}) \cdot (3\sqrt{2} \text{ cm}) = 18 \text{ cm}^2$

22.

A_1 = área do $\triangle BMC \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right) \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = \frac{9}{25} \text{ m}^2$

A = área da superfície da mesa $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = 4 \cdot A_1 = 4 \cdot \frac{9}{25} \text{ m}^2 = 1{,}44 \text{ m}^2$

23. $\triangle ABC$ retângulo, em que **b** e **c** são as medidas dos catetos e **a** é a medida da hipotenusa.

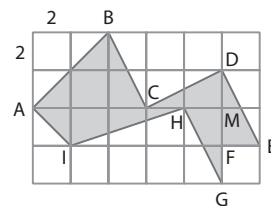
$$\begin{cases} b + c = 28 \text{ cm} \Rightarrow (b + c)^2 = 784 \text{ cm}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 784 \text{ cm}^2 \quad (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 800 \text{ cm}^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = 800 \text{ cm}^2 - a^2 \quad (2) \\ a^2 = b^2 + c^2 \text{ (teorema de Pitágoras)} \quad (3) \end{cases}$$

De (2) e (3): $a^2 = 800 \text{ cm}^2 - a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 400 \text{ cm}^2 = b^2 + c^2$ (4)

Substituindo (4) em (1): $400 \text{ cm}^2 + 2bc = 784 \text{ cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow bc = 192 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_{ABC} = \frac{1}{2} bc = 96 \text{ cm}^2$

24. Para calcular a área da região sombreada, vamos dividi-la em 5 regiões triangulares — (ABC), (CDM), (DEF), (HMG) e (AHI) —, em que (CDM), (DEF) e (HMG) são congruentes entre si.

Temos:

$A_{ABC} = \frac{1}{2}(3 \cdot 2 \text{ cm}) \cdot (2 \cdot 2 \text{ cm}) = 12 \text{ cm}^2$

$A_{CDM} = A_{DEF} = A_{HMG} = \frac{1}{2}(2 \cdot 2 \text{ cm}) \cdot (1 \cdot 2 \text{ cm}) = 4 \text{ cm}^2$

$A_{AHI} = \frac{1}{2}(4 \cdot 2 \text{ cm}) \cdot (1 \cdot 2 \text{ cm}) = 8 \text{ cm}^2$

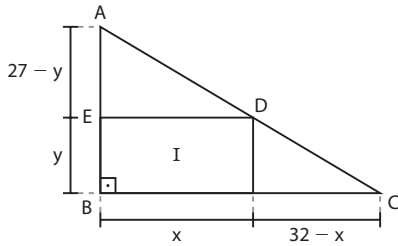
Logo: $A = A_{ABC} + 3 \cdot A_{CDM} + A_{AHI} =$

$= 12 \text{ cm}^2 + 12 \text{ cm}^2 + 8 \text{ cm}^2 = 32 \text{ cm}^2$

(Sugestão: pedir aos estudantes que encontrem outras divisões que permitam calcular a área da região sombreada.)

25. $A_I = x \cdot y$ (área do retângulo)

Observe na figura que $\triangle AED \sim \triangle ABC$, ou seja:

$$\frac{27 - y}{27} = \frac{x}{32} \Rightarrow y = 27 - \frac{27}{32}x$$

$$A_I = x \cdot y = x \cdot \left(27 - \frac{27x}{32}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_I = 27x - \frac{27x^2}{32}$$

A_I é máxima se $x = x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-27}{2 \cdot \left(-\dfrac{27}{32}\right)} = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 16$ m

Nesse caso, $y = 27 - \dfrac{27}{32} \cdot 16 = 13{,}5 \Rightarrow y = 13{,}5$ m.

As dimensões são 16 m e 13,5 m.

26. ℓ: medida do lado do $\triangle ABC$ (equilátero)

$\ell + 25\%\ell = \ell + \dfrac{\ell}{4} = \dfrac{5}{4}\ell$: medida do lado do $\triangle EBD$ (equilátero)

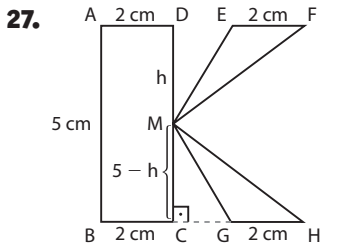
$$A_{ABC} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_{EBD} = \frac{\left(\frac{5}{4}\ell\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{25}{16} \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{25}{16} \cdot A_{ABC} =$$

$$= A_{ABC} + \frac{9}{16} \cdot A_{ABC} = A_{ABC} + 0{,}5625 \cdot A_{ABC}$$

Logo, o acréscimo na área do $\triangle ABC$ é de 0,5625 = = 56,25%.

27.

$\mathbf{A_1}$: área do retângulo ABCD

$A_1 = (2\text{ cm})(5\text{ cm}) = 10\text{ cm}^2$

$\mathbf{A_2}$: área do triângulo EFM

$$A_2 = \frac{2 \cdot h}{2} = h$$

$\mathbf{A_3}$: área do triângulo GHM

$$A_3 = \frac{2 \cdot (5 - h)}{2} = 5 - h$$

A: área do monograma

$A = A_1 + A_2 + A_3 =$

$= 10 + \cancel{h} + 5 - \cancel{h} \Rightarrow A = 15\text{ cm}^2$

x: preço do tecido por monograma

$$\left.\begin{array}{l} 1\text{ m}^2 = 10\,000\text{ cm}^2 \text{ — } 120 \text{ reais} \\ 15\text{ cm}^2 \text{ — } x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 120}{10\,000} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \text{R\$ } 0{,}18$

P: preço unitário do monograma

P = R$ 0,18 + R$ 7,50 = R$ 7,68

Logo, Kátia deverá desembolsar:

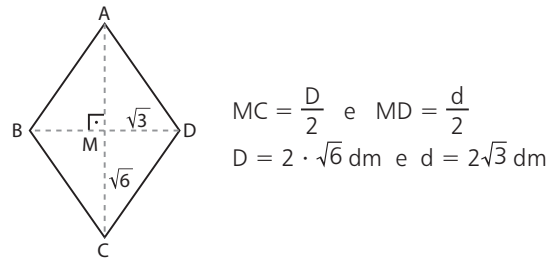
20 · R$ 7,68 = R$ 153,60

28. a) D = 16 dm e d = 12 dm

$$A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow A = \frac{1}{2}(16\text{ dm}) \cdot (12\text{ dm}) = 96\text{ dm}^2$$

b) M: ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$

$MC = \dfrac{D}{2}$ e $MD = \dfrac{d}{2}$

$D = 2 \cdot \sqrt{6}$ dm e $d = 2\sqrt{3}$ dm

$$A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{6}\text{ dm}\right) \cdot \left(2\sqrt{3}\text{ dm}\right) = 6\sqrt{2}\text{ dm}^2$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} AM = \dfrac{D}{2} \\ \triangle AMD \text{ é retângulo} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(\dfrac{D}{2}\right)^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 16\sqrt{2}$ dm

$d = BD = 8$ dm

$$A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(16\sqrt{2}\text{ dm}\right) \cdot (8\text{ dm}) = 64\sqrt{2}\text{ dm}^2$$

29. a)

$D = AC = 12\text{ cm} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = 6$ cm

$d = BD \Rightarrow MD = \dfrac{d}{2}$

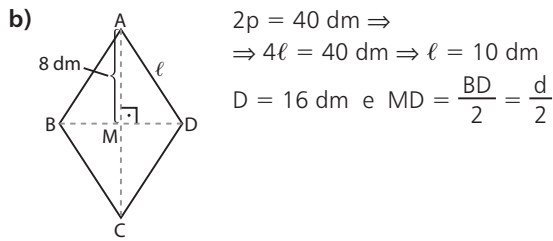
$\triangle AMD$ é retângulo $\Rightarrow AM^2 + MD^2 = AD^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 36 + \frac{d^2}{4} = 64 \Rightarrow d = 4\sqrt{7}\text{ cm}$$

Logo: $A = \dfrac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}(12\text{ cm})\left(4\sqrt{7}\text{ cm}\right) = 24\sqrt{7}\text{ cm}^2$$

b)

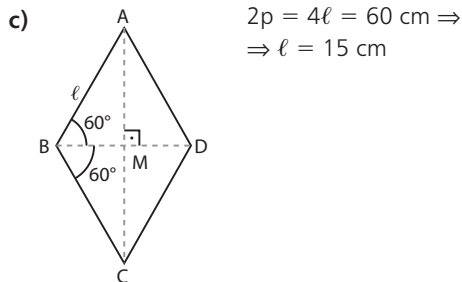
$2p = 40 \text{ dm} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\ell = 40 \text{ dm} \Rightarrow \ell = 10 \text{ dm}$
$D = 16 \text{ dm}$ e $MD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{d}{2}$

$\triangle AMD$ é retângulo $\Rightarrow AM^2 + MD^2 = \ell^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 64 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2 = 100 \Rightarrow d = 12 \text{ dm}$

Logo: $A = \dfrac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2}(16 \text{ dm}) \cdot (12 \text{ dm}) = 96 \text{ dm}^2$

c)

$2p = 4\ell = 60 \text{ cm} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell = 15 \text{ cm}$

$\triangle AMB$ é retângulo

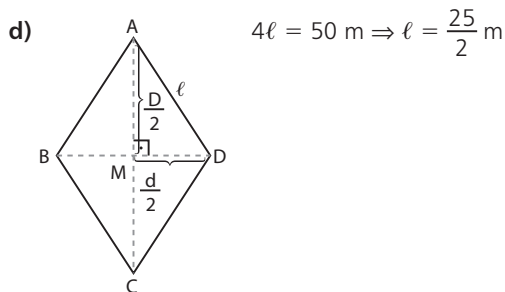
$$\begin{cases} \cos 60° = \dfrac{BM}{\ell} \Rightarrow BM = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \text{ cm} = \dfrac{15}{2} \text{ cm} \\ \text{sen } 60° = \dfrac{AM}{\ell} \Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 15 \text{ cm} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2} \text{ cm} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} BM = \dfrac{d}{2} \Rightarrow d = 2 \cdot BM = 15 \text{ cm} \\ AM = \dfrac{D}{2} \Rightarrow D = 2 \cdot AM = 15\sqrt{3} \text{ cm} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2}\left(15\sqrt{3} \text{ cm}\right) \cdot (15 \text{ cm}) = \dfrac{225\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

d)

$4\ell = 50 \text{ m} \Rightarrow \ell = \dfrac{25}{2} \text{ m}$

$\dfrac{d}{D} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{d}{3} = \dfrac{D}{4}$ (1)

$\triangle AMD$ retângulo:

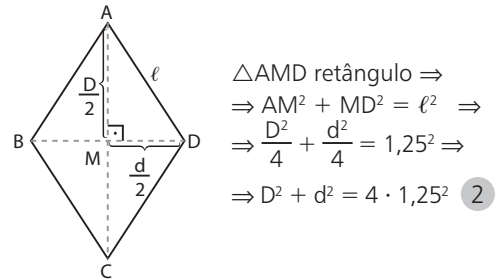
$\dfrac{d^2}{4} + \dfrac{D^2}{4} = \ell^2 \Rightarrow d^2 + D^2 = 4 \cdot \dfrac{625}{4} = 625$ (2)

De (1): $\dfrac{d^2}{9} = \dfrac{D^2}{16} = \dfrac{d^2 + D^2}{9 + 16} \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{d^2}{9} = \dfrac{D^2}{16} = \dfrac{625}{25} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2 = 9 \cdot 25 \Rightarrow d = 15 \text{ m} \\ \text{e} \\ D^2 = 16 \cdot 25 \Rightarrow D = 20 \text{ m} \end{cases}$$

Logo: $A = \dfrac{1}{2} \cdot D \cdot d \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}(20 \text{ m}) \cdot (15 \text{ m}) = 150 \text{ m}^2$

30. $\ell = 1{,}25 \text{ cm}$ e $\dfrac{d}{D} = \dfrac{3}{4}$ (1)

$\triangle AMD$ retângulo $\Rightarrow$
$\Rightarrow AM^2 + MD^2 = \ell^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{D^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} = 1{,}25^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow D^2 + d^2 = 4 \cdot 1{,}25^2$ (2)

De (1): $\dfrac{d}{3} = \dfrac{D}{4} \Rightarrow \dfrac{d^2}{9} = \dfrac{D^2}{16} \Rightarrow \dfrac{d^2}{9} = \dfrac{D^2}{16} = \dfrac{d^2 + D^2}{9 + 16} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d^2}{9} = \dfrac{D^2}{16} \overset{(2)}{=} \dfrac{4 \cdot 1{,}25^2}{25} \Rightarrow \begin{cases} d = 1{,}5 \text{ cm} \\ D = 2 \text{ cm} \end{cases}$

medida no mapa	medida real
1 cm	90 km
1,5 cm	d_r

$\Rightarrow d_r = 135 \text{ km}$

medida no mapa	medida real
1 cm	90 km
2 cm	D_r

$\Rightarrow D_r = 180 \text{ km}$

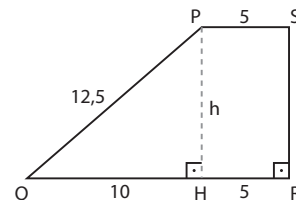
Logo, a área real é:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot D_r \cdot d_r \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}(180 \text{ km}) \cdot (135 \text{ km}) = 12\,150 \text{ km}^2$

31. a) $b = 10$ m; $B = 24$ m; $h = 12$ m

$A = \dfrac{1}{2}(b + B) \cdot h \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}(10 + 24) \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 204 \text{ m}^2$

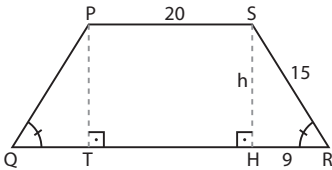
b) $b = 5$ m; $B = 15$ m

$\triangle PHQ$ retângulo:

$QH^2 + h^2 = PQ^2 \Rightarrow h^2 = 12{,}5^2 - 10^2 \Rightarrow h = 7{,}5 \text{ m}$

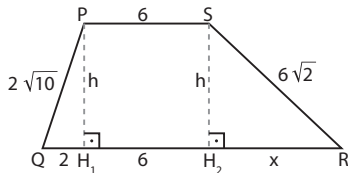
$A = \dfrac{1}{2}(b + B) \cdot h \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}(5 + 15) \cdot 7{,}5 \Rightarrow A = 75 \text{ m}^2$

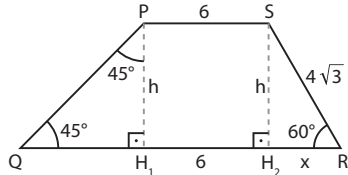
c) $b = 4$ m; $B = 10$ m; $h = 5$ m

$A = \dfrac{1}{2}(b + B) \cdot h \Rightarrow A = \dfrac{1}{2}(4 + 10) \cdot 5 \Rightarrow A = 35 \text{ m}^2$

d) b = 20 m

$\triangle$PTQ e $\triangle$SHR congruentes $\Rightarrow$ QT = HR = 9 m
B = QT + TH + HR = (9 + 20 + 9) m = 38 m
$\triangle$SHR retângulo $\Rightarrow h^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow h = 12$ m

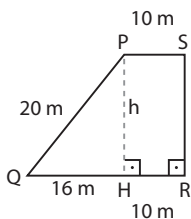
$A = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h \Rightarrow A = \frac{1}{2}(20 + 38) \cdot 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = 348 \text{ m}^2$

e) b = 6 m

$\triangle PH_1Q$ retângulo $\Rightarrow 2^2 + h^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 \Rightarrow h = 6$ m
$\triangle SH_2R$ retângulo $\Rightarrow x^2 + 6^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = 6$ m
$B = 2 + 6 + x \Rightarrow B = 14$ m
$A = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h \Rightarrow A = \frac{1}{2}(6 + 14) \cdot 6 \Rightarrow A = 60 \text{ m}^2$

f) b = 6 m

$\triangle SH_2R$ retângulo $\Rightarrow \begin{cases} \cos 60° = \dfrac{x}{4\sqrt{3}} \\ \operatorname{sen} 60° = \dfrac{h}{4\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow$

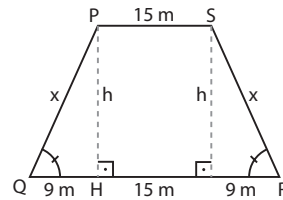
$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \text{ m} \\ h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} \Rightarrow h = 6 \text{ m} \end{cases}$

$\triangle PH_1Q$ retângulo isósceles $\Rightarrow QH_1 = h = 6$ m
$B = QH_1 + H_1H_2 + x = 6 + 6 + 2\sqrt{3} = 12 + 2\sqrt{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow B = \left(12 + 2\sqrt{3}\right)$ m
Logo: $A = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h = \frac{1}{2}\left(6 + 12 + 2\sqrt{3}\right) \cdot 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \left(9 + \sqrt{3}\right)6 \text{ m}^2$

32. b =10 m; B = 26 m

$\triangle$PHQ retângulo $\Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 + 16^2 = 20^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 12$ m

$A = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h \Rightarrow A = \frac{1}{2}(10 + 26) \cdot 12 \Rightarrow A = 216 \text{ m}^2$
Logo, o preço de venda é:

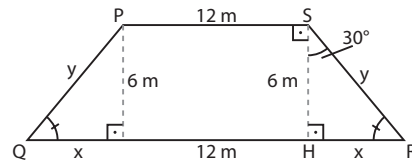
216 · R\$ 350,00 = R\$ 75 600,00

33. $2p = 78 \text{ m} \Rightarrow 2x + 15 + 33 = 78 \Rightarrow x = 15$ m

$\triangle$PHQ retângulo:
$h^2 + 9^2 = x^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 = 15^2 - 9^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 12$ m

b = 15 m; B = 33 m
$A = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h = \frac{1}{2}(15 + 33) \cdot 12 \Rightarrow A = 288 \text{ m}^2$

34. h = 4 dm; B = b + 3 dm
$A = 24 \text{ dm}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(b + B) \cdot h = 24 \Rightarrow$

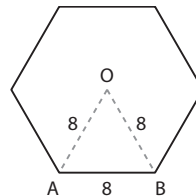
$\Rightarrow (b + b + 3) \cdot 4 = 48 \Rightarrow b = 4,5$ dm
Logo: B = b + 3 dm = (4,5 + 3) dm = 7,5 dm

35. b = 6 cm; $\text{med}(P\hat{S}R) = \text{med}(Q\hat{P}S) = 120°$

$\triangle$SHR retângulo:

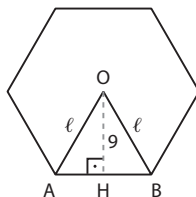
$\begin{cases} \cos 30° = \dfrac{6}{y} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6}{y} \Rightarrow y = 4\sqrt{3} \text{ m} \\ \operatorname{sen} 30° = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{4\sqrt{3}} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} \text{ m} \end{cases}$

- $2p = 12 + 2y + 2x + 12 = 24 + 12\sqrt{3} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2p = 12\left(2 + \sqrt{3}\right)$ m
- $B = 12 + 2x \Rightarrow B = \left(12 + 4\sqrt{3}\right)$ m
  $A = \frac{1}{2}(b + B) \cdot h = \frac{1}{2}\left(12 + 12 + 4\sqrt{3}\right) \cdot 6 \Rightarrow$

  $\Rightarrow A = 12 \cdot \left(6 + \sqrt{3}\right) \text{ m}^2$

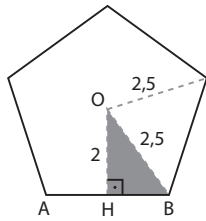
36. a)

$\triangle$AOB equilátero $\Rightarrow$
$\Rightarrow A_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{AOB} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$A_{hexágono} = 6 \cdot A_{AOB} \Rightarrow A_{hexágono} = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2$

b)

$\triangle$AOB equilátero em que
h = OH = 9 cm $\Rightarrow$
$\Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 9 \Rightarrow \ell = 6\sqrt{3}$ cm

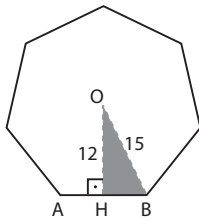
$A_{hexágono} = 6 \cdot A_{AOB} = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 9\right) cm^2 =$

$= 162\sqrt{3}\ cm^2$

c) $\triangle$OHB retângulo $\Rightarrow HB^2 + 2^2 = 2{,}5^2 \Rightarrow HB = 1{,}5$ cm

H é ponto médio de $\overline{AB} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 2 \cdot HB \Rightarrow AB = 3$ cm
$2p = 5 \cdot AB \Rightarrow$
$\Rightarrow 2p = 15$ cm $\Rightarrow p = 7{,}5$ cm

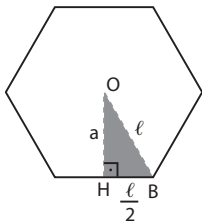
a = OH = 2 cm

$A = p \cdot a = (7{,}5\ cm) \cdot (2\ cm) = 15\ cm^2$

d) $\triangle$OHB retângulo $\Rightarrow HB^2 = 15^2 - 12^2 \Rightarrow HB = 9$ cm

$AB = 2 \cdot HB =$
$= 2 \cdot (9\ cm) = 18$ cm
$2p = 7 \cdot AB =$
$= 7 \cdot (18\ cm) \Rightarrow p = 63$ cm

a = OH = 12 cm

$A = p \cdot a = (63\ cm) \cdot (12\ cm) = 756\ cm^2$

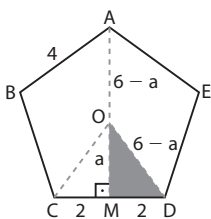
37. $\ell = 0{,}8$ m

$\triangle$OHB retângulo:

$a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 0{,}8^2 - 0{,}4^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 0{,}4\sqrt{3}$ m

$2p = 6 \cdot \ell \Rightarrow 2p = 6 \cdot 0{,}8\ m \Rightarrow p = 2{,}4$ m

$A = p \cdot a \Rightarrow A = (2{,}4\ m) \cdot \left(0{,}4\sqrt{3}\right) m = 0{,}96\sqrt{3}\ m^2$

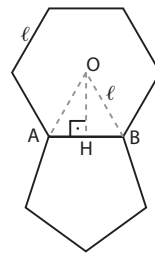
38. CD = AB = 4 cm

$\triangle$COD isósceles $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ **M** ponto médio de $\overline{CD} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ MD = 2 cm

$AM = AO + OM \Rightarrow 6 = AO + a \Rightarrow AO = 6 - a$

$\triangle$OMD retângulo $\Rightarrow a^2 + 2^2 = (6 - a)^2 \Rightarrow a = \frac{8}{3}$ cm

$2p = 5 \cdot AB \Rightarrow 2p = 5 \cdot 4\ cm \Rightarrow p = 10$ cm

$A = p \cdot a = (10\ cm)\left(\frac{8}{3}\ cm\right) = \frac{80}{3}\ cm^2$

39. a = 3 cm

a = OH: altura do $\triangle$AOB, equilátero (apótema do hexágono)
AB = ℓ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{3}$ cm

a) A_1 = área do $\triangle$AOB
$\ell = 2\sqrt{3}\ cm \Rightarrow a = \left(2\sqrt{3}\ cm\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$ cm $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3}\ cm\right) \cdot (3\ cm) = 3\sqrt{3}\ cm^2$

A = área do hexágono $\Rightarrow A = 6 \cdot A_1 \Rightarrow$

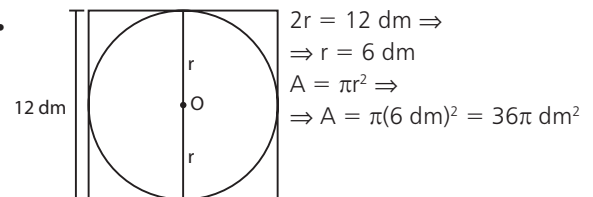
$\Rightarrow A = 6 \cdot \left(3\sqrt{3}\ cm^2\right) = 18\sqrt{3}\ cm^2$

b) $2p = 5\ell \Rightarrow 2p = 5\left(2\sqrt{3}\ cm\right) = 10\sqrt{3}$ cm

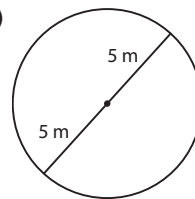
40. a) r = 11 dm
$A = \pi r^2$ $\Rightarrow A = \pi(11\ dm)^2 = 121\pi\ dm^2$

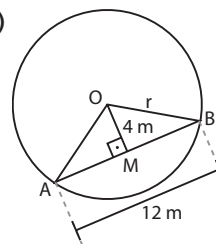
b) $d = 2r = 24\ m \Rightarrow r = 12$ m
$A = \pi r^2$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow A = \pi(12\ m)^2 = 144\pi\ m^2$

c) $2\pi r = 32\pi\ cm \Rightarrow r = 16$ cm
$A = \pi r^2$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow A = \pi(16\ cm)^2 = 256\pi\ cm^2$

41.

$2r = 12\ dm \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 6$ dm
$A = \pi r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \pi(6\ dm)^2 = 36\pi\ dm^2$

42. $2\pi r = 2 \cdot (6\pi\ cm) + 2 \cdot (4\pi\ cm) \Rightarrow r = 10$ cm
$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi(10\ cm)^2 = 100\pi\ cm^2$

43. a)

r = 5 m
$A = \pi r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \pi(5\ m)^2 = 25\pi\ m^2$

b)

$\triangle$AOB isósceles $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ **M** ponto médio de $\overline{AB} \Rightarrow$
$\Rightarrow MB = \frac{AB}{2} = 6$ m

$\triangle$OMB retângulo:

$OM^2 + MB^2 = OB^2 \Rightarrow 4^2 + 6^2 = r^2 \Rightarrow r = 2\sqrt{13}$ m

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi\left(2\sqrt{13}\text{ m}\right)^2 = 52\pi\text{ m}^2$

c)

$\overrightarrow{PT}$ tangente à circunferência $\Rightarrow$

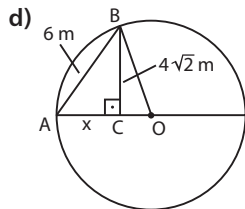
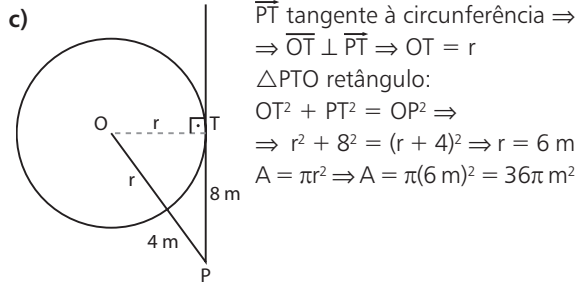
$\Rightarrow \overline{OT} \perp \overrightarrow{PT} \Rightarrow OT = r$

$\triangle PTO$ retângulo:

$OT^2 + PT^2 = OP^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r^2 + 8^2 = (r + 4)^2 \Rightarrow r = 6$ m

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi(6\text{ m})^2 = 36\pi\text{ m}^2$

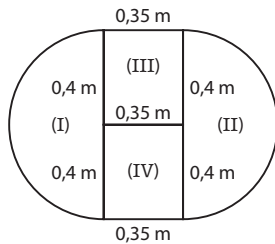
d)

$\triangle ACB$ retângulo

$x^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow x = 2$ m

$\left.\begin{array}{l} OB = r;\ CO = r - x = r - 2 \\ \triangle BCO \text{ retângulo} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(4\sqrt{2}\right)^2 + (r - 2)^2 = r^2 \Rightarrow r = 9$ m

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi(9\text{ m})^2 = 81\pi\text{ m}^2$

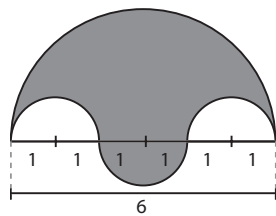
44.

I ∪ II: círculo de raio r = 0,4 m

$A_{I \cup II} = \pi r^2 = \pi(0{,}4\text{ m})^2 = 0{,}16\pi\text{ m}^2 = 0{,}5024\text{ m}^2$

III ∪ IV: retângulo (0,35 m) × (0,8 m)

$A_{III \cup IV} = 0{,}28\text{ m}^2$

$A_{tampo} = A_{I \cup II} + A_{III \cup IV} = 0{,}5024\text{ m}^2 + 0{,}28\text{ m}^2 = 0{,}7824\text{ m}^2$

45. **a)**

A: área da superfície sombreada

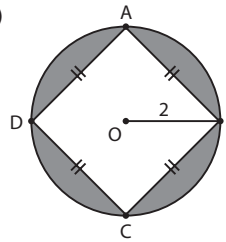
A_1: área do semicírculo de raio $r_1 = 3$ dm

$A_1 = \frac{1}{2}\pi r_1^2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 \Rightarrow A_1 = \frac{9}{2}\pi\text{ dm}^2$

A_2: área do semicírculo de raio $r_2 = 1$ dm

$A_2 = \frac{1}{2}\pi r_2^2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}\pi\text{ dm}^2$

$A = A_1 - A_2 \Rightarrow A = \frac{9}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi \Rightarrow A = 4\pi\text{ dm}^2$

b)

$\left.\begin{array}{l} AB = \ell \\ d = DB = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 4 = \ell\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell^2 = 8\text{ dm}^2$

$A_1 = \ell^2$ (área do quadrado) $\Rightarrow$

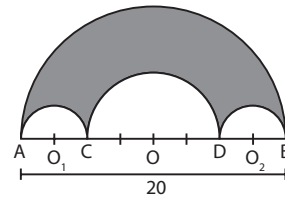
$\Rightarrow A_1 = 8\text{ dm}^2$

$r = OB = 2$ dm

$A_2 = \pi r^2$ (área do círculo) $\Rightarrow A_2 = 4\pi\text{ dm}^2$

$A = A_2 - A_1$ (área da região sombreada)

$A = 4(\pi - 2)\text{ dm}^2$

c)

$AB = 20\text{ dm} \Rightarrow AC = 5\text{ dm};\ CD = 10\text{ dm};\ DB = 5\text{ dm}$

A_1: área do semicírculo de centro **O_1** e diâmetro $\overline{AC}$

$A_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{5}{2}\text{ dm}\right)^2 = \frac{25}{8}\pi\text{ dm}^2$

A_2: área do semicírculo de centro **O** e diâmetro $\overline{CD}$

$A_2 = \frac{1}{2}\pi(5\text{ dm})^2 \Rightarrow A_2 = \frac{25}{2}\pi\text{ dm}^2$

A_3: área do semicírculo de centro **O_2** e diâmetro $\overline{DB}$

$A_3 = A_1 = \frac{25}{8}\pi\text{ dm}^2$

A_4: área do semicírculo de centro **O** e diâmetro $\overline{AB}$

$A_4 = \frac{1}{2}\pi(10\text{ dm})^2 = 50\pi\text{ dm}^2$

A: área da região sombreada $\Rightarrow A = A_4 - A_1 - A_2 - A_3 =$

$= \left(50\pi - \frac{25\pi}{8} - \frac{25\pi}{2} - \frac{25\pi}{8}\right)\text{dm}^2 = \frac{125\pi}{4}\text{ dm}^2$

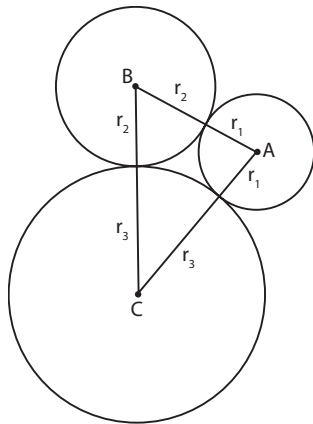
46. r = 49 m

A = área da praça $\Rightarrow A = \pi r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \frac{22}{7} \cdot (49\text{ m})^2 = 7\,546\text{ m}^2$

Como a ocupação média era de 4 pessoas por m², então estima-se que o número de pessoas presentes era:

$4 \cdot 7\,546 = 30\,184$

47.
$$\begin{cases} AB = 16\text{ cm} \Rightarrow r_1 + r_2 = 16\text{ cm} & (1) \\ BC = 24\text{ cm} \Rightarrow r_2 + r_3 = 24\text{ cm} & (2) \\ AC = 22\text{ cm} \Rightarrow r_1 + r_3 = 22\text{ cm} & (3) \end{cases}$$

De 1 e 2, temos:

$$\begin{cases} r_1 = 16 - r_2 \\ r_3 = 24 - r_2 \end{cases} \Rightarrow r_1 + r_3 = 40 - 2r_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 22 = 40 - 2r_2 \Rightarrow r_2 = 9$ cm

Logo: $r_1 = 16 - 9 \Rightarrow r_1 = 7$ cm

$r_3 = 24 - 9 \Rightarrow r_3 = 15$ cm

Assim, as áreas dos círculos de centros **A**, **B** e **C** são, respectivamente: $\pi r_1^2 = 49\pi$ cm^2; $\pi r_2^2 = 81\pi$ cm^2 e $\pi r_3^2 =$ $= 225\pi$ cm^2.

48. a) $r = 4$ m e $\theta = 30°$

$$\begin{array}{cc} \text{ângulo central} & \text{área (m}^2\text{)} \\ 360° & \pi \cdot 4^2 \\ 30° & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{30}{360} \cdot 16\pi \text{ m}^2 = \frac{4\pi}{3} \text{ m}^2$$

b) $r = 9$ dm e $\theta = 120°$

$$\begin{array}{cc} \text{ângulo central} & \text{área (dm}^2\text{)} \\ 360° & \pi \cdot 9^2 \\ 120° & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{120}{360} \cdot 81\pi \text{ dm}^2 = 27\pi \text{ dm}^2$$

c) $r = 12$ m e $\theta = 45°$

$$\begin{array}{cc} \text{ângulo central} & \text{área (m}^2\text{)} \\ 360° & \pi \cdot 12^2 \\ 45° & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{45}{360} \cdot 144\pi \text{ m}^2 = 18\pi \text{ m}^2$$

d) $r = 6$ cm e $\theta = 90°$

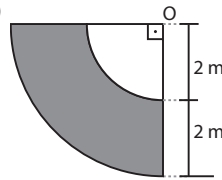
$$\begin{array}{cc} \text{ângulo central} & \text{área (cm}^2\text{)} \\ 360° & \pi \cdot 6^2 \\ 90° & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{90}{360} \cdot 36\pi \text{ cm}^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

e) $r = 10$ cm e $\theta = 150°$

$$\begin{array}{cc} \text{ângulo central} & \text{área (cm}^2\text{)} \\ 360° & \pi \cdot 10^2 \\ 150° & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{150}{360} \cdot 100\pi \text{ cm}^2 = \frac{125\pi}{3} \text{ cm}^2$$

f) $r = 2$ km e $\theta = 300°$

$$\begin{array}{cc} \text{ângulo central} & \text{área (km}^2\text{)} \\ 360° & \pi \cdot 2^2 \\ 300° & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{300}{360} \cdot 4\pi \text{ km}^2 = \frac{10\pi}{3} \text{ km}^2$$

49. a)

A_1: área do setor de 90° e raio 4 m

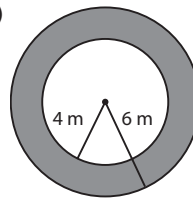
$A_1 = \frac{1}{4}\pi r_1^2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}\pi \cdot 16 \Rightarrow A_1 = 4\pi$ m^2

A_2: área do setor de 90° e raio 2 m

$A_2 = \frac{1}{4}\pi r_2^2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 4 \Rightarrow A_2 = \pi$ m^2

A: área da região sombreada

$A = A_1 - A_2 = 3\pi$ m^2

b)

A_1: área do círculo de raio 6 m

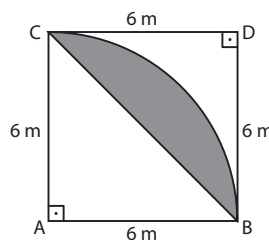
$A_1 = \pi(6 \text{ m})^2 = 36\pi$ m^2

A_2: área do círculo de raio 4 m

$A_2 = \pi(4 \text{ m})^2 = 16\pi$ m^2

A: área da coroa circular

$A = A_1 - A_2 = 20\pi$ m^2

c)

A_1: área do setor de 90° e raio $r = AB = 6$ m

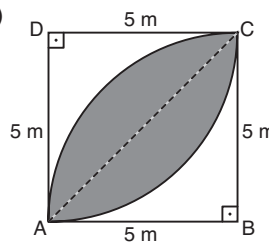
$A_1 = \frac{1}{4}\pi \cdot (6 \text{ m})^2 = 9\pi$ m^2

A_2: área do $\triangle ABC$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (6 \text{ m})(6 \text{ m}) = 18$ m^2

A: área do segmento circular

$A = A_1 - A_2 \Rightarrow A = 9(\pi - 2)$ m^2

d)

A_1: área do setor de 90° e raio $r = AB = 5$ m

$A_1 = \frac{1}{4}\pi(5 \text{ m})^2 = \frac{25\pi}{4}$ m^2

A_2: área do $\triangle ABC$

$A_2 = \frac{1}{2} \cdot (5 \text{ m})(5 \text{ m}) = \frac{25}{2}$ m^2

A_3: área do segmento circular contido no $\triangle ADC$

$A_3 = A_1 - A_2 \Rightarrow A_3 = \frac{25}{4}(\pi - 2)\ m^2$

A: área da região sombreada

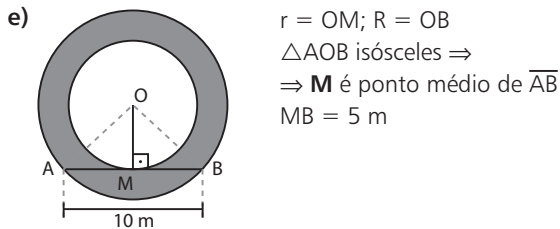
$A = 2 \cdot A_3 \Rightarrow A = \frac{25}{2}(\pi - 2)\ m^2$

e)

$r = OM;\ R = OB$

$\triangle AOB$ isósceles $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **M** é ponto médio de $\overline{AB}$

$MB = 5\ m$

$\triangle OMB$ retângulo $\Rightarrow OB^2 = OM^2 + MB^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 - r^2 = 25 \underset{(\cdot\ \pi)}{\Rightarrow} \pi R^2 - \pi r^2 = 25\pi$

Logo, $A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_{coroa} = 25\pi\ m^2$

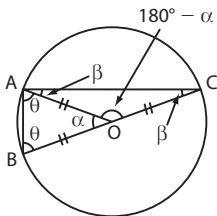
f)

- Lembrando que: "Se $\overline{BC}$ é um diâmetro de um círculo de raio **R**, então o triângulo ABC, inscrito no semicírculo, é retângulo em **A**".

  De fato, observe na figura abaixo que:

  $$\begin{cases} 180° - \alpha = 2\theta & (1) \\ \alpha = 2\beta & (2) \end{cases}$$

  Adicionando membro a membro (1) e (2), temos:

  $180° = 2\theta + 2\beta \Rightarrow \theta + \beta = 90° \Rightarrow med(B\hat{A}C) = 90°$

- Temos:

  $\overline{AH}$: altura do triângulo retângulo BAC

  R = medida do raio do círculo maior

  HO = 4 m

  Pelas relações métricas no $\triangle BAC$, temos:

  $AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow$

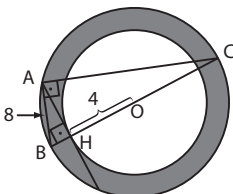
  $\Rightarrow AH^2 = (R - 4) \cdot (R + 4) = R^2 - 16$ (*)

  Pelo teorema de Pitágoras no $\triangle AHB$, temos:

  $AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 8^2 = (R^2 - 16) + (R - 4)^2 \Rightarrow$

  $\overset{(*)}{\Rightarrow} R^2 - 4R - 32 = 0 \Rightarrow R = 8\ m$

- Logo, a área da coroa circular é:

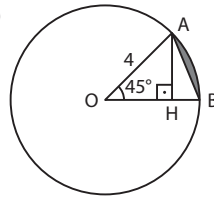
  $A = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A = 64\pi - 16\pi \Rightarrow A = 48\pi\ m^2$

50. Diâmetro da piscina $= 2r = 8\ m \Rightarrow r = 4\ m$

Largura do piso $= 2{,}5\ m \Rightarrow R = 4\ m + 2{,}5\ m = 6{,}5\ m$

A: área do piso $\Rightarrow A = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A = 6{,}5^2\pi - 4^2\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 82{,}50\ m^2$

Logo, Marina gastará: 82,50 · R\$ 16,00 = R\$ 1 320,00

51. a)

A_1: área do setor

ângulo central	área (cm^2)
360°	$\pi \cdot 4^2$
45°	A_1

$\Rightarrow A_1 = \frac{45}{360} \cdot 16\pi\ cm^2 = 2\pi\ cm^2$

A_2: área do $\triangle AOB$

AH = medida da altura do $\triangle AOB$

$med(A\hat{O}H) = 45° \Rightarrow med(O\hat{A}H) = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AHO$ é retângulo isósceles $\Rightarrow$

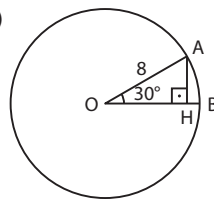
$$\Rightarrow \begin{cases} OH = AH \\ OH^2 + AH^2 = 4^2 \Rightarrow 2 \cdot AH^2 = 16 \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}\ cm \end{cases}$$

Assim: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AH \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot (4\ cm) \cdot (2\sqrt{2}\ cm) =$

$= 4\sqrt{2}\ cm^2$

Logo: $A_{seg} = A_1 - A_2 \Rightarrow A_{seg} = 2\pi\ cm^2 - 4\sqrt{2}\ cm^2 =$

$= 2(\pi - 2\sqrt{2})\ cm^2$

b)

A_1: área do setor

ângulo central	área (dm^2)
360°	$\pi \cdot 8^2$
30°	A_1

$\Rightarrow A_1 = \frac{30}{360} \cdot 64\pi\ dm^2 =$

$= \frac{16\pi}{3}\ dm^2$

A_2: área do $\triangle AOB$

$\triangle AHO$ retângulo $\Rightarrow$ sen $30° = \frac{AH}{OA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AH}{8} \Rightarrow$

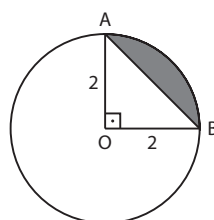
$\Rightarrow AH = 4\ dm$

Assim: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AH \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot (8\ dm) \cdot (4\ dm) =$

$= 16\ dm^2$

Logo: $A_{seg} = A_1 - A_2 \Rightarrow A_{seg} = \frac{16\pi}{3}\ dm^2 - 16\ dm^2 =$

$= \frac{16}{3}(\pi - 3)\ dm^2$

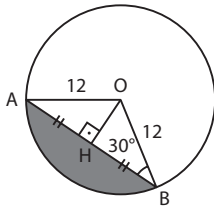
c)

A_1: área do setor $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (2\ m)^2 = \pi\ m^2$

$\mathbf{A_2}$: área do $\triangle AOB \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} \cdot (2\text{ m}) \cdot (2\text{ m}) = 2\text{ m}^2$

Logo: $A_{seg} = A_1 - A_2 \Rightarrow A_{seg} = \pi\text{ m}^2 - 2\text{ m}^2 = (\pi - 2)\text{ m}^2$

d)

$\mathbf{A_1}$: área do setor

ângulo central	área (cm^2)
360°	$\pi \cdot 12^2$
120°	A_1

$\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = \frac{120}{360} \cdot 144\pi\text{ cm}^2 =$
$= 48\pi\text{ cm}^2$

$\mathbf{A_2}$: área do $\triangle AOB$

$\overline{OH}$: altura do triângulo isósceles AOB $\Rightarrow AH = HB$

$\triangle OHB$ retângulo $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sen } 30° = \frac{OH}{OB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{OH}{12} \Rightarrow OH = 6\text{ cm} \\ \cos 30° = \frac{HB}{OB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HB}{12} \Rightarrow HB = 6\sqrt{3}\text{ cm} \end{cases}$$

Logo: $AB = 12\sqrt{3}$ cm

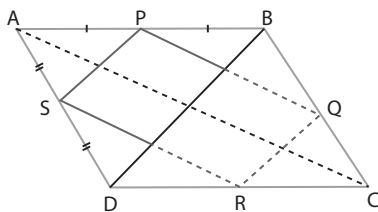
Assim: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OH \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2}(12\sqrt{3}\text{ cm}) \cdot (6\text{ cm}) =$

$= 36\sqrt{3}\text{ cm}^2$

Logo: $A_{seg} = A_1 - A_2 \Rightarrow A_{seg} = 48\pi\text{ cm}^2 - 36\sqrt{3}\text{ cm}^2 =$

$= 12(4\pi - 3\sqrt{3})\text{ cm}^2$

Desafio

Observe na figura abaixo que:

P e **S** são pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DA}$, respectivamente. Assim, traçando a diagonal $\overline{BD}$, temos:

$\triangle ASP \sim \triangle ADB \Rightarrow \frac{AS}{AD} = \frac{AP}{AB} = \frac{SP}{DB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A_{ASP}}{A_{ADB}} = \frac{1}{4}$

Da mesma forma, podemos concluir que:

$A_{CQR} = \frac{1}{4} \cdot A_{CBD}$; $A_{BQP} = \frac{1}{4} \cdot A_{BCA}$; $A_{DRS} = \frac{1}{4} \cdot A_{DCA}$

Temos: $A_{ASP} + A_{CQR} + A_{BQP} + A_{DRS} =$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\underbrace{A_{ADB} + A_{CBD}}_{A_{ABCD}} + \underbrace{A_{BCA} + A_{DCA}}_{A_{ABCD}}) =$$

$= \frac{1}{4}(48\text{ cm}^2 + 48\text{ cm}^2) = 24\text{ cm}^2$

Logo: $A_{PQRS} = A_{ABCD} - 24\text{ cm}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{PQRS} = 48\text{ cm}^2 - 24\text{ cm}^2 = 24\text{ cm}^2$

CAPÍTULO 13

Estatística básica

Exercícios

1. São qualitativas: II, IV e VI.
São quantitativas: I, III e V.

2. **a)** Todos os alunos regularmente matriculados nesse curso pré-vestibular.
b) População: 2 475 alunos; amostra: 50 alunos.
c) Perguntas: 1, 2, 5, 7
d) Pergunta 1: exatas, humanas, biológicas
Pergunta 5: Física, Química, Matemática, História, Filosofia etc.
Pergunta 6: 0, 1, 2, 3, ...

3. **a)** Todos os domicílios situados em áreas rurais nos estados de RJ e ES.
b) Possíveis perguntas:
- "Você costuma deixar água parada em algum lugar da casa?"
- "Já houve algum caso de dengue na região onde mora?"
- "Você sabe como é transmitida a dengue?"

4. **a)** Intenção de voto para prefeito: variável qualitativa. Realizações: candidato **A**, candidato **B**, indeciso, branco ou nulo.
b) População: 1 764 835; amostra: 2 650
c)

Intenções de voto	Frequência absoluta	Frequência relativa
Candidato A	1 715	0,647 ou 64,7%
Candidato B	691	0,261 ou 26,1%
Indecisos	141	0,053 ou 5,3%
Brancos ou nulos	103	0,039 ou 3,9%
Total	**2 650**	**1,00 ou 100%**

5.

Avaliação das instalações	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
AR	9	$\frac{9}{25}$ = 0,36 ou 36%
A	12	$\frac{12}{25}$ = 0,48 ou 48%
R	4	$\frac{4}{25}$ = 0,16 ou 16%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

6.

Frequência semanal	Frequência absoluta	Frequência relativa
1	2	$\frac{2}{25}$ = 0,08 ou 8%
2	6	$\frac{6}{25}$ = 0,24 ou 24%
3	8	$\frac{8}{25}$ = 0,32 ou 32%
4	5	$\frac{5}{25}$ = 0,20 ou 20%
5	3	$\frac{3}{25}$ = 0,12 ou 12%
6	1	$\frac{1}{25}$ = 0,04 ou 4%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

7. **a)** 10

b) $\frac{15}{25} = 0,60$

8.
- Maior idade: 52 anos; menor idade: 18 anos.
- Amplitude = (52 − 18) anos = 34 anos
- 34 ÷ 5 = 6,8; arredondemos para 7.

Idade	Frequência absoluta	Frequência relativa
18 ⊢ 25	5	0,20 ou 20%
25 ⊢ 32	8	0,32 ou 32%
32 ⊢ 39	7	0,28 ou 28%
39 ⊢ 46	3	0,12 ou 12%
46 ⊢ 53	2	0,08 ou 8%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

9. Número de avaliações com nota 4: 14
Número de avaliações com nota 5: 7

Percentual de alunos que atribuíram notas 4 ou 5: $\frac{14 + 7}{25} =$

$= \frac{21}{25} = 0,84 = 84\%$; os dados confirmam a expectativa.

10. $\frac{a}{400} = 0,06 \Rightarrow a = 24$

b = 6%;

$c = \frac{92}{400} = 0,23$;

d = 23%;

$\frac{e}{400} = 0,09 \Rightarrow e = 36$;

f = 0,09;

$g = \frac{180}{400} = 0,45$;

h = 45%;

i = 400 − (24 + 92 + 36 + 180) = 68;

$j = \frac{68}{400} = 0,17$;

k = 17%.

11. **a)** $63 + x + 54 + 2x + \frac{x}{2} = 180 \Rightarrow \frac{7x}{2} = 63 \Rightarrow x = 18$

b) $\frac{x}{2} = \frac{18}{2} = 9$; $\frac{9}{180} = 0,05 = 5\%$

c) $63 + x + 54 = 63 + 18 + 54 = 135$; $\frac{135}{180} = 0,75$
Portanto, temos: 75%.

12. Amplitude da amostra: 4 860 − 846 = 4 014

4 014 ÷ 5 = 802,80; arredondemos para 803.

Renda mensal (em reais)	Frequência absoluta (Fa)	Frequência relativa (Fr)
846 ⊢ 1 649	10	$\frac{10}{25}$ = 0,40 ou 40%
1 649 ⊢ 2 452	7	$\frac{7}{25}$ = 0,28 ou 28%
2 452 ⊢ 3 255	4	$\frac{4}{25}$ = 0,16 ou 16%
3 255 ⊢ 4 058	2	$\frac{2}{25}$ = 0,08 ou 8%
4 058 ⊢ 4 861	2	$\frac{2}{25}$ = 0,08 ou 8%
Total	**25**	**1,00 ou 100%**

13. **a)**

Nota	Fa	Fr
1,0 ⊢ 2,5	5	$0,1\overline{6}$ ou $16,\overline{6}\%$
2,5 ⊢ 4,0	5	$0,1\overline{6}$ ou $16,\overline{6}\%$
4,0 ⊢ 5,5	8	$0,2\overline{6}$ ou $26,\overline{6}\%$
5,5 ⊢ 7,0	6	0,20 ou 20%
7,0 ⊢ 8,5	3	0,10 ou 10%
8,5 ⊢ 10,0	3	0,10 ou 10%
Total	**30**	**1,00 ou 100%**

b) $\frac{3 + 3}{30} = \frac{6}{30} = 0,2 = 20\%$

14. **a)** Falsa.

b) Falsa; foi no Censo de 1940, em que a diferença era de 38,4.

c) Verdadeira; 0,24 · 190 milhões = 45,6 milhões

d) Falsa; $\left\{\begin{array}{l} 14,45 \text{ milhões} — 8,5\% \\ x — 100\% \end{array}\right. \Rightarrow x = 170$ milhões

15. **a)** Centro-Oeste: $\left.\begin{array}{r} 620\,646 — x \\ 7\,173\,574 — 100\% \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 8,65 \Rightarrow x = 9\%$; $0,09 \cdot 360° \simeq 32°$

Norte: $\left.\begin{array}{r} 746\,083 — y \\ 7\,173\,574 — 100\% \end{array}\right\} \Rightarrow$

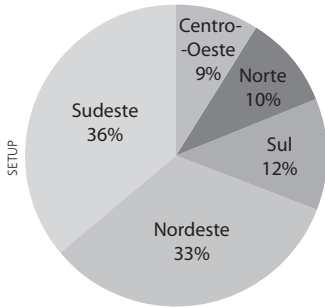
$\Rightarrow y \simeq 10,4 \Rightarrow y = 10\%$; $0,10 \cdot 360° = 36°$

Sul: $\left.\begin{array}{l} 886\,705 — \quad z \\ 7\,173\,574 — 100\% \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow z \simeq 12{,}36 \Rightarrow z = 12\%;\ 0{,}12 \cdot 360° \simeq 43°$

Nordeste: $\left.\begin{array}{l} 2\,358\,506 — \quad w \\ 7\,173\,574 — 100\% \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow w \simeq 32{,}88 \Rightarrow w = 33\%;\ 0{,}33 \cdot 360° \simeq 119°$

Sudeste: O percentual é $[100 - (9 + 10 + 12 + 33)]\% =$
$= 36\%$

b) Sudeste: $0{,}36 \cdot 360° = 129{,}6°$; arredondando obtemos 130°
Norte: $0{,}10 \cdot 360° = 36°$

16. a) Setembro de 2014, outubro de 2014, novembro de 2014, janeiro de 2015 e fevereiro de 2015.

b) $E - i = 0{,}49 \Rightarrow 15{,}156 - i = 0{,}49 \Rightarrow$
$\Rightarrow i = 14{,}666$ bilhões de dólares

c) Junho de 2014.

d) O aumento no saldo da balança comercial foi de 0,33 bilhão de dólares ($-2{,}84 - (-3{,}17) = -2{,}84 + 3{,}17 =$ $= 0{,}33$).

e) $E - i = -2{,}84 \Rightarrow E - x = -2{,}84 \Rightarrow E = x - 2{,}84$

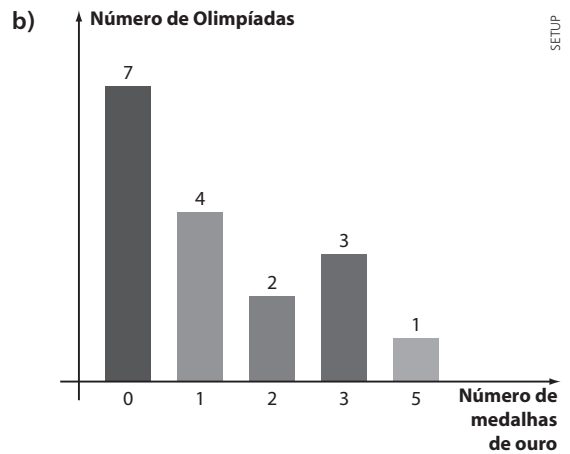
17. Inglês: $\left.\begin{array}{l} 180 — 360° \\ x — 252° \end{array}\right\} \Rightarrow x = 126$ alunos

a) $\left.\begin{array}{l} 18 \text{ alunos} — y \\ 180 \text{ alunos} — 360° \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{10} = \frac{y}{360°} \Rightarrow y = 36°$

b) Espanhol: $180 - 126 - 18 = 36$ alunos;
$\left.\begin{array}{l} 180 \text{ alunos} — 360° \\ 36 \text{ alunos} — z \end{array}\right\} \Rightarrow z = 72°$

18. a)

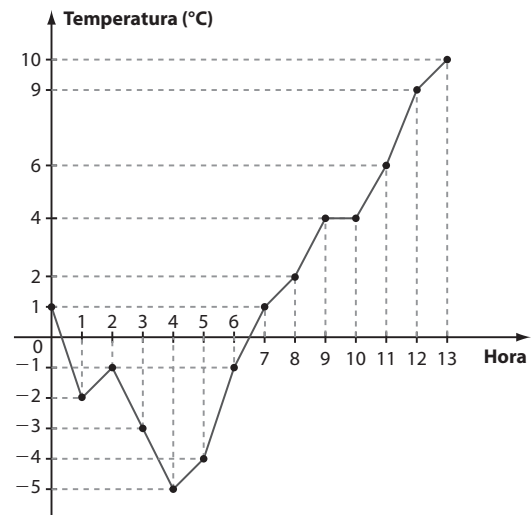
Número de medalhas de ouro	Frequência absoluta	Frequência relativa
0	7	≃ 0,412 ou 41,2%
1	4	≃ 0,235 ou 23,5%
2	2	≃ 0,118 ou 11,8%
3	3	≃ 0,176 ou 17,6%
5	1	≃ 0,059 ou 5,9%
Total	**17**	**1,000 ou 100%**

b)

19. a) 2012: $\left(9 + \frac{3}{4}\right)$ bolas $\Rightarrow 9 \cdot 60 + \frac{3}{4} \cdot 60 =$
$= 540 + 45 = 585$ (585 gols)
2015: 6,5 bolas $\Rightarrow 6{,}5 \cdot 60 = 390$ (390 gols)
A diferença pedida é $585 - 390 = 195$

b) $6 + 9{,}75 + 8{,}5 + 13{,}25 + 6{,}5 + 8 = 52$ (52 bolas);
$52 \cdot 60 = 3\,120$ (3 120 gols)

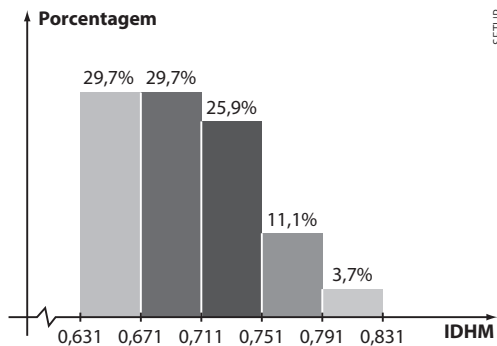
c) $\frac{3\,120}{6} = 520$ (520 gols)

20. a) $[10 - (-5)]$ °C = 15 °C

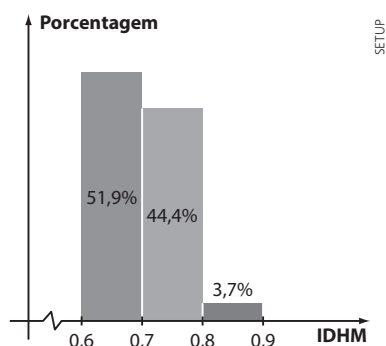
b) Gráfico de linhas, pois é necessário representar a variação da temperatura no decorrer do tempo.

21. a)

IDHM	Frequência absoluta	Frequência relativa
0,631 ⊢ 0,671	8	≃ 0,297 ou 29,7%
0,671 ⊢ 0,711	8	≃ 0,297 ou 29,7%
0,711 ⊢ 0,751	7	≃ 0,259 ou 25,9%
0,751 ⊢ 0,791	3	≃ 0,111 ou 11,1%
0,791 ⊢ 0,831	1	≃ 0,037 ou 3,7%
Total	**27**	**≃ 1,00 ou 100%**

- A amplitude da amostra é igual a $0{,}824 - 0{,}631 =$ $= 0{,}193$

- $0,193 \div 5 = 0,0386$; arredondando para 2 casas decimais, temos 0,04.

b) O percentual aproximado é $(11,1 + 3,7)\% = 14,8\%$.

22. a)

IDHM	Frequência absoluta	Frequência relativa
0,6 ⊢ 0,7	14	≃ 0,51852 ou 51,9%
0,7 ⊢ 0,8	12	≃ 0,44444 ou 44,4%
0,8 ⊢ 0,9	1	≃ 0,03703 ou 3,7%
Total	**27**	**≃ 1,00 ou 100%**

b) O percentual aproximado é $(44,4 + 3,7)\% = 48,1\%$.

23. a) $\left.\begin{matrix} 360° — 2\,400 \text{ funcionários} \\ 105° — x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{360}{105} = \dfrac{2\,400}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{24}{7} = \dfrac{2\,400}{x} \Rightarrow x = 700$ (700 funcionários)

b) Devemos considerar os funcionários que faltaram duas ou mais vezes ao trabalho.
Considerando os setores de 90° e 30°, temos um "total" de 120°, que é $\dfrac{1}{3}$ do círculo.
Logo, $\dfrac{1}{3}$ de $2\,400 = 800$ funcionários tiveram, cada um, pelo menos duas faltas no mês.

24. a) Em 2013: $10 \cdot 25$ mil hectares desmatados = 250 mil hectares desmatados.
$1 \text{ km}^2 = (1\,000 \text{ m}) \cdot (1\,000 \text{ m}) = 1\,000\,000 \text{ m}^2 =$
$= 10^2$ hectares
Daí: $\left.\begin{matrix} 1 \text{ km}^2 — 10^2 \text{ hectares} \\ x — 250\,000 \text{ hectares} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 2\,500 \text{ km}^2$
Em 2015: $2,5 \cdot 25$ mil hectares = 62,5 mil hectares
$\left.\begin{matrix} 1 \text{ km}^2 — 10^2 \text{ hectares} \\ x — 62\,500 \text{ hectares} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 625 \text{ km}^2$

b) Queda (absoluta): 6 árvores
Queda (em porcentagem): $\dfrac{6}{10} = 60\%$

c) Queda (absoluta): $(12 - 0,5)$ árvores = 11,5 árvores
Queda (em porcentagem): $\dfrac{11,5}{12} \simeq 0,9583 = 95,83\%$

d) 2016: $0,5 \cdot 25$ mil hectares = 12,5 mil hectares =
$= 12,5 \cdot 10^3 \cdot 10^4 \text{ m}^2 = 12,5 \cdot 10^7 \text{ m}^2 = 1,25 \cdot 10^8 \text{ m}^2$
A área de um campo de futebol é:
$(100 \text{ m}) \cdot (70 \text{ m}) = 7 \cdot 10^3 \text{ m}^2$
O número de campos é: $\dfrac{1,25 \cdot 10^8 \text{ m}^2}{7 \cdot 10^3 \text{ m}^2} \simeq 17\,857$

25. a) Falsa; a partir de 2010 a função é crescente.
b) Verdadeira; a projeção indica que o consumo excederá a produção, acarretando possível importação ou uso de estoques.
c) Falsa; veja o período de 2003 a 2005.
d) Verdadeira; $1,1 \cdot 11\,423 = 12\,565 < 13\,738$.
e) Falsa; 14 015 mil toneladas − 11 850 mil toneladas = = 2 165 mil toneladas

Desafio

a) Como 0,598 é próximo de $0,6 = \dfrac{3}{5}$, a afirmação é verdadeira **(V)**.

b) $7\% \cdot 150$ milhões km² $= 0,07 \cdot 150$ milhões km² = = 10,5 milhões km²; **(F)**.

c) *América*
População: $0,135 \cdot 7,349$ bilhões de habitantes = = 0,992115 bilhões de habitantes = 992,115 milhões de habitantes
Densidade demográfica:
$$\frac{992,115 \text{ milhões habitantes}}{0,28 \cdot 150 \text{ milhões km}^2} \simeq 23,6 \frac{\text{habitantes}}{\text{km}^2}$$
África
População: $0,162 \cdot 7,349$ bilhões de habitantes = = 1,190538 bilhão de habitantes = 1190,538 milhões de habitantes
Densidade demográfica:
$$\frac{1\,190,538 \text{ milhões habitantes}}{0,2 \cdot 150 \text{ milhões km}^2} \simeq 39,7 \frac{\text{habitantes}}{\text{km}^2}$$
A afirmação é falsa **(F)**.

d) $\dfrac{0,005 \cdot 7,349 \text{ bilhões habitantes}}{0,06 \cdot 150 \text{ milhões km}^2} =$

$= \dfrac{36,745 \text{ milhões habitantes}}{9 \text{ milhões km}^2} < 5$, pois $\dfrac{36}{9} = 4$; **(V)**.

e) Pelo item *c*, vemos que a população da África era superior a 1 bilhão de habitantes **(F)**.

f) Densidade atual $= \dfrac{p}{A}$;
se a população aumentasse 10%, teríamos
$d' = 1,1\dfrac{p}{A} = 1,1 \cdot d$, isto é, a densidade demográfica também aumentaria 10% **(V)**.